Dann gilt

$$Z_s \underset{\sigma'}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma'} Z_i, \quad Z_s \underset{\sigma''}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma''} Z_i$$

also erst recht

$$Z_s \underset{\varepsilon}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma'} Z_i, \quad Z_s \underset{\varepsilon}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma''} Z_i,$$

somit

$$\sum_{1}^{s-1} (u_i^{\sigma'} - u_i^{\sigma''}) Z_i \underset{\varepsilon}{\sim} 0,$$

was wegen unserer Voraussetzung die Gleichung

$$u_i^{\sigma'} = u_i^{\sigma''} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$$

nach sich zieht Somit haben bei hinreichend kleinem σ die u_i^{σ} Werte, die von σ unabhängig sind und also mit $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ bezeichnet werden können. Folglich bekommt die Homologie (7) die Gestalt $Z_s \underset{\sigma}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i Z_i$, und diese (da sie bei jedem σ gilt) widerspricht der linearen Unabhängigkeit der Zyklen (1). Hiermit ist alles bewiesen.

Sur la superposition de fonctions qui jouissent de la propriété de Baire [1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ *jouit de la propriété de Baire*, si elle est continue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait.

Dans le vol. XX de ce journal (p. 286) j'ai posé le problème (59) suivant:

Une fonction jouissant de la propriété de Baire d'une fonction jouissant de la propriété de Baire, est-elle de même nature?

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et en utilisant un résultat de M. Lusin je prouverai que *la réponse y est négative* [2]).

Admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. M. Lusin a démontré qu'il existe dans ce cas un ensemble non dénombrable de nombres irrationnels de l'intervalle (0, 1), L, qui est au plus dénombrable sur tout ensemble linéaire non dense [3]), et qu'il existe une fonction $\psi(x)$ définie et continue sur l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle (0, 1), à valeurs distinctes sur N, et qui trasnsforme l'ensemble L en un ensemble $K = \psi(L)$ situé dans l'intervalle (0, 1) et qui est toujours de première catégorie (c'est-à-dire de 1[re] caté-

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie) le 5 Décembre 1933.

[2]) Dans les *Atti Accad. Lincei* vol. XVIII, p. 82—86 a paru récemment une Note de M. T. Viola qui fait citation de mon problème 59 des *Fund. Math.* t. XX. Or, cette Note s'occupe de la superposition de deux fonctions de 1[re] classe de Baire et non d'un cas général de la superposition de deux fonctions jouissant de la propriété de Baire, et par suite ne résoût pas mon problème.

[3]) *C. R. Paris* t. 158, p. 1259; voir aussi *Fund. Math.* t. VI, p. 154—155.

gorie sur tout ensemble parfait [1])). Posons encore $\psi(x) = -1$ pour $x \in CN$: la fonction $\psi(x)$ sera ainsi définie pour tous les x réels et elle sera, comme on voit sans peine, une fonction de Baire de classe $\leqslant 2$ (donc une fonction qui jouit de la propriété de Baire).

Or, définissons la fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle x par les conditions

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in K \tag{1}$$

et

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in CK. \tag{2}$$

La fonction $\varphi(x)$ jouit évidemment de la propriété de Baire, puisque l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) \neq 0] = K$ est toujours de première catégorie.

Posons maintenant pour x réels

$$f(x) = \varphi(\psi(x)) \tag{3}$$

— c'est donc une superposition de deux fonctions jouissant de la propriété de Baire. Or, je dis que la fonction $f(x)$ ne jouit pas de la propriété de Baire.

D'après $K = \psi(L)$, (3) et (1) on trouve

$$f(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in L. \tag{4}$$

La fonction $\psi(x)$ étant à valeurs distinctes sur N, on a, d'après $\psi(L) = K$, $\psi(x) \in CK$ pour $x \in N - L$, donc, d'après (3), (2) et d'après $\psi(x) = -1 \in CK$ pour $x \in CN$:

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in CL. \tag{5}$$

De la propriété de l'ensemble L résulte que L n'est pas un ensemble de 1[re] catégorie: il existe donc un intervalle Δ, tel que l'ensemble L est partout de deuxième catégorie dans Δ. Or, l'ensemble CL ne peut pas être de 1[re] catégorie dans Δ, puisque dans ce cas l'ensemble ΔL contiendrait un sous-ensemble parfait, ce qui contredit à la propriété de L. L'ensemble CL est donc de deuxième catégorie dans Δ et il existe un intervalle δ contenu dans Δ, tel que

[1]) *Fund. Math.* t. XXI, p. 119—122. (En ligne 10 en remontant de la p. 121 au lieu de „parcourt tous les points de" doit être évidemment „est contenu dans").

l'ensemble CL est partout de deuxième catégorie dans δ. D'après (4) et (5) on conclut donc que les ensembles

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = 1] = L \quad \text{et} \quad \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = 0] = CL$$

sont tous les deux partout de deuxième catégorie dans l'intervalle δ, d'où résulte que la fonction $f(x)$ ne jouit pas de la propriété de Baire, c. q. f. d.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Or, comme je le démontrerai ailleurs, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une fonction d'une variable réelle qui ne jouit pas de la propriété de Baire et qui est une fonction jouissant de la propriété de Baire d'une fonction continue.