Über einen topologischen Satz von A. Ostrowski.

Von

Stefan Straszewicz (Warszawa).

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung [1]) gibt Herr A. Ostrowski eine vom Standpunkte der modernen Präzision notwendige Vervollständigung des ersten Gauss'schen Beweises des Fundamentalsatzes der Algebra, indem er einen Satz über die Menge der Nullstellen einer reellen stetigen Funktion der komplexen Veränderlichen z beweist, der als topologischer Kern des Gauss'schen Beweises erscheint.

Verwendet man einige grundlegende Begriffe und Sätze, die sich auf Schnitte in der Ebene beziehen, so lässt sich der betreffende Satz auf eine sehr einfache Weise begründen. Dies soll im Folgenden mitgeteilt werden.

Die erwähnten Hilfsmittel können wie folgt zusammengefasst werden.

Versteht man unter einem ebenen Bereiche die Summe einer einfachen geschlossenen Kurve und eines von ihr bestimmten Gebietes so sagen wir, die abgeschlossene Menge M ist ein Schnitt im Bereiche K zwischen den Punkten a und b von K, oder sie trennt a und b in K, wenn $K-M$ keinen einfachen Bogen (Weg) mit den Endpunkten a und b enthält. M trennt die beiden Mengen $A\subset K$ und $B\subset K$, falls sie jeden Punkt $a \epsilon A$ von jedem Punkte $b \epsilon B$ trennt. Die Eigenschaft einer abgeschlossenen Menge ein Schnitt zwischen a und b in K zu sein, ist induzibel d. h. wenn sie jeder Menge einer absteigenden Folge von abgeschlossenen Mengen zukommt, so kommt sie auch deren Durchschnitte zu. Folglich enthält

[1]) A. Ostrowski. Über Nullstellen stetiger Funktionen zweier Variabeln. *Crelle's Journal* 170 (1933) S. 83—94.

ein Schnitt M zwischen a und b in K nach dem Brouwer'schen Reduktionssatze [2]) stets einen irreduziblen Schnitt zwischen a und b in K, d. h. einen solchen, dessen keine echte Teilmenge diese Eigenschaft besitzt.

Eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge, die ein irreduzibler Schnitt zwischen zwei Punkten eines Bereiches ist, ist ein Kontinuum [3]).

Dem zu beweisenden Satze kann folgender Wortlaut gegeben werden:

Es seien:

1⁰. *C eine einfache geschlossene Kurve in der Ebene; der Bereich bestehend aus C und dem Inneren von C heisse K;*

2⁰. *$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ Punkte auf C in einem Umlaufungssinne von C numeriert; die von diesen Punkten bestimmten offenen Intervalle von C heissen $I_1, I_2, \dots, I_{2n}$, wobei I_ϱ den Punkt a_ϱ als Endpunkt hat;*

3⁰. *M eine abgeschlossene Teilmenge von K die jedes Intervall $I_{2\mu}$ von jedem Intervall $I_{2\nu-1}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$ trennt.*

Dann lassen sich die Punkte $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ in n fremde Paare (a_α, a_β) mit $\alpha \not\equiv \beta$ (mod. 2) derart einteilen, dass die Punkte desselben Paares einem Teilkontinuum von M angehören.

Beweis. Wir führen zunächst (wie dies auch Herr Ostrowski tut) den Satz auf den Fall zurück, wo die Intervalle I_ϱ mit M fremd sind. Es genügt zu diesem Zwecke C durch eine andere geschlossene Jordancurve C^* zu ersetzen, welche durch die Punkte $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ geht und die Intervalle $I_1, I_2, \dots, I_{2n}$ im Innern enthält. Dann erfüllen $C^*, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ und M die Voraussetzungen des Satzes. Es sind dann nämlich je zwei Intervalle $I^*_{2\mu}$ und $I^*_{2\nu-1}$ durch M in K^* getrennt. Denn wären $I^*_{2\mu}$ und $I^*_{2\nu-1}$ in K^*-M verbindbar, so wären es ersichtlich auch $I_{2\mu}$ und $I_{2\nu-1}$ in $K-M$.

Es sei also für das weitere $M \cdot I_\varrho = 0$ $(\varrho = 1, 2, \dots, 2n)$ angenommen.

Beim Beweise wird vollständige Induktion angewandt.

1) $n=1$. Man nehme beliebig $p \epsilon I_1$ und $q \epsilon I_2$ an. Die abgeschlossene und beschränkte Menge M enthält einen irreduziblen

[2]) Brouwer. *Proc. Acad. Amsterdam* 14 (1911), vgl. Menger *Kurventheorie* 1932, S. 57.

[3]) Vgl. Straszewicz. *Fundamenta Math.* 7 (1925) S. 163.

Schnitt S zwischen p und q in K. Die Menge S ist ein Kontinuum; sie muss ferner sowohl a_1 als a_2 enthalten, weil sonst p mit q in $K - S$ durch einen Teilbogen von C verbindbar wäre. Damit ist der Satz für $n = 1$ bewiesen.

2) $n > 1$. Wir nehmen die Richtigkeit des Satzes für alle $n_1 < n$ an. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Unter den Intervallen I_ϱ gibt es solche, die durch M in K nicht getrennt werden. Es gibt also einen Weg, der zwei Punkte verschiedener Intervalle in $K - M$ verbindet. Dieser Weg enthält sicher ein Stück L, das ebenfalls zwei Punkte p und q verschiedener Intervalle verbindet und abgesehen von diesen Endpunkten im Inneren von C liegt. Die Indices der betreffenden Intervalle sind notwendig mod. 2 kongruent, es sei etwa $p \epsilon I_1$ und $q \epsilon I_{2k+1}$ $(0 < k < n)$, L zerlegt K in zwei Bereiche K_1 und K_2, deren Ränder L als gemeinsamen Teil haben und C_1, C_2 heissen mögen. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass C_1 die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ und C_2 die Punkte $a_{2k+1}, a_{2k+2}, \ldots, a_{2n}$ enthält. Gleichzeitig wird M in $M_1 = MK_1$ und $M_2 = MK_2$ zerlegt. Wie unmittelbar zu sehen ist, erfüllen sowohl C_1, $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$, M_1, als auch C_2. $a_{2k+1}, a_{2k+2}, \ldots, a_{2n}$, M_2 die Voraussetzungen des Satzes. Es genügt zu bemerken, dass kein Punkt von L mit keinem Punkte der Intervalle I_2, I_4, I_{2k} in $K_1 - M_1$ verbindbar ist, da dies sonst auch für eines dieser Intervalle und I_1 entgegen der Voraussetzung gelten würde. Entsprechendes gilt für $I_{2k+2}, \ldots, I_{2n}$ und L in K_2. Es ist aber die Anzahl der Teilpunkte a auf jeder der Kurven C_1, C_2 höchstens $2n - 2$. Der Annahme gemässs lassen sich die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ einerseits, sowie die Punkte $a_{2k+1}, a_{2k+2}, \ldots, a_{2n}$ anderseits in fremde Paare (a_α, a_β) mit $\alpha \not\equiv \beta$ (mod. 2) einteilen, so dass jedes Paar einem Teilkontinuum von M_1 bzw. von M_2 angehört. Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

b) Jedes I_k wird von jedem I_l $(k \neq l)$ in K durch M getrennt. Ich behaupte, dass in diesem Falle sämtliche Teilpunkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ einem Teilkontinuum von M angehören, was die Behauptung des Satzes umfasst. Es genügt dies für zwei Nachbarpunkte, etwa für a_1 und a_2 nachzuweisen.

Wir verbinden a_1 und a_2 durch das Äussere von C mit einem einfachen Bogen L so, dass der offene Bogen $C - \overline{I_2}$ ins Innere der einfachen geschlossenen Kurve $C^* = L + I_2$ fällt. Es sei $K^* = C^* +$ Inneres von C^*, $I_2^* = I_2$, $I_1^* = C^* - \overline{I_2}$. Die Intervalle I_1^* und I_2^* sind nun in K^* durch M getrennt. Denn es bildet ja $C - I_2$ einen Schnitt in K^* zwischen jedem Punktepaar $p \epsilon I_1^*$ und $q \epsilon I_2^*$. Ein M-freier Weg der p mit q in K^* verbindet müsste also einen Teilbogen enthalten der q mit einem Punkte von $C - I_2$ verbindet und in $K - M$ liegt entgegen der Voraussetzung.

Es sind somit für C^*, a_1, a_2, und M die Voraussetzungen des Satzes erfüllt; nach dem unter 1) bewiesenen gibt es also ein Teilkontinuum von M dem a_1 und a_2 angehören. Damit ist der Beweis unseres Satzes beendet.