Sur un problème de M. Kuratowski concernant la propriété de Baire des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Kuratowski m'a posé le problème suivant:

E étant un ensemble linéaire qui jouit de la propriété de Baire [1], *l'ensemble plan Q formé de toutes les parallèles à une droite fixe menées par les points de E, jouit-il nécessairement de la propriété de Baire?*

Le but de cette Note est de prouver (en utilisant un résultat de M. Lusin) que *si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, la réponse est négative* [2].

En effet, M. Lusin a démontré récemment que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble non dénombrable L de nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$ qui ne jouit pas de la propriété de Baire (par rapport à l'intervalle $(0, 1)$) et qu'il existe une fonction $\psi(x)$ définie et continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$, à valeurs distinctes sur N et telle que l'ensemble $K=\psi(L)$ est toujours de 1^re^ catégorie [3].

Désignons par J l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in N$ et $y=\psi(x)$: la fonction $\psi(x)$ étant continue dans N, l'ensemble J est évidemment homéomorphe à N, donc un G_δ. Pareillement l'ensemble J_1 de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in L$ et $y=\psi(x)$, est homéomorphe à L. Donc, l'ensemble J_1 ne jouit pas de la propriété de Baire, puisque, comme j'ai démontré [4], tout ensemble homéomorphe à un ensemble jouissant de la propriété de Baire jouit de cette propriété, et l'ensemble L (homéomorphe à J_1) ne jouit pas de la propréte de Baire.

[1]) Quant à la définition de la propriété de Baire des ensembles voir p. ex. *Fund. Math.*, t. IV, p. 319.

[2]) Cf. *C. R. Paris*, t. 197, p. 1716.

[3]) Voir N. Lusin, *Fund. Math.*, t. XXI, p. 119–122 et W. Sierpiński, *Fund. Math.*, t. XXII, p. 21.

[4]) *Fund. Math.*, t. IV, p. 319.

Désignons maintenant par E l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x=0$ et $y \in K$: c'est donc un ensemble toujours de 1^re^ catégorie (en tant que superposable avec K), donc un ensemble linéaire (situé sur l'axe $0Y$) jouissant de la propriété de Baire. Soit Q l'ensemble-somme de toutes les parallèles à l'axe $0X$ menées par les points de l'ensemble E. Je dis que l'ensemble plan Q ne jouit pas de la propriété de Baire.

En effet, admettons que l'ensemble Q jouisse de la propriété de Baire. L'ensemble J jouissant de la propriété de Baire (en tant qu'un G_δ plan) et le produit de deux ensemble jouissants de la propriété de Baire jouissant (comme on sait) de cette propriété, nous concluons que l'ensemble QJ jouit de la propriété de Baire. Or, comme on voit sans peine (la fonction $\psi(x)$ étant à valeurs distinctes sur N), on a $QJ=J_1$: l'ensemble J_1 jouirait donc de la propriété de Baire, ce qui n'est pas le cas, comme nous avons vu plus haut.

L'ensemble Q ne jouit pas donc de la propriété de Baire. Nous avons ainsi démontré que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, la réponse au problème de M. Kuratowski est négative.

De l'hypothèse que la réponse au problème de M. Kuratowski est positive (ce qui n'est pas le cas, comme nous avons démontré, tout au moins si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$), hypothèse que j'ai regardé (faussement) comme une vérité évidente, j'ai tiré dans le vol. XI de ce journal, p. 304—305, la conséquence que l'image géométrique d'une fonction (d'une variable réelle) jouissant de la propriété de Baire est toujours un ensemble (plan) jouissant de la propriété de Baire. Or, ce n'est pas le cas, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

En effet, définissons la fonction $\varphi(y)$ de la variable réelle y comme il suit. Si y non $\in K$, posons $\varphi(y)=-1$. Si $y \in K$, il existe un nombre x de L bien déterminé, tel que $y=\psi(x)$ (puisque $K=\psi(L)$ et la fonction $\psi(x)$ est à valeurs distinctes sur L): nous poserons $\varphi(y)=x$.

La fonction $\varphi(y)$ d'une variable réelle y jouit évidemment de la propriété de Baire (puisque l'ensemble $\underset{y}{E}[\varphi(y) \neq -1]=K$ est toujours de 1^re^ catègorie). Or, son image géométrique H, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x=\varphi(y)$, ne jouit pas de la propriété de Baire, puisque, si H jouissait de cette propriété, il en serait de même de l'ensemble $H - \underset{x,y}{E}[x = -1]$ qui coïncide évidemment avec J_1, et comme nous savons, l'ensemble J_1 ne jouit pas de la propriété de Baire.

Donc, *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction d'une variable réelle qui jouit de la propriété de Baire et dont l'image géométrique ne jouit pas de la propriété de Baire.*

Voici encore une remarque due à M. Kuratowski.

En conservant les notations utilisées plus haut, posons

$$f(x,y) = 1 \text{ si } (x,y) \in Q, \text{ et } f(x,y) = 0 \text{ si } (x,y) \text{ non } \in Q.$$

La fonction de deux variables réelles $f(x,y)$ ne jouit pas de la propriété de Baire, puisque l'ensemble Q ne jouit pas de la propriété de Baire. Or, la fonction $f(x,y)$ dépend évidemment seulement de y, et si l'on pose, pour x et y réels, $f(x,y) = \vartheta(y)$, la fonction $\vartheta(y)$ d'une variable réelle y jouit de la propriété de Baire (puisque $\underset{y}{E}[\vartheta(y) \neq 0] = K$ et K est un ensemble toujours de première catégorie).

Donc, *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *une fonction d'une variable réelle qui jouit de la propriété de Baire, considérée comme une fonction de deux variables réelles, peut ne jouir pas de la propriété de Baire.*

Ou encore, posons, pour x et y réels: $F(x,y) = y$ — ce sera évidemment une fonction continue de deux variables réelles x, y. La fonction $g(x,y) = F(x, \vartheta(y))$ est, comme on voit sans peine, la fonction caractéristique de l'ensemble (plan) Q, donc une fonction qui ne jouit pas de la propriété de Baire. Donc:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction de deux variables réelles qui ne jouit pas de la propriété de Baire et qui est une fonction continue (de deux variables réelles) de fonctions (d'une variable réelle) jouissant de la propriété de Baire.*

(Pour les fonctions d'une variable réelle, ainsi que pour les fonctions de deux variables réelles de fonctions de deux variables réelles, un tel cas est, comme on sait, impossible).

On Linearly Measurable Plane Sets of Points of Upper Density $^1/_2$.

By

J. Gillis (Cambridge, England).

§ 1. The general theory of linear measure and measurability of plane sets of points is due to Carathéodory [1]), Gross [2]) and Esterman [3]); but Besicovitch [4]), in a paper to which I shall refer as (*B*), was the first to investigate the geometrical properties of linearly measurable plane sets. Later, Besicovitch and Walker [5]), proved a further important result, and, although their actual theorem is irrelevant to my present purpose, I shall have to make frequent use of the arguments they use to establish some of their auxiliary theorems. When doing so, I shall refer to their paper as (*B* and *W*). I proved to state some definitions and the relevant known theorems.

§ 2. Let A be a plane set of points and p an arbitrarily chosen positive number; let $U(p, A)$ denote a finite or denumerable set of convex areas $\{U_k(p, A)\}$ such that:

(I) every point of A is interior to at least one of the areas $U_k(p, A)$, and

(II) the diameter d_k of $U_k(p, A)$ is less than p for each k;

then the lower bound of $\sum_U d_k$ is denoted by L_p. As p decreases,

[1]) Über das lineare Maß von Punktmengen. *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Math.-Phys. Klasse, (1914).

[2]) *Monatshefte für Math. und Physik* (1918).

[3]) *Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Hamb. Univ.* (1925).

[4]) *Math. Annalen* (1927), pp. 422—464.

[5]) *Proc. of the London Math. Soc*, Ser. 2, Vol. 32, Part 2, pp. 142—153.