Remarque sur un ensemble de M. Lusin.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans la Note précédente M. Szpilrajn a démontré que la solution négative du problème de la mesure généralisé résulte (sans l'aide de hypothèse du continu) de l'hypothèse qu'il existe un esemble linéaire L de M. Lusin qui est de puissance du continu et ne contient aucun sous-ensemble non dénombrable non dense [1]).

Or, la solution du problème de la mesure généralisé a été déduite (pour la première fois) par MM. Banach et Kuratowski du théorème suivant (qu'ils ont démontré à l'aide de l'hypothèse du continu) [2]):

Théorème T: *Il existe une double suite d'ensembles* A_k^i, *telle qu'en désignant par* E *l'ensemble de tous les points de l'intervalle* $(0, 1)$, *on a* 1°:

$$\begin{array}{l} E = A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_k^1 + \ldots \\ E = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_k^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E = A_1^i + A_2^i + \ldots + A_k^i + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

2°: *les ensembles d'une même ligne sont disjoints et* 3°: *quelle que soit la suite de nombres naturels* $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, *le produit* $\prod_{i=1}^{\infty}(A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$ *est au plus dénombrable.*

[1]) L'existence d'un tel ensemble résulte de l'hypothèse du continu: voir *C. R. Paris* t. 158, p. 1259 ou bien *Fund. Math.*, t. VI, p. 155 et t. XIII p. 196.

[2]) *Fund. Math.*, t. XIV, p. 128.

Le but de cette Note est de démontrer que *le théorème* T *résulte sans l'aide de l'hypothèse du continu de l'hypothèse qu'il existe un ensemble* L *de M. Lusin* [1]).

Admettons donc l'existence de l'ensemble L. Il est évident qu'on peut supposer que l'ensemble L est formé de nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$.

D'autre part il est évident que pour démontrer le théorème T, on peut y remplacer l'intervalle E par un ensemble quelconque de puissance du continu, en particulier par l'ensemble L.

p et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ étant des nombres naturels donnés, désignons par $X_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels x, dont le développement en fraction continue arithmétique a pour p-ième réduit le nombre

$$\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_p}.$$

Soit i un nombre naturel donné. Tous les systèmes différents de i nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_i$ peuvent être rangés, comme on sait, en une suite infinie

$$\sigma_1^i,\ \sigma_2^i,\ \sigma_3^i, \ldots$$

Posons, pour i et k naturels:

$$A_k^i = L X_{\sigma_k^i}. \tag{1}$$

Nous affirmons que le système d'ensembles A_k^i satisfait aux conditions du théorème T (où l'ensemble E est remplacé par L). Pour les conditions 1° et 2° cela est évident. Il suffira donc de vérifier la condition 3°.

Soit donc $k_1, k_2, k_3, \ldots$ une suite infinie donnée de nombres naturels et posons

$$Q = \prod_{i=1}^{\infty}(A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i). \tag{2}$$

Nous prouverons que l'ensemble Q est non dense. Soit, en effet, Δ un intervalle quelconque contenu dans $(0, 1)$. Il existe, comme on voit sans peine, des nombres naturels $p > 1$ et q, tels que $X_{\sigma_q^{p-1}} \subset \Delta$.

[1]) L'idée de cette proposition m'a été suggerée par la remarque de M. Saks que de l'existence d'un ensemble de M. Lusin résulte sans l'aide de l'hypothèse du continu mon théorème des *Fund. Math.* t. XIV, p. 278.

Soit $\sigma_q^{p-1}=(n_1, n_2,\ldots, n_{p-1})$: on a évidemment

$$X_{\sigma_q^{p-1}}=\sum_{n=1}^{\infty} X_{n_1,n_2,\ldots,n_{p-1},n}. \tag{3}$$

De (3) résulte tout de suite qu'il existe un indice $r>k_p$, tel que $X_{\sigma_r^p}\subset X_{\sigma_q^{p-1}}$, donc

$$X_{\sigma_r^p}\subset \Delta. \tag{4}$$

Posons

$$\delta=\overline{X}_{\sigma_r^p}: \tag{5}$$

ce sera évidemment un intervalle et, d'après (4), nous avons

$$\delta\subset\Delta.$$

Or, les ensembles $X_{\sigma_k^p}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ étant disjoints, on trouve sans peine, d'après (5) et $r>k_p$:

$$\delta(X_{\sigma_1^p}+X_{\sigma_2^p}+\ldots+X_{\sigma_{k_p}^p})=0,$$

donc, d'après (1):

$$\delta(A_1^p+A_2^p+\ldots+A_{k_p}^p)=0,$$

ce qui donne, d'après (2):

$$Q\delta=0.$$

Nous avons ainsi démontré que tout intervalle Δ (contenu dans $(0,1)$) contient un intervalle δ, tel que $Q\delta=0$. L'ensemble Q est donc non dense. Or, Q est évidemment un sous-ensemble de L: de la propriété de l'ensemble L résulte donc que l'ensemble Q est au plus dénombrable.

L'ensemble (2) est donc au plus dénombrable et la propriété 3° est établie.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Or, on connait trois autres théorèmes dont on sait démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'ils sont équivalents au théorème T (parmi eux le théorème qu'il existe une suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ définies pour $0\leqslant x\leqslant 1$ qui converge non uniformément sur tout ensemble non dénombrable) [1]): tous ces théorèmes résultent donc sans l'aide de l'hypothèse du continu de l'hypothèse qu'il existe un ensemble L de M. Lusin.

[1]) S. Banach et C. Kuratowski, *Fund. Math.* t. XIV, p. 131; W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XIV, p. 277 ss. et *Studia Mathematica* t. IV, p. 15 ss.

Sur le rapport des ensembles de M. Lusin à la Théorie générale des ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

D'après un théorème important de M. Lusin [1]), l'hypothèse du continu implique l'existence d'un ensemble L de puissance du continu, situé dans l'espace des nombres irrationnels et jouissant de la propriété ν suivante: *chaque sous-ensemble non-dense de L est dénombrable* (ou fini). Dans les notes précédentes de MM. Sierpiński et Szpilrajn [2]) le lecteur trouvera des rapports intéressants de la propriété ν au problème de la mesure, ainsi qu'à certains autres problèmes de la Théorie générale des ensembles et des fonctions.

Dans le même ordre d'idées je vais démontrer que le théorème *topologique* de l'existence des ensembles de puissance $\mathfrak{c}$ à propriété ν équivaut à un énoncé de la *Théorie générale des ensembles*, analogue à un théorème considéré dans le problème de la mesure [3]).

1. Soit $\mathfrak{S}$ une famille de suites finies d'entiers positifs. Nous dirons que $\mathfrak{S}$ est une famille *complète*, si quelle que soit la suite d'entiers positifs $m_1,\ldots,m_k$ (appartenant à $\mathfrak{S}$ ou non), il existe dans $\mathfrak{S}$ une suite $m_1,\ldots,m_k,m_{k+1},\ldots,m_l$, où $l\geqslant k$.

$\mathfrak{z}$ étant un nombre irrationnel de l'intervalle 01, désignons par $\frac{1|}{|\mathfrak{z}^1}+\frac{1|}{|\mathfrak{z}^2}+\frac{1|}{|\mathfrak{z}^3}+\ldots$ son développement en fraction continue. Soit N_k^i l'ensemble des $\mathfrak{z}$ tels que $\mathfrak{z}^i=k$. Soit N l'ensemble de tous les $\mathfrak{z}$

[1]) C. R. Paris, t. 158 (1914), p. 1259.

[2]) Cf. aussi W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Coll. Monografje Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934, p. 36.

[3]) Voir la note de M. Banach et moi, Fund. Math. 14, p. 128, théor. II.