Sur les transformations périodiques de la surface de sphère.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Cette note contient une démonstration des théorèmes sur l'équivalence topologique entre les transformations périodiques quelconques de la surface sphérique (et du cercle) et les transformations géométriques élémentaires.

Ces théorèmes ont été établis en 1919 par M. B. von Kerékjártó [1], mais sa démonstration contient une prémisse inexacte [2]) dont la correction, bien que possible, surchargerait le raisonnement des complications secondaires peu intéressantes. Vu l'importance des théorèmes en question, il m'a semblé utile de reprendre leur démonstration par une voie qui permettrait d'éviter la prémisse critique. Le lemme fondamental [3]) sera précédé par l'analyse de la distribution des points invariants sur la surface de sphère (et de cercle), soumise à une transformation périodique.

1. Soient E un ensemble arbitraire, f une transformation *périodique* de E en lui-même par homéomorphie, $f^2, \dots, f^n, \dots$ les itérations de la fonction $f^1 = f$ et n sa période, c. à d. le plus petit entier positif tel que $f^n(x) = x$ pour tout $x \in E$. Soient enfin, pour un ensemble $X \subset E$ quelconque, $f(x)$ le transformé de X donné par f et X_f l'ensemble des points $x \in X$ qui sont invariants par rapport

[1]) *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, Math. Ann. 80, p. 36; cf. aussi L. E. J. Brouwer, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, ibid., p. 39.

[2]) Pour plus de détails voir plus loin, p. 37, remarque.

[3]) Voir plus loin, p. 38.

à cette transformation, c. à d. tels que $f(x) = x$. Ainsi p. ex. on a toujours $E_{f^n} = E = f^n(E)$; en particulier, les égalités $n = 1$ et $E = E_f$ sont donc équivalentes. En outre, $x = f^i(x)$ entraînant $f(x) = f^{i+1}(x) = f^i[f(x)]$, on a

$$E_{f^i} = f(E_{f^i}) \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Notons enfin les deux propositions suivantes:

(2) *On a pour tout* $X \subset E$ *soit l'égalité* $f(X) = X$, *soit les inégalités* $f(X) - X \neq 0 \neq X - f(X)$.

En effet, par suite de la biunivocité de f

$$f(X) \neq X \quad \textit{entraîne} \quad f^2(X) \neq f(X)$$

et

$$f(X) - X = 0 \quad \textit{entraîne} \quad f^2(X) - f(X) = 0.$$

On aurait donc par induction

$$X \neq f(X) \neq f^2(X) \neq \dots$$

et

$$f(X) - X = f^2(X) - f^1(X) = \dots = 0,$$

d'où $X \subset f^1(X) \subset f^2(X) \subset \dots$ Par conséquent $f^i(X) \neq X$, quel que soit i. Or, c'est impossible, puisqu'on a $f^n(X) = X$ par définition de n.

Ainsi $f(X) \neq X$ implique que $f(X) - X \neq 0$ et, par raison de symétrie, que $X - f(X) \neq 0$.

(3) *Si* $P = \prod_{i=1}^{n} f^i(X)$ *où* $X \subset E$ *et* C *est une composante de* P *telle que* $C \cdot f(C) \neq 0$, *alors on a* $f(C) = C$.

Il suffit évidemment de montrer que $f(C)$ est une composante de P. Or, composante se transformant par homéomorphie en composante, $f(C)$ est une composante de $f(P)$ et, par suite de la périodicité de la fonction f, on a

$$f(P) = \prod_{i=1}^{n} f^{i+1}(X) = \prod_{i=2}^{n+1} f^i(X) = P.$$

2. Désignons d'une façon générale, pour abréger le langage, par K_m la sphère topologique à m dimensions, par I_m son intérieur et par S_m sa frontière („surface"): $S_m = \mathrm{Fr}(K_m) = \mathrm{Fr}(I_m) = K_m - I_m$. Ainsi p. ex. K_1, K_2 et S_2 sont respectivement des images homéomorphes du segment rectiligne, du cercle et de la circonférence. Les mêmes signes, munis des indices identiques, sont à entendre comme s'appartenant mutuellement: p. ex. $S_2'' = \mathrm{Fr}(K_2'')$, etc.

Un arc simple situé dans E et ayant pour extrémités les points p, q sera désigné par $\overline{p, q}$. S'il passe par un point x, nous l'écrirons aussi $\overline{p, x, q}$.

Dans la suite, nous allons nous appuyer sur les propriétés suivantes de K_1, S_2 et K_2:

(4) *Si* $E = K_1$, *on a soit* $E_f = E$ *c. à d.* $n = 1$, *soit* E_f *se réduit à un seul point* $x \in I_1$ *et alors* $n = 2$.

Soit, en effet, $E = \overline{a, b}$. On a évidemment

$$f(\overline{a, x}) = \overline{f(a), f(x)} \text{ pour tout } x \in E. \tag{i}$$

En supposant donc que $a \in E_f$, c. à d. que $f(a) = a$, il vient $f(\overline{a, x}) = \overline{a, f(x)}$ pour tout $x \in E$ et, la relation

$$\overline{a, x} - \overline{a, f(x)} \neq 0 \neq \overline{a, f(x)} - \overline{a, x}$$

étant évidemment impossible pour deux arcs partiels $\overline{a, x}$ et $\overline{a, f(x)}$ de $E = \overline{a, b}$, on en conclut selon (2) que $\overline{a, x} = \overline{a, f(x)}$, d'où $x = f(x)$ et par conséquent $E_f = E$, c. à d. $n = 1$.

En supposant par contre que $f(a) \neq a$, on a simultanément

$$f(a) = b \quad \text{et} \quad f(b) = a, \tag{ii}$$

car les extrémités d'un arc sont des invariants d'homéomorphie. Or, (ii) donne $f^2(a) = a$, d'où par le raisonnement qui précède $E_{f^2} = E$, c. à d. $n = 2$. En même temps on a selon (i) et (ii) les égalités $f(\overline{a, x}) = \overline{b, x}$ et $f(\overline{b, x}) = \overline{a, x}$ pour tout $x \in E_f$, de sorte que le point $x = \overline{a, x} \cdot \overline{b, x}$ de I_1 est le seul élément de l'ensemble E_f (notoirement non vide dans le cas de $E = K_1$),

(5) *Si* $E = S_2$ *et* $n > 1$, *l'ensemble* E_f *est soit vide, soit se compose exactement de deux points et alors* $n = 2$.

Soient, en effet, $a \in E_f$, $x \in E - E_f$ et $A = \overline{x, a, f(x)}$. Il vient $f(A) = \overline{f(x), a, f^2(x)}$ de sorte que $f(x)$ est une extrémité commune des arcs A et $f(A)$, qui ont de plus le point $a \neq x$ en commun.

Extrémité se transformant par homéomorphie en extrémité, on a donc l'une ou l'autre des relations $A \subset f(A)$ et $f(A) \subset A$, d'où selon (2)

$$f(A) = A \tag{iii}$$

et par conséquent $x = f^2(x)$, c. à d. $x \in E_{f^2}$. Or, x étant un point arbitraire de $E - E_f$, il vient $E - E_f \subset E_{f^2}$, d'où $E \subset E_{f^2}$, c. à d. $n = 2$.

D'autre part, (iii) implique que pour l'arc $\overline{E - A}$ on a aussi $f(\overline{E - A}) = \overline{E - A}$, d'où l'existence au moins d'un point $b \in (\overline{E - A})_f$ et encore $b \neq a$, car $a \in A - \overline{E - A}$. Or, en posant $A' = \overline{a, x, b}$ et $A'' = \overline{a, f(x), b}$, on a évidemment $f(A') = A''$ et $f(A'') = A'$, de sorte que E_f ne contient alors que deux points, à savoir les points a et b, qui forment l'ensemble $A' \cdot f(A') = A'' \cdot f(A'') = A' \cdot A''$.

3. Lemme 1. *Etant donnée sur un* S_3 *une suite finie de cercles topologiques* $K_2', K_2'', \ldots, K_2^{(j)}$ *tels que* $S_2 - \sum_{i=1}^{j} K_2^{(i)} \neq 0$, *la fermeture d'une composante quelconque* C *du produit de leurs intérieurs* $P = \prod_{i=1}^{j} I_2^{(i)}$ *est un cercle topologique et on a* $\mathrm{Fr}(C) \subset \sum_{i=1}^{j} S_2^{(i)}$.

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons nous appuyer sur la conséquence suivante du théorème de J o r d a n:

(6) *Si* $K_2' \subset K_2 \subset S_3$ *et* $K_1 \subset S_2 \cdot S_2$, *alors on a* $K_1 - \mathrm{Fr}(C) \neq 0$, *quel que soit l'ensemble* $C \subset K_2 - K_2'$ [1]).

Remarquons d'abord que l'on a en effet

$$\mathrm{Fr}(C) \subset \mathrm{Fr}(P) \subset \sum_{i=1}^{j} S_2^{(i)}\ {}^{2)}. \tag{i}$$

Pour prouver que $\overline{C}$ est un K_2, nous allons montrer que $\overline{C}$ est localement connexe, qu'il n'est divisé [3]) par aucun point et qu'il ne divise pas S_3 [4]).

[1]) En effet, A désignant une composante quelconque de $S_2 - S_2'$, la courbe $\theta = S_2' + A$, comme composée de 3 arcs coextrémaux et *indépendants* (c. à d. sans points intérieurs communs) coupe S_3 en trois régions et *chacun de ces arcs n'est contenu que dans les frontières de deux régions en question.* En particulier K_1, comme contenu dans la frontière de I_2' et dans celle d'une région extérieure à $K_2 \supset I_2'$, ne peut donc être contenu dans la frontière d'aucun ensemble $C \subset K_2 - K_2'$, ce dernier étant situé par définition en dehors des deux régions précédentes.

[2]) en vertu de la formule générale $\mathrm{Fr}(X \cdot Y) \subset \mathrm{Fr}(X) + \mathrm{Fr}(Y)$; cf. C. K u r a t o w s k i, *Topologie I*, Monogr. Matem., Varsovie 1933, p. 24, formule 9.

[3]) Pour les notions de *coupure* et de *division* et pour leur équivalence dans les continus localement connexes voir C. Z a r a n k i e w i c z, Fundam. Math. IX, p. 124 et 136.

[4]) Pour la suffisance de ces conditions, voir C. K u r a t o w s k i, Fund. Math. XIII, p. 310.

Or, C étant par définition une région de S_3 et l'ensemble $\mathrm{Fr}(C)$ étant d'après (i) localement connexe, l'ensemble $\overline{C} = C + \mathrm{Fr}(C)$ est évidemment aussi localement connexe.

D'autre part, $C - \{y\}$ [1]) étant un ensemble connexe quel que soit y, il en est de-même de l'ensemble $\overline{C} - \{y\}$, car $C - \{y\} \subset \subset \overline{C} - \{y\} \subset \overline{C - \{y\}} = \overline{C}$.

Enfin, supposons que C divise S_3. Comme $\overline{C} \subset \sum_{i=1}^{j} K_2^{(i)}$ et par suite $S_3 - \sum_{i=1}^{j} K_2^{(i)} \subset S_3 - \overline{C}$, il existe une composante Q de $S_3 - \overline{C}$ telle que $Q - \sum_{i=1}^{j} K_2^{(i)} \neq 0$. Or, aucun $K_2^{(i)}$ ne divisant S_3, chaque $K_2^{(i)}$ contient donc toute composante de $S_3 - \overline{C}$ distincte de Q. En désignant par R une telle composante, sa frontière $\mathrm{Fr}(R)$ serait une coupure irréductible [2]) et, en raison de sa connexité locale, une circonférence topologique [3]). L'ensemble $\overline{R} = R + \mathrm{Fr}(R)$ serait ainsi un cercle topologique et comme

(ii) $$\mathrm{Fr}(R) \subset \mathrm{Fr}(C),$$

il existerait en vertu de (i) un i tel que $\mathrm{Fr}(R) \cdot S_2^{(i)}$ renferme un arc. En le désignant par K_1, on aurait donc selon (ii) $K_1 \subset \mathrm{Fr}(C)$. Or, c'est impossible, car en posant dans (6) $K_2 = K_2^{(i)}$ et $K_2' = \overline{R}$, on obtient $K_1 - \mathrm{Fr}(C) \neq 0$.

Lemme 2. *Soient $E = K_2$, $a \in E_f \cdot S_2$, $b \in E_f \cdot S_2$, $a \neq b$ et $A = \overline{x, y}$ un arc arbitraire tel que $A \cdot S_2 = \{x, y\}$ et qui coupe E entre a et b. Il existe alors dans $\sum_{i=1}^{n} f^i(A)$ un arc L dont les extrémités sont situées sur S_2 et tel que $f(L) = L$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit g l'homéomorphie entre E et le cercle (géométrique). Prolongeons sur ce cercle $g(E)$ la fonction f, en posant $fg(x) = gf(x)$ pour $x \in E$. Formons de $E + g(E)$ un S_2 par l'*identification* des points x et $g(x)$ pour $x \in S_2$. La courbe

[1]) Ce symbole désigne ici d'une manière générale l'ensemble des éléments situés entre crochets $\{\ \}$.

[2]) cf. C. Kuratowski, Fundam. Math. VI, p. 133, lemme.

[3]) C. Kuratowski, l. c., p. 139, th. VII.

$S_2' = A + g(A)$ coupe S_2 évidemment entre a et b. Désignons par I_2' celle des deux composantes de $S_3 - S_2'$ qui contient le point a et, enfin, par I_2'' la composante de l'ensemble $P = \prod_{i=1}^{n} f^i(I_2')$ contenant ce point. Une telle composante existe en effet, puisque la relation $a \in I_2'$ et l'hypothèse $a \in E_f$ entraînent $a \in f^i(I_2')$ pour $i = 1, 2, \ldots,$ et sa fermeture est bien un cercle topologique, à savoir en vertu du lemme 1, puisque l'ensemble $S_3 - \sum_{i=1}^{n} f^i(I_2')$ n'est pas vide (il contient b). D'après le même lemme on a

(iii) $$S_2'' \subset \sum_{i=1}^{n} f^i(S_2).$$

Or, comme $a \in E_f \cdot I_2''$, on a $I_2'' \cdot f(I_2'') \neq 0$, d'où selon (3) $f(I_2'') = I_2''$ et par conséquent

(iv) $$f(S_2'') = S_2''.$$

L'ensemble $S_2'' \cdot E$ étant une coupure de E entre a et b (puisque S_2'' en est une de S_3 entre $a \in I_2''$ et b *non*-$\in \overline{I_2''}$), il existe un arc $L \subset S_2'' \cdot E$ qui coupe E. D'autre part, $L \subset S_2''$ entraîne $g(L) \subset S_2''$: en effet, la symétrie de la structure de S_2', donnée par la définition de cette courbe, entraîne facilement la symétrie de I_2', de I_2'' et enfin celle de S_2''.

On a ainsi $L + g(L) \subset S_2''$. Or, l'arc L étant une coupure (de $E = K_2$), l'ensemble $L \cdot S_2 = g(L) \cdot S_2 = L \cdot g(L)$ est, comme on sait, composé d'au moins deux points, de sorte que la somme $L + g(L)$ contient une courbe simple fermée (circonférence topologique). Par conséquent $L + g(L) = S_2''$. Il en résulte que $L = S_2'' \cdot E$, ce qui implique d'une part que les extrémités de L sont situées sur S_2 et d'autre part, en vertu de (iv), que $f(L) = f(S_2'') \cdot f(E) = S_2'' \cdot E = L$. Enfin, on a d'après (iii) $L \subset \sum_{i=1}^{n} f^i(S_2') \cdot E = \sum_{i=1}^{n} f^i(A)$, c. q. f. d.

Ces lemmes établis, on démontre aisément les propositions suivantes:

(7) *Si $E = K_2$ et $S_2 \subset E_f$, on a $n = 1$.*

En effet, étant donné un arc quelconque $A = x, p, y$ tel que

(v) $$A \cdot S_2 = \{x, y\},$$

il existe en vertu du lemme 2 un arc

(vi) $$L \subset \sum_{i=1}^{n} f^i(A)$$

tel que

(vii) *les extrémités de L appartiennent à S_2*

et que $f(L) = L$. La dernière égalité implique (en posant dans (4) $E = L$) que $L \subset E_f$, d'où selon (vi) $L \subset A$. On en conclut en vertu de (v) et (vii) que $L = A$, d'où $p \in E_f$ et par conséquent, le point p étant arbitraire, $E = E_f$.

(8) *Si $E = S_2$, il existe pour tout $x \in E_f$ un K_2 aussi petit qu'on le veut, contenant x dans son intérieur et tel que $f(K_2) = K_2$.*

En effet, entourons x d'un K_2' arbitraire et assez petit pour que

$$S_2 - \sum_{i=1}^{n} f^i(K_2') \neq 0.$$

Désignons par K_2 la fermeture de celle des composantes de l'ensemble $P = \prod_{i=1}^{n} f^i(I_2')$ qui contient ce point invariant (et qui est bien un cercle topologique en vertu du lemme 1). Il vient d'après (3) $f(K_2) = K_2$ et en même temps x est un point intérieur de K_2, puisqu'il l'est de K_2', donc de $f^i(K_2')$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

Remarque. C'est la supposition qu'*en faisant varier K_2' d'une façon continue, K_2 varie également d'une façon continue* qui constitue la prémisse critique de la démonstration de M. Kérékjártó[1]). L'exemple suivant montre que cette supposition n'est pas exacte.

Soient E le cercle de rayon 2 et de centre $x = (0, 0)$, K_2' le cercle topologique situé dans E et borné par les arcs

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y \geqslant 0,$$
$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4} \qquad y \leqslant 0,$$
$$(x \pm \tfrac{3}{4})^2 + y^2 = \tfrac{1}{16} \qquad y \leqslant 0$$

et f la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (de sorte que $n = 2$). L'ensemble K_2 est alors le cercle $x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

Or, pour chaque cercle topologique $\overset{*}{K_2'}$ contenant K_2' dans son intérieur, $\overset{*}{K_2}$ contient déjà les deux cercles $(x \pm \frac{3}{4})^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{16}$ (de sorte que ces derniers ne se trouvent pas *couverts* par la famille des courbes $\overset{*}{S_2}$).

On peut montrer que *lorsque K_2' varie d'une façon continue, K_2 varie d'une façon semi-continue inférieurement.*

(9) *Si $E = S_2$ et $n > 1$, tout sous-continu de l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} E_{f^i}$ est localement connexe.*

[1]) „Dem Büschel der konzentrischen Kreise $\varkappa_0$ entspricht der ***die Kreisfläche bedeckende*** Büschel der einander nicht treffenden invarianten Jordanschen Kurven $\gamma, \dots$" (cf. l. cit., p. 36).

Pour l'établir, nous commencerons par montrer que

(viii) *l'ensemble E_{f^i} est pour tout $i = 1, 2, \dots, n-1$ composé de points d'ordre $\leqslant 2$* [1]).

Considérons à ce but un point quelconque x de E_{f^i} et entourons le d'un K_2 satisfaisant aux conditions de la proposition (8).

Or, si l'ensemble $S_2 \cdot E_{f^i}$ contenait plus de deux points, on aurait en vertu de (5) $S_2 \subset E_{f^i}$, d'où selon (7) $K_2 \subset E_{f^i}$ et $\overline{E - K_2} \subset E_{f^i}$, c. à d. $E = E_{f^i}$, contrairement à l'hypothèse que $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Ainsi

(ix) *la condition $f^i(K_2) = K_2$ implique que l'ensemble $S_2 \cdot E_{f^i}$ se compose de $\leqslant 2$ points,*

de sorte que la propriété (viii) de E_{f^i} se trouve démontrée.

Il en résulte que tout sous-continu de E_{f^i} est un K_1 ou un S_2 [2]). Considérons donc un K_1 situé sur E_{f^i} et entourons en un point intérieur quelconque d'un K_2 tel que $f(K_2) = K_2$ et que, conformément à (ix), l'ensemble $S_2 \cdot K_1$ se compose exactement de deux points. K_2 est alors décomposé par K_1 en deux cercles topologiques K_2' et K_2'' et, f^i étant une homéomorphie, $f^i(K_2')$ coïncide soit avec K_2', soit avec K_2''. Mais le premier cas est impossible, car on aurait alors selon (5) $S_2' \subset E_{f^i}$, d'où selon (7) $K_2' \subset E_{f^i}$, contrairement à (viii). On a donc nécessairement $f^i(K_2') = K_2''$, de sorte que $K_2 \cdot E_{f^i} - K_1 = 0$.

Cette égalité prouve immédiatement que K_1 n'est pas un continu de condensation de E_{f^i}, donc non plus de la somme finie $\sum_{i=1}^{n-1} E_{f^i}$. Comme ensemble fermé dépourvu des continus de condensation, cette somme ne renferme donc que des continus localement connexes [3]), c. q. f. d.

Lemme 3. *Si $E = S_2$ et l'ensemble $T = \sum_{i=1}^{n-1} E_{f^i}$ ne coupe pas E entre deux points a et b de E_f, il existe un arc $A = \overline{a, b}$ tel que l'on a $A \cdot f^i(A) = \{a, b\}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$.*

D é m o n s t r a t i o n. Désignons d'une façon générale par $f^*(E)$ l'espace abstrait, dont les éléments s'obtiennent des $x \in E$ par l'iden-

[1]) au sens de K. M e n g e r, *Kurventheorie*, Berlin-Leipzig 1932, p. 96—97.
[2]) ibidem, p. 267.
[3]) ibidem, p. 241.

tification des points $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$. Cette opération transforme E en $f^*(E)$ d'une façon continue et même *localement homéomorphe* dans les points $x \in E - T$, c. à d. que tout ensemble ouvert G contenant x et satisfaisant à l'égalité $G \cdot f^i(G) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ se transforme en $f^*(G)$ par homéomorphie [1]).

Or, par hypothèse l'ensemble $E - T$ contient un $L = \overline{a, b}$; par suite le continu localement connexe $f^*(L)$ contient un arc $\overline{f^*(a), f^*(b)}$ et on a $f^*(a) \neq f^*(b)$, puisque a et b appartiennent à E_f. Soit M le *modèle* de cet arc (dans E), c. à d. l'ensemble de tous les points $x \in E$ tels que $f^*(x) \in \overline{f^*(a), f^*(b)}$. On a en conséquence $f^*(M) \subset f^*(L)$, donc $M \subset \sum_{i=1}^{n-1} f^i(L) \subset \sum_{i=1}^{n-1} f^i(E - T) + \{a, b\} = (E - T) + \{a, b\}$, car on a selon (1) $f(T) = T$, d'où $f^i(E - T) = E - T$. Abstraction faite des extrémités a et b, l'ensemble M se trouve donc transformé en arc $f^*(M) = \overline{f^*(a), f^*(b)}$ par homéomorphie locale. Il en résulte que M est composé exactement de n arcs coextrémaux *indépendants* (c. à d. sans points intérieurs communs): $A, f(A), f^2(A), \dots, f^{n-1}(A)$, c. q. f. d.

4. La somme des n arcs coextrémaux indépendants $A, f(A), \dots, f^{n-1}(A)$ divise S_2 en n régions $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$ que nous supposerons une fois pour toutes numérotées comme il suit: soient $A = A_0$ et R_0 une des deux régions dont la frontière contient A_0 (c'est d'ailleurs le seul „choix" à faire: il détermine tout le reste); soient A_1 l'*autre* arc de $\mathrm{Fr}(R_0)$ et R_1 l'*autre* région dont la frontière contient A_1, et ainsi de suite. Evidemment, on peut avoir $f^i(A) \neq A_i$, mais on a en tout cas $\mathrm{Fr}(R_j) = A_j + A_{j+1}$, les indices étant à entendre comme réduits mod. (n). Or,

(10) *Si* $f(A) = A_k$, *on a* $f^i(A) = A_{ik}$ *pour* $i = 1, 2, \dots$

Il suffit, en effet, de l'établir pour $i = 2$, pour pouvoir appliquer l'induction. On a évidemment $A + f(A) = \mathrm{Fr}(D)$ où

(i) $D = \overline{R_0 + R_1 + \dots + R_{k-1}} = A_0 + R_0 + A_1 + \dots + R_{k-1} + A_k$.

Par conséquent

(ii) $\mathrm{Fr}[f(D)] = f[\mathrm{Fr}(D)] = f(A) + f^2(A)$,

de sorte que $A_k \subset \mathrm{Fr}(D) \cdot \mathrm{Fr}[f(D)]$. Il en résulte par homéomorphie qu'on a:

[1]) C'est précisément l'ensemble $f^*(E)$ („Modulfläche") dont se sert M. L. E. J. Brouwer, l. cit., sans y établir toutefois qu'il est légitime d'appliquer ces raisonnements à cette „surface".

soit $f(D) = A_k + R_k + A_{k+1} + R_{k+1} + \dots + R_{2k-1} + A_{2k}$,

soit $f(D) = A_k + R_{k-1} + A_{k-1} + R_{k-2} + \dots + R_0 + A_0$,

d'où on tire en vertu de (i) et (ii) soit $f^2(A) = A_{2k}$, soit $f^2(A) = A_0 = A$, c. à d. que $2 = n$ et par conséquent $f(A) = A_1$, d'où $k = 1$ et finalement $f^2(A) = A_{2k}$.

La proposition (10) nous permet de simplifier les raisonnements ultérieurs par l'emploi d'une itération particulière de f, qui sera désignée par φ et que nous allons définir à présent.

Etant donné l'indice j tel que $A_1 = f^j(A)$, on a notamment d'après (10) $jk \equiv 1 \bmod (n)$, d'où $ijk \equiv 1 \bmod (n)$ pour tout i et par conséquent $A_i = f^{ij}(A) = f^{ij}(A_0)$.

Posons:

(11) $$f^j = \varphi.$$

Il vient (et c'est une propriété bien avantageuse vis à vis de f):

(12) $$\varphi^i(A) = A_i \quad pour\ tout\ i = 1, 2, \dots$$

et d'autre part $\varphi^k(A) = A_k = f(A)$, de sorte que l'on a, réciproquement à (11):

(13) $$\varphi^k = f.$$

Enfin, on a soit

(14) $$\varphi(R_i) = R_{i+1},$$

soit

(15) $$\varphi(R_i) = R_i = f(R_i) \quad et\ alors\ n = 2.$$

En effet, les régions $\varphi(R_i)$ et R_{i+1} ont par définition la frontière commune $\mathrm{Fr}[\varphi(R_i)] = \varphi[\mathrm{Fr}(R_i)] = \varphi(A_i + A_{i+1}) = A_{i+1} + A_{i+2} = \mathrm{Fr}(R_{i+1})$ — cf. (12) — de sorte qu'on a soit (14), soit $\varphi(R_i) \neq R_{i+1}$ et $\overline{\varphi(R_i)} + \overline{R_{i+1}} = S_2$, d'où $n = 2$ et $\varphi(R_i) = R_i$, c. à d. (15).

Pour résumer donc ce qui vient d'être établi sur le faisceau de n arcs coextrémaux indépendants $A, f(A), \dots, f^{n-1}(A)$, on peut dire: *l'existence d'un* $A = \overline{a, b}$ *assujetti à la condition*

(16) $$A \cdot f^i(A) = \{a, b\} \quad pour\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

entraîne l'existence de la transformation périodique φ *satisfaisant à l'alternative* (14)—(15).

5. Lemme fondamental. *Si $E = S_2$, il y a exactement quatre cas qui peuvent se présenter:*

1^0 $E_f = 0$, 2^0 $E_f = E$,

3^0 *E_f est un S_1 et alors $n = 2$*

4^0 *E_f se compose de deux points a et b qui se laissent unir par un arc A conforme à la condition* (16) *et tel que seule l'alternative* (14) *se trouve réalisée.*

Démonstration. Considérons, contrairement à 1^0, un point $a \epsilon E_f$. Il existe dans E selon (8) un K_2 autour de a tel que $f(K_2) = K_2$ et par conséquent que $f(\overline{E - K_2}) = \overline{E - K_2}$; il existe donc un point invariant $b \neq a$, notamment sur le cercle topologique $\overline{E - K_2}$.

Envisageons d'abord le cas où l'ensemble $T = \sum_{i=1}^{n-1} E_{f^i}$ coupe E entre a et b. Soit S_2' une coupure irréductible arbitraire de E entre a et b située dans T; en vertu du lemme 3 elle est bien une courbe simple fermée. Posons $a \epsilon I_2'$ et désignons par I_2'' la composante de $P = \prod_{i=1}^{n} f^i(I_2')$ qui contient a. Alors $b \epsilon E - \sum_{i=1}^{n} f^i(K_2')$. En posant donc $C = I_2''$ dans le lemme 1, on en conclut que K_2'' est en effet un cercle topologique et que

$$\text{(i)} \qquad S_2'' = \mathrm{Fr}\,(K_2'') \subset \sum_{i=1}^{n-1} f^i(S_2') \subset T.$$

D'autre part, on a selon (3) $f(I_2'') = I_2''$, donc $f(S_2'') = S_2''$, de sorte qu'il existe selon (i) un i tel que $S_2'' \cdot E_{f^i}$ contient plus de deux points. On a donc selon (5) $S_2'' \subset E_{f^i}$, ce qui donne d'après (7) $K_2'' \subset E_{f^i}$ et par conséquent aussi $\overline{E - K_2''} \subset E_{f^i}$. Finalement, on a donc $E \subset E_{f^i}$, d'où $i = n = 1$, de sorte qu'on se trouve alors dans le cas 2^0.

Envisageons à son tour le cas où T ne coupe pas E entre a et b. En vertu du lemme 3 il existe alors un arc A satisfaisant à la condition (16) et par conséquent à l'alternative (14)—(15) qu'elle implique. Or, si on a (14), on est en présence du cas 4^0.

Reste donc à montrer que (15), c. à d. les égalités $f(R_0) = R_0$, $f(R_1) = R_1$ et $n = 2$, entraînent 3^0. En vertu de (7) il suffit à ce but d'établir dans E_f l'existence d'une courbe simple fermée, ce qui revient en vertu de (9) à prouver que E_f est une coupure de S_2 [1]), en particulier, que E_f coupe E entre $A - f(A)$ et $f(A) - A$, à savoir que tout arc $\Lambda = \overline{x, y}$ où $x \epsilon A - f(A)$, $y \epsilon f(A) - A$ et $\Lambda - \{x, y\} \subset R_0$ passe par E_f. Or, en vertu du lemme 2 (en y substituant Λ à A), il existe un arc $L = f(L) \subset \sum_{i=1}^{n-1} f^i(\Lambda)$, d'où $L \cdot E_f \neq 0$ et $L \cdot E_f \subset \Lambda$ et par conséquent $\Lambda \cdot E_f \neq 0$, c. q. f. d.

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. VI, p. 139, th. VII.

6. Deux fonctions f et f_1 qui transforment respectivement deux espaces E et E_1 en leurs sous-ensembles seront appelées *topologiquement équivalentes*, s'il existe une homéomorphie h transformant E en E_1 et telle que l'on ait $f_1 h(x) = h f(x)$ *pour tout* $x \epsilon E$.

Théorème 1. *Si $E = S_2$ et $E_f \neq 0$, la transformation f équivaut topologiquement soit à la symétrie par rapport à l'équateur soit à une rotation* [1]).

Démonstration. Conservons les notations du lemme fondamental et considérons tour à tour les quatre cas possibles. Le cas 1^0 étant exclu par hypothèse et le cas 2^0 étant trivial (puisque l'identité est une rotation d'angle 0), il ne reste à envisager que le cas 3^0 et 4^0.

Admettons d'abord, conformément à 3^0, que $E_f = S_1$ et $n = 2$. Désignons par R' et R'' les composantes de $E - E_f$, par h l'homéomorphie qui transforme R' en surface (géométrique) de l'hemisphère supérieure et par σ la symétrie par rapport à l'équateur. Prolongeons h, en posant

$$\text{(i)} \qquad h(x) = \sigma h f(x) \quad \textit{pour } x \epsilon R''.$$

En vertu de (7) on a alors $f(R') = R''$ et $f(R'') = R'$; d'autre part, comme $\sigma = \sigma^{-1}$, on tire de (i) $\sigma h(x) = h f(x)$ pour $x \epsilon E$, c. à d. l'équivalence topologique entre f et σ.

Passons enfin au cas 4^0. Soient E_1 la surface de sphère, ϱ sa rotation positive d'angle ${}^{2\pi}/_n$ et h l'homéomorphie transformant l'arc A de E en une demi-circonférence $h(A)$ unissant les pôles de cette rotation (p. ex. en méridien de longitude 0). Prolongeons h d'abord sur l'arc $\varphi(A)$, en posant $h(x) = \varrho h \varphi^{-1}(x)$ pour $x \epsilon \varphi(A)$, de sorte

[1]) Si $E_f = 0$, la transformation f équivaut topologiquement, comme l'a démontré M. Kérékjárto, l. cit., à une rotation combinée avec symétrie („Drehspiegelung"); sa démonstration fait intervenir le th. 1, qui vient d'être énoncé (cf. ibidem p. 37, b)).

que $h\,\varphi(A) = \varrho\, h(A)$, et ensuite sur la région R_0 de E de façon que $h(R_0)$ soit celle des régions déterminées par $h(A) + \sigma\, h(A)$ sur E_1 qui contient les points de longitude $\pi/_n$; enfin, prolongeons h sur $E - \overline{R_0}$, en posant

$$h(x) = \varrho^i\, h\, \varphi^{-1}(x) \quad pour\ x \,\epsilon\, \varphi^i(\overline{R_0}).$$

On vérifie immédiatement que la fonction h ainsi définie transforme en effet E en E_1 par homéomorphie et que l'on a $\varrho^i\, h(x) = h\,\varphi^i(x)$ pour $x \,\epsilon\, E$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots$ D'après (13) on en conclut que $\varrho^k h(x) = h f(x)$, c. à d. l'équivalence topologique entre la transformation f et la rotation ϱ^k.

Théorème 2. *Si $E = K_2$, la transformation f équivaut topologiquement soit à la symétrie par rapport au diamètre soit à une rotation.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons réduire ce th. au précédent. Pour $E = K_2$ on a notoirement $E_f \neq 0$ et, comme précédemment, on peut admettre d'emblée que $E \neq E_f$. Deux cas peuvent se présenter:

1) $E_f \cdot S_2 \neq 0$, d'où en vertu de (5) $S_2 \subset E_{f^2}$ et l'ensemble $E_f \cdot S_2$ se compose de deux points (l'autre alternative, à savoir $S_2 \subset E_f$, est exclue, car elle donnerait en raison de (7) l'égalité $E = E_f$). Soient $E_f \cdot S_2 = \{a, b\}$ et g la fonction transformant E en un $S_3 = g(E)$ par *l'identification* des points x et $f(x)$ sur S_2 et par *l'homéomorphie* partout ailleurs. La fonction $f^*[g(x)] = g f(x)$, définie pour $g(x) \,\epsilon\, S_3$, est évidemment une transformation périodique de S_3 en soi et l'arc $g(S_2) = \overline{g(a), g(b)}$ est situé par définition dans l'ensemble $[g(E)]_{f^*}$. En vertu du lemme fondamental l'ensemble $[g(E)]_{f^*}$ est une courbe simple fermée et $n = 2$. L'arc $L = \overline{[g(E)]_{f^*} - g(S_2)}$ admet donc aussi les points $g(a)$ et $g(b)$ comme extrémités et il est aussi composé de points invariants.

Or, $L = \overline{[g(E)]_{f^*} - g(S_2)} = \overline{[g(E)]_{f^*} - [g(S_2)]_{f^*}} = \overline{[g(E - S_2)]_{f^*}} = g[\overline{(E - S_2)_f}] = g[\overline{(E - S_2)_f}] = g[E_f]$, de sorte que le modèle de L dans E, c. à d. *l'arc $K_1 = \overline{a, b}$ tel que $L = g(K_1)$, coïncide avec E_f.*

Ceci établi, le raisonnement aboutit tout comme dans la démonstration du th. 1 à la conclusion que f équivaut topologiquement à la symétrie par rapport au diamètre.

2) $E_f \cdot S_2 = 0$. Complétons E à une surface sphérique S_3 par le procédé employé au début de la démonstration du lemme 2 (p. 32)

et dont nous allons conserver ici les notations. Il vient $S_3 = E + g(E)$ et comme

$$\text{(ii)} \qquad E \neq E_f \neq 0,$$

on a

$$\text{(iii)} \qquad g(E) \neq [g(E)]_f \neq 0,$$

d'où $S_3 \neq [S_3]_f \neq 0$, de sorte que les cas 1° et 2° du lemme fondamental sont impossibles. Or, (ii) et (iii) entraînent $[S_3]_f \cdot E \neq 0 \neq [S_3]_f \cdot g(E)$ et l'hypothèse $E_f \cdot S_2 = 0$ entraîne $[g(E)]_f \cdot S_2 = 0$, d'où $[S_3]_f \cdot S_2 = 0$. Par conséquent l'ensemble $[S_3]_f$ n'est pas connexe. On se trouve donc dans le cas 4° du lemme précité, c. à d. qu'il existe deux points $a = E \cdot [S_3]_f$ et $b = g(E) \cdot [S_3]_f$ et un arc $A^* = \overline{a, b}$ satisfaisant à la condition (16) et tel que seule l'alternative (14) est réalisée. La composante A de $A^* \cdot E$ qui contient a est donc un arc simple qui unit a à un point de S_2 et, par analogie à (16), on a $A \cdot f^i(A) = \{a\}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$; enfin, la relation (14) subsiste pour A.

Dans ces conditions, l'équivalence topologique entre f et une rotation s'obtient par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui achève la démonstration du th. 1.

Remarques. On pourrait également, comme il est facile d'apercevoir, suivre une voie en quelque sorte inverse et ramener le cas de S_2 (th. 1) à celui de K_2 (th. 2). Cependant la réduction s'opère alors d'une façon un peu moins simple.

Il serait intéressant d'examiner si les théorèmes qui précèdent restent valables pour les dimensions supérieures. On a en particulier, tout comme dans la proposition (7), que pour tout $m = 1, 2, \ldots$ les hypothèses $E = K_m$ et $S_m \subset E_f$ entraînent $n = 1$. C'est une conséquence immédiate d'un théorème de M. A. H. N e w m a n (*A theorem on periodic transformations of spaces*, Quart. Journ. Math. Oxford Ser., vol. 2, 1931, p. 6, Th. 2), en posant $f(x) = x$ dans le domaine D extérieur à K_m.

Varsovie, 1932.