d'où

$$\mu\left[\underset{t'}{E}\left(\left|\frac{w(t')+z(t')-w(t)-z(t)}{t'-t}-c\right|\geqq d,\ t<t'\leqq t+u\right)\right]=0<\frac{u}{n};$$

donc t n'appartient pas à $E_n(w(t)+z(t))$; l'ensemble $E_n(w(t)+z(t))$ est donc tout entier contenu dans la somme des intervalles

$$\left\langle\frac{s+1}{m}-\frac{1}{2km},\ \frac{s+1}{m}\right\rangle\quad(s=0,1,2,\dots,m-1);$$

donc sa mesure est $\leqq\frac{1}{2k}<\frac{1}{k}$; nous avons donc

$$w(t)+z(t)\in K-C_{n,k}(a,b),\qquad\text{q. e. d.}$$

Bettische Zahlen und ε-Abbildungen.

Von

Paul Alexandroff (Moskau).

1. Es gibt im wesentlichen zwei Definitionen der r-ten oder r-dimensionalen Bettischen Zahl eines kompakten metrischen Raumes F. Die eine Definition [1]) lautet: die r-te Bettische Zahl von F ist die kleinste nicht negative Zahl N von der Eigenschaft, dass es zu jedem ε eine ε-Überdeckung gibt, deren Nerv die Zahl N als seine r-te Bettische Zahl besitzt; existiert eine solche Zahl N nicht, so ist die r-te Bettische Zahl von F definitionsgemäss gleich Unendlich.

Die so definierten Bettischen Zahlen mögen die Bettischen N-Zahlen von F heissen und mit $N^r(F)$ bezeichnet werden.

Eine andere Definition der Bettischen Zahlen ist (als Verallgemeinerung der Brouwerschen „Zyklosenzahlen") von Lefschetz gegeben [2]): die r-te Bettische Zahl $p^r(F)$ von F ist die Maximalzahl der im Sinne der Homologie linear-unabhängigen r-dimensionalen wahren Zyklen des Raumes F; *dabei tritt als Koeffizientenbereich* [3]) der Körper der rationalen Zahlen auf.

Ob die beiden Definitionen für jeden kompakten metrischen Raum dieselben Zahlen liefern, bleibt bis heute unbekannt.

2. Als Ergänzung der interessanten Untersuchungen der Herren Kuratowski und Ulam [4]) will ich in dieser Note folgenden Satz beweisen:

[1]) Vgl. P. Alexandroff, *Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque*, Comptes Rendus 184 (1927), 317—319.

[2]) *Closed point-sets on a manifold*, Ann. of math. (2) 29 (1929), 232—254.

[3]) Vgl. P. Alexandroff, *Über die Urysohnschen Konstanten*, Fund. Math., 20 (1933), 140—150.

[4]) *Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. 20 (1933), 244—253.

Bei hinreichend kleinem ε kann keine Bettische Zahl des kompakten metrischen Raumes F durch eine ε-Abbildung erniedrigt werden.

Der Satz gilt sowohl für Bettische N-Zahlen als auch für die Bettischen Zahlen im Sinne von Lefschetz.

Für den Fall einer unendlichen Bettischen Zahl soll der Satz besagen, dass die entsprechende Bettische Zahl eines jeden Raumes F_ε, auf den sich F ε-abbilden lässt, notwendig beliebig gross ist, wenn nur ε hinreichend klein ist.

3. Für die Bettischen N-Zahlen liegt unsere Behauptung auf der Hand: lässt sich in der Tat F bei jedem ε auf ein F_ε mit $N^r(F_\varepsilon) \leqslant k$ mittels der ε-Abbildung f_ε abbilden (wobei k eine feste ganze Zahl ist), so wähle man vorerst die positive Zahl σ so klein, dass jede abgeschlossene Teilmenge Φ von F_ε, die einen Durchmesser $\leqslant \sigma$ hat, als Urbild bei der Abbildung f_ε eine Menge $f_\varepsilon^{-1}(F)$ von einem Durchmesser $< 2\varepsilon$ besitzt. Man betrachte sodann eine σ-Überdeckung $\mathfrak{U} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s)$ von F_ε, deren Nerv als r-te Bettische Zahl eine Zahl $\leqslant k$ hat. Die Mengen $f_\varepsilon^{-1}(\Phi_i)$ bilden eine 2ε-Überdeckung mit demselben Nerv wie $\mathfrak{U}$. Es gibt also beliebig feine Überdeckungen von F mit Nerven, deren r-te Bettische Zahl $\leqslant k$ ist. Folglich ist auch $N^r(F) \leqslant k$, w. z. b. w.

4. Für die Bettischen Zahlen im Lefschetzschen Sinne ist unsere Behauptung im folgenden Hilfssatz enthalten:

Wenn das endliche System von wahren Zyklen

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_s \tag{1}$$

in F linear-unabhängig ist (in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen $\mathfrak{R}$ als Koeffizientenbereich), so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass eine Homologie

$$\sum_{i=1}^{s} t^i Z_i \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \tag{2}$$

nur dann gilt, wenn alle t^i verschwinden [1]).

[1]) Der Satz bedarf eines Beweises: im Wortlaut der Unabhängigkeitsdefinition ist zunächst nur enthalten, dass es zu jeder einzelnen nicht identisch verschwindenden Linearkombination $\Sigma t^i Z_i$ ein (von dieser Kombination abhängendes) ε gibt, so dass die Homologie (2) nicht zutrifft. Unser Hilfssatz behauptet, dass man mit *einem* ε auskommt; er ist also ein *Gleichmässigkeitssatz*.

Beweis des Hilfssatzes. Es ist klar, dass wenn das Zyklensystem (1) aus einem einzigen Zyklus Z_1 besteht, es dann und nur dann linear-unabhängig ist, wenn Z_1 in bezug auf $\mathfrak{R}$ nicht berandet. Somit ist im Falle eines aus einem einzigen Element bestehenden Zyklensystems unser Satz richtig.

Wir nehmen jetzt an, dass er für alle aus höchstens $s-1$ Elementen bestehenden Zyklensysteme richtig ist und beweisen ihn für das aus s Elementen bestehende Zyklensystem (1).

Das System (1) ist also linear-unabhängig. Daraus folgt, dass jedes seiner Teilsysteme, insbesondere

$$Z_1, \ldots, Z_{s-1} \tag{3}$$

ebenfalls unabhängig ist. Folglich gibt es ein ε von der Eigenschaft, dass keine Homologie

$$\sum_{1}^{s-1} t^i Z_i^r \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \tag{4}$$

mit nicht sämtlich verschwindenden t^i bestehen kann. Es ist zu zeigen, dass bei passend gewähltem ε auch eine Homologie

$$\sum_{1}^{s} t^i Z_i \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \tag{5}$$

nur im Falle verschwindender t^i zutrifft.

Wir nehmen das Gegenteil an; dann gibt es bei jedem $\sigma > 0$ rationale Zahlen $t_1^\sigma, \ldots, t_s^\sigma$, die nicht alle Null sind und der Bedingung

$$\sum_{1}^{s} t_i^\sigma Z_i \underset{\sigma}{\sim} 0 \tag{6}$$

genügen. Dabei muss bei $\sigma < \varepsilon$ notwendig $t_s^\sigma \neq 0$ sein, denn sonst würde (6) eine unserer Induktionsvoraussetzung widersprechende Relation zwischen den $Z_1, \ldots, Z_{s-1}$ ausdrücken. Folglich kann man anstatt (6)

$$Z_s \underset{\sigma}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^\sigma Z_i, \quad u_i^\sigma = -\frac{t_i^\sigma}{t_s^\sigma} \tag{7}$$

schreiben. Wir wählen nun σ' und σ'' kleiner als ε, sonst beliebig.

Dann gilt

$$Z_s \underset{\sigma'}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma'} Z_i, \quad Z_s \underset{\sigma''}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma''} Z_i$$

also erst recht

$$Z_s \underset{\varepsilon}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma'} Z_i, \quad Z_s \underset{\varepsilon}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i^{\sigma''} Z_i,$$

somit

$$\sum_{1}^{s-1} (u_i^{\sigma'} - u_i^{\sigma''}) Z_i \underset{\varepsilon}{\sim} 0,$$

was wegen unserer Voraussetzung die Gleichung

$$u_i^{\sigma'} = u_i^{\sigma''} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$$

nach sich zieht. Somit haben bei hinreichend kleinem σ die u_i^{σ} Werte, die von σ unabhängig sind und also mit $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ bezeichnet werden können. Folglich bekommt die Homologie (7) die Gestalt $Z_s \underset{\sigma}{\sim} \sum_{1}^{s-1} u_i Z_i$, und diese (da sie bei jedem σ gilt) widerspricht der linearen Unabhängigkeit der Zyklen (1). Hiermit ist alles bewiesen.

Sur la superposition de fonctions qui jouissent de la propriété de Baire [1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ *jouit de la propriété de Baire*, si elle est continue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait.

Dans le vol. XX de ce journal (p. 286) j'ai posé le problème (59) suivant:

Une fonction jouissant de la propriété de Baire d'une fonction jouissant de la propriété de Baire, est-elle de même nature?

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et en utilisant un résultat de M. Lusin je prouverai que *la réponse y est négative* [2]).

Admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. M. Lusin a démontré qu'il existe dans ce cas un ensemble non dénombrable de nombres irrationnels de l'intervalle (0, 1), L, qui est au plus dénombrable sur tout ensemble linéaire non dense [3]), et qu'il existe une fonction $\psi(x)$ définie et continue sur l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle (0, 1), à valeurs distinctes sur N, et qui trasnforme l'ensemble L en un ensemble $K = \psi(L)$ situé dans l'intervalle (0, 1) et qui est toujours de première catégorie (c'est-à-dire de 1re caté-

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie) le 5 Décembre 1933.

[2]) Dans les *Atti Accad. Lincei* vol. XVIII, p. 82—86 a paru récemment une Note de M. T. Viola qui fait citation de mon problème 59 des *Fund. Math.* t. XX. Or, cette Note s'occupe de la superposition de deux fonctions de 1re classe de Baire et non d'un cas général de la superposition de deux fonctions jouissant de la propriété de Baire, et par suite ne résoût pas mon problème.

[3]) *C. R. Paris* t. 158, p. 1259; voir aussi *Fund. Math.* t. VI, p. 154—155.