Soit $\sigma_q^{p-1}=(n_1, n_2, \dots, n_{p-1})$: on a évidemment

(3) $$X_{\sigma_q^{p-1}}=\sum_{n=1}^{\infty} X_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}, n}.$$

De (3) résulte tout de suite qu'il existe un indice $r > k_p$, tel que $X_{\sigma_r^p} \subset X_{\sigma_q^{p-1}}$, donc

(4) $$X_{\sigma_r^p} \subset \Delta.$$

Posons

(5) $$\delta = \overline{X}_{\sigma_r^p}:$$

ce sera évidemment un intervalle et, d'après (4), nous avons

$$\delta \subset \Delta.$$

Or, les ensembles $X_{\sigma_k^p}$ $(k=1, 2, 3, \dots)$ étant disjoints, on trouve sans peine, d'après (5) et $r > k_p$:

$$\delta(X_{\sigma_1^p}+X_{\sigma_2^p}+\dots+X_{\sigma_{k_p}^p})=0,$$

donc, d'après (1):

$$\delta(A_1^p+A_2^p+\dots+A_{k_p}^p)=0,$$

ce qui donne, d'après (2):

$$Q\delta=0.$$

Nous avons ainsi démontré que tout intervalle Δ (contenu dans $(0, 1)$) contient un intervalle δ, tel que $Q\delta=0$. L'ensemble Q est donc non dense. Or, Q est évidemment un sous-ensemble de L: de la propriété de l'ensemble L résulte donc que l'ensemble Q est au plus dénombrable.

L'ensemble (2) est donc au plus dénombrable et la propriété 3° est établie.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Or, on connait trois autres théorèmes dont on sait démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'ils sont équivalents au théorème T (parmi eux le théorème qu'il existe une suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ qui converge non uniformément sur tout ensemble non dénombrable) [1]): tous ces théorèmes résultent donc sans l'aide de l'hypothèse du continu de l'hypothèse qu'il existe un ensemble L de M. Lusin.

[1]) S. Banach et C. Kuratowski, *Fund. Math.* t. XIV, p. 131; W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XIV, p. 277 ss. et *Studia Mathematica* t. IV, p. 15 ss.

Sur le rapport des ensembles de M. Lusin à la Théorie générale des ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

D'après un théorème important de M. Lusin [1]), l'hypothèse du continu implique l'existence d'un ensemble L de puissance du continu, situé dans l'espace des nombres irrationnels et jouissant de la propriété ν suivante: *chaque sous-ensemble non-dense de L est dénombrable* (ou fini). Dans les notes précédentes de MM. Sierpiński et Szpilrajn [2]) le lecteur trouvera des rapports intéressants de la propriété ν au problème de la mesure, ainsi qu'à certains autres problèmes de la Théorie générale des ensembles et des fonctions.

Dans le même ordre d'idées je vais démontrer que le théorème *topologique* de l'existence des ensembles de puissance $\mathfrak{c}$ à propriété ν équivaut à un énoncé de la *Théorie générale des ensembles*, analogue à un théorème considéré dans le problème de la mesure [3]).

1. Soit $\mathfrak{S}$ une famille de suites finies d'entiers positifs. Nous dirons que $\mathfrak{S}$ est une famille *complète*, si quelle que soit la suite d'entiers positifs $m_1, \dots, m_k$ (appartenant à $\mathfrak{S}$ ou non), il existe dans $\mathfrak{S}$ une suite $m_1, \dots, m_k, m_{k+1}, \dots, m_l$, où $l \geqslant k$.

$\mathfrak{z}$ étant un nombre irrationnel de l'intervalle 01, désignons par $\frac{1|}{|\mathfrak{z}^1}+\frac{1|}{|\mathfrak{z}^2}+\frac{1|}{|\mathfrak{z}^3}+\dots$ son développement en fraction continue. Soit N_k^i l'ensemble des $\mathfrak{z}$ tels que $\mathfrak{z}^i=k$. Soit N l'ensemble de tous les $\mathfrak{z}$

[1]) C. R. Paris, t. 158 (1914), p. 1259.

[2]) Cf. aussi W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Coll. Monografje Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934, p. 36.

[3]) Voir la note de M. Banach et moi, Fund. Math. 14, p. 128, théor. II.

(ou, ce qui revient au même, l'ensemble des suites infinies d'entiers positifs).

Lemme. *Etant donné un ensemble G ouvert dans l'espace N et $\mathfrak{S}$ désignant la famille des suites $n_1, \ldots, n_k$ telles que $N^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{n_k} \subset G$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble G soit dense dans N est que le système $\mathfrak{S}$ soit complet.*

En effet, G étant dense et $m_1, \ldots, m_k$, étant une suite finie arbitraire, l'ensemble $N^1_{m_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{m_k} \cdot G$ est ouvert et non vide, car les ensembles N^i_k sont ouverts. Donc, pour l suffisamment grand, il existe une suite $m_{k+1}, \ldots, m_l$ telle que

$$N^1_{m_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{m_k} \cdot N^{k+1}_{m_{k+1}} \cdot \ldots \cdot N^l_{m_l} \subset N^1_{m_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{m_k} \cdot G \subset G.$$

Par conséquent la suite $m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_l$ appartient à $\mathfrak{S}$, ce qui prouve que la famille $\mathfrak{S}$ est complète.

Inversement, si l'on suppose que la famille $\mathfrak{S}$ est complète, on a $G \cdot N^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{n_k} \neq 0$, quel que soit la suite $n_1, \ldots, n_k$. Or $\mathfrak{z}$ étant un élément arbitraire de N, l'ensemble $N^1_{\mathfrak{z}^1} \cdot \ldots \cdot N^k_{\mathfrak{z}^k}$ est — pour k suffisamment grand — aussi petit qu'on le veut. L'ensemble G est donc dense dans N. Le lemme se trouve ainsi établi. Il en résulte, en outre, que G étant un ensemble ouvert arbitraire, on a

$$G = \sum N^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{n_k}, \tag{1}$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes $n_1, \ldots, n_k$ appartenant à $\mathfrak{S}$.

2. **Théorème.** *L'existence d'un ensemble L de puissance $\mathfrak{c}$ et à propriété ν équivaut à l'existence d'un ensemble E de puissance $\mathfrak{c}$ et d'une double suite d'ensembles $\{A^i_k\}$ telle que*

1°: $E = A^i_1 + A^i_2 + \ldots$, *quel que soit* i,
2°: $A^i_k \cdot A^i_l = 0$ *pour* $k \neq l$,
3°: *pour chaque famille complète* $\mathfrak{S}$, *on a*

$$\overline{\overline{E - \sum A^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot A^k_{n_k}}} \leqslant \aleph_0, \tag{2}$$

la sommation étant étendue (comme auparavant) aux systèmes $n_1, \ldots, n_k$ appartenant à $\mathfrak{S}$.

D é m o n s t r a t i o n. 1. L'ensemble $L \subset N$ jouissant de la propriété ν, posons $E = L$ et $A^i_k = L \cdot N^i_k$.

Les conditions 1° et 2° résultent respectivement des formules évidentes: $N = N^i_1 + N^i_2 + \ldots$ et $N^i_k \cdot N^i_l = 0$.

Passons à la condition 3°. $\mathfrak{S}$ étant une famille complète, considérons l'ensemble ouvert G satisfaisant à l'égalité (1). D'après le lemme, cet ensemble est dense dans N, car la famille des suites $n_1, \ldots, n_k$ telles que $N^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{n_k} \subset G$ contient évidemment la famille $\mathfrak{S}$. La propriété ν implique donc que $\overline{\overline{L - G}} \leqslant \aleph_0$ et comme

$$E - \sum A^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot A^k_{n_k} = L - L \cdot \sum N^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot N^k_{n_k} = L - G,$$

la condition 3° en résulte.

2. E étant un ensemble de la puissance $\mathfrak{c}$ et $\{A^i_k\}$ étant une double suite d'ensembles satisfaisant aux conditions 1°—3°, désignons par L l'ensemble des nombres irrationnels $\mathfrak{z}$ tels que $A^1_{\mathfrak{z}^1} \cdot A^2_{\mathfrak{z}^2} \cdot \ldots \neq 0$.

x étant un élément de E, à chaque i correspond un et un seul indice k tel que $x \in A^i_k$ (selon 1° et 2°). Autrement dit, à chaque x correspond un nombre irrationnel $\mathfrak{z}_x$ tel que $x \in A^1_{\mathfrak{z}^1_x} \cdot A^2_{\mathfrak{z}^2_x} \cdot \ldots$ On vérifie facilement les équivalences suivantes:

$$(3) \quad (x \in E) \equiv (\mathfrak{z}_x \in L) \qquad (4) \quad (x \in A^i_k) \equiv (\mathfrak{z}^i_x = k) \equiv (\mathfrak{z}_x \in N^i_k).$$

G étant un ensemble ouvert et dense dans N, la famille $\mathfrak{S}$ qui lui correspond est complète. L'inégalité (2) est donc remplie. On a, d'autre part, selon (1) et (4):

$$(\mathfrak{z}_x \in G) \equiv \left\{\mathfrak{z}_x \in \sum N^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot N^k_n\right\} \equiv \left\{x \in \sum A^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot A^k_{n_k}\right\},$$

d'où en vertu de (3): $\underset{x}{\mathrm{E}}\{\mathfrak{z}_x \in (L - G)\} = E - \Sigma A^1_{n_1} \cdot \ldots \cdot A^k_{n_k}$.

L'inégalité évidente $\overline{\overline{L - G}} \leqslant \overline{\overline{\underset{x}{\mathrm{E}}\{\mathfrak{z}_x \in (L - G)\}}}$ implique donc en raison de (2) que l'ensemble L jouit de la propriété ν.

Reste à démontrer que $\overline{\overline{L}} = \mathfrak{c}$. En vertu de (3) il suffit à ce but de prouver que, pour $\mathfrak{y}$ fixe, l'ensemble des x tels que $\mathfrak{z}_x = \mathfrak{y}$ est au plus dénombrable; autrement dit, que

$$\overline{\overline{A^1_{n_1} \cdot A^2_{n_2} \cdot \ldots}} \leqslant \aleph_0. \tag{5}$$

Or, d'après 1° et 2°:

$$A^i_{n_i} = E - \sum_{k_i \neq n_i} A^i_{k_i} \subset E - A^i_{n_i+1}$$

et, en posant $m_i = n_i + 1$, il vient

$$A^1_{n_1} \cdot A^2_{n_2} \cdot \ldots \subset E - (A^1_{m_1} + A^2_{m_2} + \ldots).$$

Nous allons démontrer que

$$\overline{\overline{E - (A^1_{m_1} + A^2_{m_2} + \ldots)}} \leqslant \aleph_0, \tag{6}$$

quelle que soit la suite $m_1, m_2, \ldots$ (Cette inégalité, qui implique l'inégalité (5), présente un certain intérêt intrinsèque).

Désignons à ce but par $\mathfrak{S}$ la famille de toutes les suites de la forme $l_1, \ldots, l_{k-1}, m_k$, la suite infinie $\{m_k\}$ étant donnée en avance. La famille $\mathfrak{S}$ étant évidemment complète, la formule (2) et l'inclusion $A^1_{l_1} \cdot \ldots \cdot A^{k-1}_{l_{k-1}} \cdot A^k_{m_k} \subset A^k_{m_k}$ entraînent

$$\overline{\overline{E - \sum_{k=1}^{\infty} A^k_{m_k}}} \leqslant \overline{\overline{E - \sum A^1_{l_1} \cdot \ldots \cdot A^{k-1}_{l_{k-1}} \cdot A^k_{m_k}}} \leqslant \aleph_0,$$

la deuxième sommation s'étendant aux suites $l_1, \ldots, l_{k-1}, m_k$ appartenant à $\mathfrak{S}$.

Reconnaissance du droit d'auteur.

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

Je m'empresse de reconnaître que le résultat établi dans ma *Remarque sur la dérivée symétrique* [Fundamenta Mathematicae **21** (1933), pp. 226—228] n'est pas nouveau: il est contenu dans un théorème démontré par M. Bohuš Jurek dans son mémoire *Sur la dérivabilité des fonctions discontinues* [Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême, Cl. des Sciences, 1931, N⁰ XXVII, théorème 3, p. 3].

Je remercie vivement M. V. Jarnik d'avoir attirer mon attention sur cette coïncidence.