Deux théorèmes sur les familles des fonctions de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème I: *Φ étant une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions de Baire d'une variable réelle (ou, plus généralement, de fonctions qui sont continues quand on néglige un ensemble de 1^{re} catégorie), il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui est transformé par toute fonction de la famille Φ en un ensemble de mesure nulle.*

Théorème II: *Φ étant une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions de Baire (ou, plus généralement, de fonctions mesurables) d'une variable réelle, il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui est transformé par toute fonction de la famille Φ en un ensemble de première catégorie de Baire.*

Démonstration du théorème I.

Dans le vol. XI de ce journal (p. 302) j'ai démontré ce

Lemme 1. Soit E un ensemble linéaire (infini), $f(x)$ — une fonction (réelle) définie et continue dans E. Il existe une décomposition $E = K + R$, où K est un ensemble de première catégorie et où $f(R)$ est un ensemble de mesure nulle.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction d'une variable réelle qui est continue quand on néglige un ensemble de 1^{re} catégorie, soit K_0.

La fonction $f(x)$ est donc continue dans l'ensemble CK_0 et, d'après le lemme 1, il existe une décomposition

$$CK_0 = K_1 + R, \tag{1}$$

où K_1 est un ensemble de 1^{re} catégorie (disjoint avec R) et $mf(R) = 0$.

Or, d'après (1)

$$R = C(K_0 + K_1) = CK$$

où $K = K_0 + K_1$ est un ensemble de 1^{re} catégorie.

Nous avons donc ce

Lemme 2. *Si $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle qui est continue quand on néglige un ensemble de 1^{re} catégorie, il existe un ensemble K de 1^{re} catégorie, tel que $mes f(CK) = 0$.*

Soit maintenant Φ une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions d'une variable réelle, dont chacune, $f(x)$, est continue quand on néglige un ensemble de 1^{re} catégorie (dépendant de f). Il existe donc une suite transfinie du type Ω,

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots \quad (\xi < \Omega) \tag{2}$$

formée de toutes les fonctions de la famille Φ.

Soit α un nombre ordinal donné $< \Omega$. D'après le lemme 2, il existe un ensemble K_α de 1^{re} catégorie, tel que $mes f_\alpha(CK_\alpha) = 0$.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie du type Ω de nombres réels

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega) \tag{3}$$

comme il suit.

Désignons par x_1 un nombre réel qui n'appartient pas à K_1. Soit maintenant α un nombre ordinal donné > 1 et $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres x_ξ pour $\xi < \alpha$: désignons par D_α l'ensemble de tous ces nombres: ce sera évidemment un ensemble au plus dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$). Posons

$$S_\alpha = D_\alpha + \sum_{\xi \leq \alpha} K_\xi: \tag{4}$$

c'est évidemment un ensemble de 1^{re} catégorie (en tant qu'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de 1^{re}

catégorie). Il existe donc des nombres réels qui n'appartiennent pas à S_α: nous désignerons par x_α un de tels nombres.

La suite transfinie (3) est ainsi définie par l'induction transfinie et on voit sans peine que tous les termes de cette suite sont distincts et qu'on a

$$x_\alpha \text{ non } \epsilon\, S_\alpha, \quad \text{pour} \quad \alpha < \Omega,$$

donc, d'après (4):

(5) $$x_\alpha \,\epsilon\, CK_\xi \quad \text{pour} \quad \xi \leqslant \alpha < \Omega.$$

Soit N l'ensemble de tous les nombres de la suite (3): c'est donc un ensemble non dénombrable (de puissance $\aleph_1$).

Soit λ un nombre ordinal donné quelconque $< \Omega$.

D'après (5) on a

$$x_\alpha \,\epsilon\, CK_\lambda \quad \text{pour} \quad \lambda \leqslant \alpha < \Omega,$$

d'où résulte que

$$N - D_\lambda \subset CK_\lambda,$$

donc

$$f_\lambda(N - D_\lambda) \subset f_\lambda(CK_\lambda).$$

On a donc:

(6) $$f_\lambda(N) = f_\lambda(D_\lambda) + f_\lambda(N - D_\lambda) \subset f_\lambda(D_\lambda) + f_\lambda(CK_\lambda).$$

L'ensemble $f_\lambda(D_\lambda)$ étant au plus dénombrable (en tant qu'une image univoque de l'ensemble au plus dénombrable D_λ) et l'ensemble $f_\lambda(CK_\lambda)$ étant de mesure nulle, la formule (6) prouve que l'ensemble $f_\lambda(N)$ est de mesure nulle.

Toute fonction de la suite (2), donc toute fonction de la famille Φ transforme donc l'ensemble N en un ensemble de mesure nulle, et le théorème I est démontré.

Démonstration du théorème II.

Lemme I. [1]) Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), il existe, pour tout nombre réel x_0 donné et tout $\varepsilon > 0$, un nombre $\delta > 0$, tel que

(7) $$mes \mathop{\mathrm{E}}_x [0 < |f(x) - f(x_0)| < \delta] < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit ε un nombre > 0 donné. Posons, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

(8) $$M_n = \mathop{\mathrm{E}}_x \left[0 < |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n}\right];$$

[1]) Voir W. Sierpiński. *C. R. Soc. Sc. Varsovie* t. XXII (1929), p. 58.

la fonction $f(x)$ étant mesurable, les ensembles (8) sont évidemment mesurables (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Or, on a évidemment, d'après (8):

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$$

et

$$M_1 M_2 M_3 \ldots = 0;$$

les ensembles M_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) étant mesurables, il en résulte, comme on sait:

$$\lim_{n=\infty} \text{mes } M_n = 0$$

et il existe un nombre naturel n, tel que

$$\text{mes } M_n < \varepsilon;$$

en posant $\delta = 1/n$, nous aurons, d'après (8), l'inégalité (7), et notre lemme est demontré.

Lemme II. *Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), il existe un ensemble N de mesure nulle, tel que l'ensemble $f(CN)$ est de 1re catégorie* [1]).

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction mesurable donnée et désignons par Q l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ pour x réels. Soit

(9) $$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

un ensemble dénombrable de nombres de Q, dense dans Q.

Soient n et k deux nombres naturels donnés. D'après le lemme I il existe un nombre $\delta_{n,k} > 0$, tel que l'ensemble

(10) $$T_{n,k} = \mathop{\mathrm{E}}_x [0 < |f(x) - y_k| < \delta_{n,k}]$$

(qui est évidemment mesurable) satisfait à l'inégalité

(11) $$\text{mes } T_{n,k} < \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Posons

(12) $$N = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}:$$

[1]) Cf. W. Sierpiński. *Bulletin Acad. Polonaise* 1928, p. 456—458 (Lemme II).

d'après (11) on aura, pour n naturels:

$$\operatorname{mes}\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} T_{n,k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} < \frac{1}{2^n},$$

donc, d'après (12):

$$\operatorname{mes} N \leqslant \operatorname{mes} \sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k} < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne

$$\operatorname{mes} N = 0.$$

Or, je dis que

$$(13) \qquad f(CN) \subset \sum_{n=1}^{\infty} C \sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{\mathrm{E}}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}].$$

En effet, soit $y_0 \epsilon f(CN)$: il existe donc un nombre x_0, tel que $x_0 \epsilon CN$ et $f(x_0) = y_0$. De $x_0 \epsilon CN$ et de (12) résulte que

$$x_0 \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} C T_{n,k}:$$

il existe donc un indice n, tel que

$$x_0 \epsilon C T_{n,k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après (10):

$$f(x_0) = y_k \quad \text{ou bien} \quad |f(x_0) - y_k| \geqslant \delta_{n,k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où résulte tout de suite que

$$f(x_0) \epsilon C \underset{y}{\mathrm{E}}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}] \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc que le nombre $f(x_0)$ est un élément du côté droit de la formule (13).

La formule (13) est ainsi établie.

Or, les ensembles

$$C \sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{\mathrm{E}}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

sont non denses dans Q puisque, comme on voit sans peine, les ensembles

$$\underset{y}{\mathrm{E}}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

sont ouverts et leurs somme est dense dans Q, les nombres (9) formant un ensemble dense dans Q. Le côté droit de la formule (13), donc aussi l'ensemble $f(CN)$, est donc de 1re catégorie sur Q, et par suite de 1re catégorie sur l'ensemble de tous les nombres réels, puisque $f(CN) \subset Q$.

Le lemme II est ainsi démontré.

La démonstration du théorème II, basée sur le lemme II, est tout à fait analogue à notre démonstration du théorème I (basée sur le lemme 2): il faut seulement remplacer partout dans cette démonstration les ensembles de 1re catégorie par les ensembles de mesure nulle et inversement.

Admettons maintenant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). La famille de toutes les fonctions de Baire (d'une variable réelle) ayant la puissance du continu, donc, d'après notre hypothèse, la puissance $\aleph_1$, on obtient tout de suite des théorèmes I et II ces corollaires:

Corollaire I: *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui est transformé par toute fonction de Baire (d'une variable réelle) en un ensemble de mesure nulle* [1]).

Corollaire II: *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui est transformé par toute fonction de Baire (d'une variable réelle) en un ensemble de 1re catégorie.*

Or, il est à remarquer que, même en admettant l'hypothèse du continu, nous ne savons pas résoudre le problème s'il existe ou non un ensemble linéaire non dénombrable qui soit transformé par toute fonction continue d'une variable réelle en un ensemble en même temps de mesure nulle et de première catégorie.

Quant à notre théorème II il est encore à remarquer qu'en modifiant un peu sa démonstration, on peut démontrer (sans admettre l'hypothèse du continu) ce

Théorème IIbis**:** *Φ étant une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions mesurables d'une variable réelle et Φ_1 étant une famille de puissance $\aleph_1$*

[1]) W. Sierpiński, *Mathematica* (Cluj 1929), p. 115.

d'ensembles linéaires parfaits, il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui est transformé par toute fonction de la famille Φ en un ensemble qui est de 1^re^ *catégorie sur tout ensemble parfait de la famille* Φ_1.

En admettant l'hypothèse du continu, on obtient du théorème $\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$ tout de suite ce

Corollaire $\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui est transformé par toute fonction mesurable d'une variable réelle en un ensemble qui est de* 1^re^ *catégorie sur tout ensemble parfait* [1]).

[1]) Cf. W. Sierpiński *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXII (1929), p. 58.

On tangents to general sets of points.

By

A. S. Besicovitch (Cambridge, England).

In this note we consider the problem of the set of points at which the tangent to a given set exists.

We deal with two definitions of the tangent: one is independent of the notion of measure; the other is based upon this notion. In either case we prove the

Theorem. *The set of points at which the tangent to a given set exists is always of finite or enumerably infinite linear measure* [1]).

First definition of tangent. *Given a plane set E and a limit point M of the set, either belonging to the set or not, we say that a line MI is the tangent to the set at the point M if to any two lines MI', MI'', however near MI and on different sides of MI, there corresponds a positive number r such that all the points of the set E which belong to the circle $c(M, r)$ (of centre M and radius r) lie in the acute angles between MI' and MI''.*

We shall first prove our theorem using this definition.

Denote by G the set of all the points of the plane at which the tangent to the set E exists. Let h be a fixed line and $\theta < \frac{\pi}{2}$. Denote by $G(\theta)$ the subset of the points of G at which the tangent to E makes with h an angle $< \frac{\theta}{2}$.

Let $G(\theta, r)$, $r > 0$, be the subset of $G(\theta)$ consisting of the points M

[1]) A set E is said to be of enumerably infinite linear measure if it can be represented as the sum of an enumerably infinite system of sets each of finite linear measure.