***Théorème 2.*** *Etant donnée une décomposition d'un ensemble connexe $C$ en $n \geqslant 2$ ensembles connexes*

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

*il existe au moins deux indices différents $i'$ et $i''$ tels que les ensembles*

$$\sum_{i \neq i'}^{n} C_i \quad et \quad \sum_{i \neq i''}^{n} C_i$$

*sont connexes.*

Désignons avec M. C. Zarankiewicz [7]) par $\tau'(C)$ l'ensemble des points d'un ensemble connexe $C$ tels que $C - (p)$ est encore un ensemble connexe.

On a alors deux conséquences suivantes du théorème 1:

***Corollaire 1.*** *Dans tout continu $K$ l'ensemble $\tau'(K)$ contient $\geqslant 2$ points.*

Pour l'établir, il suffit d'appliquer le théorème 1 à la famille formée de points du continu $K$.

***Corollaire 2.*** *Dans tout continu $K$ on a $\tau'(K) - Q \neq 0$, quel que soit le vrai sous-ensemble connexe $Q$ de $K$.*

Pour le prouver, il suffit d'appliquer le théorème 1 à la famille composée de $Q$ et de points de l'ensemble $K - Q$.

Le corollaire 2 montre que tout continu $K$ est irréductible par rapport à la propriété d'être un ensemble connexe contenant l'ensemble $\tau'(K)$ [8]).

[7]) voir l. c., Fund. Math. IX, p. 124 et 135.
[8]) H. M. Gehman, l. c., p. 435, Corollary $2b$.

Varsovie, Mars 1934.

---

# Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire [1]).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

## Introduction.

Les ensembles de mesure lebesguienne nulle et les ensembles mesurables $(L)$ d'une part, et d'autre part les ensembles de première catégorie et ceux jouissant de la propriété de Baire (au sens large) [2]) présentent, comme on sait, beaucoup d'*analogies* [3]). Et voici un théorème connu, relative à ces classes, qui porte un caractère de *dualité:*

(t) Il existe une décomposition de la droite en deux ensembles dont l'un est de mesure nulle et l'autre de première catégorie [4]).

Je démontre dans la note présente un théorème plus général, concernant les fonctions complètement additives d'ensembles et je donne plusieurs applications de ce théorème. Elles se rattachent en

[1]) Une partie des résultats contenus dans cette note a été signalée dans ma communication *O mierzalności i warunku Baire'a,* faite au I[er] Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves (cf. C. R. de ce Congrès, Varsovie 1930, p. 300); les autres ont été présentés dans la séance de la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie), le 26. I. 1934.

[2]) c'est-à-dire les ensembles de la forme $G + K_1 - K_2$, où $G$ est un ensemble ouvert et $K_1$ avec $K_2$ — de première catégorie.

[3]) Cf. le livre de M. W. Sierpiński: *Hypothèse du continu*, Monografje Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, chap. III; ma communication citée et ma note *Sur certains invariants de l'opération* $(A)$, Fund. Math. **21** (1933), p. 229.

[4]) M. Sierpiński a démontré deux théorèmes qui présentent certaines généralisations de cette proposition. Cf. p. ex. son livre cité, p. 83.

particulier aux certains ensembles singuliers de M. Lusin et à l'ainsi dit *problème généralisé de la mesure.*

*$M$ étant un espace métrique, chaque ensemble contenu dans $M$, dont tout sous-ensemble non dense (dans $M$) est au plus dénombrable, sera appelé *ensemble de Lusin* (dans $M$). On sait que

I. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble indénombrable de Lusin dans l'intervalle* $[0, 1]$ [5]).

Or, de ce théorème et de nos considérations résulte immédiatement le théorème suivant, démontré au moyen d'une méthode différente par MM. Banach et Kuratowski:

II. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, chaque ensemble $Z$ de puissance du continu satisfait à la condition suivante*:

($\gamma$) *il n'existe, en dehors de la fonction identiquement nulle, aucune fonction réelle (finie) d'ensemble qui soit complètement additive dans la famille de tous les sous-ensembles de $Z$ et qui s'annulle pour les ensembles se réduisant à un point* [6]).

Dans les deux derniers numéros j'indique certains résultats de MM. Poprougénko et Saks, concernant la continuité uniforme des fonctions complètement additives et l'ainsi dite propriété ($C$).

## Mesure et catégorie.

**1. *Théorème.*** *$Z$ étant un espace métrique séparable et $\mu(E)$ une fonction non negative* [7]) *(finie) de sous-ensemble borelien de $Z$, complètement additive et s'annulant pour les ensembles composés d'un seul point — il existe une décomposition $Z=H+K$, où $K$ est un $F_\sigma$ de première catégorie et $H$ un $G_\delta$ tel que $\mu(H)=0$.*

Démonstration. $p$ étant un point arbitraire de $Z$ et $n$ un nombre naturel quelconque, désignons par $V_n(p)$ la sphère de centre $p$ et de rayon $\frac{1}{n}$. On a:

$$\lim_{n=\infty}\mu\, V_n(p)=0. \tag{1}$$

[5]) Ce résultat est dû à M. Lusin. Cf. p. ex. Sierpiński l. c., p. 36.

[6]) S. Banach et C. Kuratowski: *Sur une généralisation du problème de la mesure,* Fund. Math. **14** (1929), pp. 127—131. Cf. aussi Sierpiński l. c.

[7]) Cette premisse n'est pas essentielle: il suffit de supposer que la fonction $\mu(E)$ est réelle; cf. à ce propos le numéro **5**.



En effet:

$$\mu\, V_1(p)=\mu[V_1(p)-V_2(p)]+\mu[V_2(p)-V_3(p)]+\dots$$

et cette série étant convergente, la reste $n$-ième, égale à $\mu\, V_{n+1}(p)$, tend vers zéro.

Soient à présent: $p_1, p_2,\dots$ une suite de points de $Z$, dense dans $Z$ et $\varepsilon$ un nombre positif.

En vertu de (1), il existe pour tout nombre naturel $k$ un nombre $n_k$ tel que

$$\mu\, V_{n_k}(p_k)<\frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{2}$$

Posons

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}V_{n_k}(p_k).$$

Il résulte de l'inégalité (2) que $\mu\, V<\varepsilon$ et par conséquent $\mu(Z-V)>\mu(Z)-\varepsilon$.

$V$ étant un ensemble ouvert, dense dans $Z$, l'ensemble $Z-V$ est fermé et non dense. Nous venons donc de démontrer qu'il existe pour tout $\varepsilon>0$ un sous-ensemble $Q$ fermé et non dense de $Z$, tel que $\mu(Q)>\mu(Z)-\varepsilon$. Soit à présent $Q_n$ une suite de tels ensembles, qui correspondent à la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ et posons

$$K=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n \qquad H=Z-K.$$

Les ensembles $H$ et $K$ satisfont évidemment aux conditions de la thèse.

**2. *Corollaire.*** *$Z$ étant un espace métrique séparable et dense en soi, il n'existe en dehors de la fonction identiquement nulle aucune fonction non négative (finie) de sous-ensemble borelien de $Z$ qui soit complètement additive et qui s'annulle pour les ensembles boreliens de première catégorie.*

Démonstration. Soit $\mu E$ une telle fonction. Il existe donc — d'après le théorème **1** — un ensemble de première catégorie $K\subset Z$ tel que $\mu(Z-K)=0$. L'ensemble $K$ étant de première catégorie, on a — en vertu de notre premisse — $\mu(K)=0$ et par conséquent

$$\mu(Z)=\mu(K)+\mu(Z-K)=0, \quad \text{c. q. f. d.}$$

**3.** Dans le corollaire précédent on peut évidemment remplacer les ensembles *boreliens* par les ensembles *jouissant de la propriété de Baire*. Par conséquent, ce corollaire exprime *une différence* existant entre les ensembles jouissant de cette propriété et les ensembles mesurables $(L)$. Nous allons préciser cette remarque.

Deux classes d'ensembles: $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{K}_2$ sont dits *semblables* [8]) lorsqu'il existe une fonction biunivoque $f$ qui transforme la somme de tous les ensembles appartenant à $\mathbf{K}_1$ en somme de tous les ensembles appartenant à $\mathbf{K}_2$, d'une telle façon que $f(\mathbf{K}_1) = \mathbf{K}_2$ [9]).

$\mathbf{K}$ étant une classe arbitraire d'ensembles, désignons par $\mathbf{N}(\mathbf{K})$ la classe des ensembles dont tous les sous-ensembles appartiennent à $\mathbf{K}$.

Désignons à présent par $\mathbf{L}$ la classe des sous-ensembles mesurables $(L)$ de l'intervalle $I = [0, 1]$ et par $\mathbf{B}$ la classe des sous-ensembles de cet intervalle, jouissant de la propriété de Baire. On sait que $\mathbf{N}(\mathbf{B}) =$ la classe des ensembles de première catégorie dans $I$ et $\mathbf{N}(\mathbf{L}) =$ la classe des ensembles de mesure lebesguienne nulle (contenus dans $I$).

Or, nous allons démontrer que

*Les classes $\mathbf{B}$ et $\mathbf{L}$ ne sont pas semblables* [10]).

Admettons, par contre, qu'il existe une fonction biunivoque qui transforme l'intervalle $[0, 1]$ en soi-même et telle que $f(\mathbf{B}) = \mathbf{L}$ On a donc aussi: $f(\mathbf{N}(\mathbf{B})) = \mathbf{N}(\mathbf{L})$. Posons:

$$m'(E) = m(f(E)) \quad \text{pour tout} \quad E \in \mathbf{B}$$

(où $m(Z)$ désigne la mesure lebesguienne).

La fonction $m'(E)$ est donc complètement additive dans $\mathbf{B}$, elle s'annulle pour tout sous-ensemble de $I$ de première catégorie, tandis qu'on a en même temps: $m'(I) = 1$. Nous obtenons ainsi une contradiction avec le corollaire **2**.

## Ensembles de Lusin et le problème de la mesure.

**4.** Soient: $\mathbf{K}$ une classe de sous-ensembles d'un espace métrique $M$ et $\mu(K)$ une fonction non négative (finie), définie pour tout $K \in \mathbf{K}$.

[8]) Cette notion provient de MM. Russell et Whitehead.

[9]) $\varphi(x)$ étant une fonction qui transforme un ensemble $X$ en un sous-ensemble d'un ensemble $Y$, $E$ — un sous-ensemble de $X$ et $\mathbf{K}$ — une classe de sous-ensembles de $X$, on désigne par $\varphi(E)$ l'ensemble des points $\varphi(x)$, où $x \in E$ et par $\varphi(\mathbf{K})$ la classe des ensembles $\varphi(E)$, où $E \in \mathbf{K}$.

[10]) D'autre part M. Sierpiński a démontré qu'il résulte de l'hypothèse du continu que les classes $\mathbf{N}(\mathbf{B})$ et $\mathbf{N}(\mathbf{L})$ sont semblables. Cf. son livre cité, p. 80.



Nous allons considérer les conditions suivantes:

1°. Si $K_n \in \mathbf{K}$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on a $K_1 + K_2 + \ldots \in \mathbf{K}$;
2°. Si $K \in \mathbf{K}$, on a $M - K \in \mathbf{K}$;
3°. Chaque sous-ensemble ouvert de $M$ appartient à $\mathbf{K}$;
4°. $\mu(K_1 + K_2 + \ldots) = \mu(K_1) + \mu(K_2) + \ldots$ pour chaque suite d'ensembles disjoints appartenant à $\mathbf{K}$;
5°. Pour tout ensemble $K$, composé d'un seul point, $\mu(K) = 0$;
6°. Si $K \supset L$; $K \in \mathbf{K}$ et $\mu(K) = 0$, on a $L \in \mathbf{K}$.

***Théorème.*** [11]) *Soient: $M$ un espace métrique séparable, $\mathbf{K}$ une classe de sous-ensemble de $M$, $\mu(K)$ une fonction non negative définie pour $K \in \mathbf{K}$, satisfaisant aux conditions 1°—6° et $L$ un sous-ensemble de Lusin de $M$. Thèse: $\mu(L) = 0$.*

Démonstration [12]). En vertu du théorème **1** il existe un sous-ensemble $K$ de $M$, étant un $F_\sigma$ de première catégorie et tel que

$$\mu(M - K) = 0. \tag{1}$$

On a

$$L = LK + (L - K).$$

$L$ étant un ensemble de Lusin dans $M$, l'ensemble $LK$ est au plus dénombrable. Par conséquent, les conditions 1°—5° entraînent

$$LK \in \mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mu(LK) = 0. \tag{2}$$

En vertu de (1) et de la condition 6°, on a

$$L - K \in \mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mu(L - K) = 0. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) nous donnent:

$$L \in \mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mu(L) = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Il résulte immédiatement de notre théorème que $M$ étant un espace métrique, $\mu^*(E)$ une fonction de mesure au sens de M. Carathéodory (Massfunktion) [13]) définie pour $E \subset M$, finie et s'annulant pour les ensembles se réduisant à un point — $\mu^*(E)$ s'annulle pour tout sous-ensemble de Lusin de $M$.

[11]) Ce résultat n'est pas nouveau: M. Poprougénko a démontré un théorème plus général; voir le numéro **8**.

[12]) Cette démonstration n'est qu'une transposition de la démonstration connue, concernant la mesure lebesguienne.

[13]) Cf. C. Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1927, p. 238.

**5. *Corollaire.*** *Chaque ensemble métrique séparable de Lusin satisfait à la condition* $(\gamma)$.

Démonstration. Soient: $L$ un ensemble métrique séparable de Lusin et $\mu(E)$ une fonction réelle (finie), définie pour tout $E \subset L$, complètement adoitive et s'annulant pour tout ensemble se réduisant à un point. En vertu d'un théorème connu, la fonction $\mu(E)$ est une différence de deux fonction *non négatives* $\mu_1(E)$ et $\mu_2(E)$, satisfaisant aux mêmes conditions [14]). Ces fonctions remplissent donc les conditions 1⁰—6⁰ (où $\mathsf{K}$ est égale à la classe de *tous* les sous-ensembles de $L$). Il résulte donc du théorème 4 que $\mu(L) = \mu_1(L) - \mu_2(L) = 0$, c. q. f. d.

Or, la condition $(\gamma)$ est un invariant des transformations biunivoques. Il en résulte que dans le cas, où *un* ensemble satisfait à cette condition, *chaque* ensemble de même puissance la remplit également. Donc, *il découle de l'hypothèse qu'il existe un ensemble séparable de Lusin de puissance du continu que tout ensemble de cette puissance satisfait à la condition* $(\gamma)$. Par conséquent du théorème I de M. Lusin résulte immédiatement le théorème II de MM. Banach et Kuratowski.

**6.** D'après le théorème II, il résulte de l'hypothèse du continu que l'intervalle $I$ remplit la condition $(\gamma)$. Nous pouvons démontrer à présent un théorème plus fort: si l'hypothèse du continu est vrai, il n'existe, en dehors de la fonction identiquement nulle, aucune fonction réelle (finie), complètement additive et s'annulant pour les ensembles composé d'un seul point, *définie pour les ensembles jouissant de la propriété de Baire.*

Supposons, en effet, que $\mu(E)$ est une fonction remplissant ces conditions. Il existe donc une décomposition $I = K + H$, où $K$ est de première catégorie et $\mu(H) = 0$. Comme tout sous-ensemble de $K$ est de première catégorie, $\mu(E)$ est une fonction complètement additive dans la famille de tous les sous-ensembles de $K$ et par conséquent le théorème II entraîne la relation: $\mu(K) = 0$. On a donc $\mu(I) = \mu(K) + \mu(H) = 0$, c. q. f. d.

[14]) Cf. S. Saks: *Théorie de l'Intégrale*, Monografje Matematyczne **2**, Warszawa 1933, p. 249, (3. 2).



## La continuité uniforme des fonctions complétement additives et la propriété $(C)$.

**7.** Nous allons démontrer le suivant théorème dû à M. Saks [15]):

***Théorème.*** *Soient* $\mathsf{K}$ *une classe de sous-ensembles d'un espace métrique* $M$ *et* $\mu(K)$ *une fonction non négative* [7]) *(finie), définie pour* $K \in \mathsf{K}$ *et satisfaisant aux conditions* 1⁰, 2⁰, 4⁰ *et* 5⁰. *Dans ce cas-là il existe pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *un nombre* $\eta > 0$ *tel que les relations:* $K \in \mathsf{K}$ *et* $\delta(K) < \eta$ *entraînent* $\mu(K) < \varepsilon$.

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ et une suite $K_n$ d'ensembles de $\mathsf{K}$ telle qu'on a simultanément:

$$\delta(K_n) < \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

et

$$\mu(K_n) \geqslant \alpha \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Considérons la limite supérieure de la suite $\{K_n\}$:

$$L = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} K_n. \tag{3}$$

Evidemment

$$\mu\left(\sum_{n=m}^{\infty} K_n\right) \geqslant \alpha \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots$$

et, vu qu'on a

$$\mu\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n=\infty} \mu(E_n)$$

pour chaque suite $\{E_n\}$ descendante, nous obtenons

$$\mu(L) \geqslant \alpha. \tag{4}$$

Soit à présent $S$ un sous-ensemble fini de $L$. Désignons ses points par $p_1, p_2, \ldots, p_s$ et par $2\varepsilon$ le minimum de toutes les distances entre ces points.

[15]) Ce théorème est connu pour le cas d'espace $M$ compact. Cf. G. Poprougénko: *Sur certains propriétés des fonctions additives d'ensemble*, Comptes Rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie **23** (1930), théorème IV.

On a en vertu de (1): $\delta(K_n) < \varepsilon$ pour $n > \frac{1}{\varepsilon}$ et par conséquent il existe une suite finie $n_1, n_2, \ldots, n_s$ de nombres naturels plus grands que $\frac{1}{\varepsilon}$, tels que $p_i \epsilon K_{n_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots s$ et que tous les ensembles $K_{n_i}$ sont disjoints deux à deux. Il en résulte que

$$\mu(M) \geqslant \mu\left(\sum_{i=1}^{s} K_{n_i}\right) \geqslant s\alpha$$

et par conséquent:

$$s \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \mu(M).$$

Nous venons donc de démontrér que le nombre de points d'un sous-ensemble fini arbitraire de $L$ ne dépasse pas $\frac{1}{\alpha}\mu(M)$, d'où il résulte que l'ensemble $L$ est fini. On a donc $\mu(L) = 0$, contrairement à l'inégalité (4).

**8.** Considérons à présent la condition suivante concernant les ensembles métriques $Z$:

($C$) *$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant une suite quelconque de nombres positifs, il existe une décomposition $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots$ telle qu'on a $\delta(Z_n) < \varepsilon_n$* [16]) *pour* $n = 1, 2, \ldots$

Vu que tout ensemble de diamètre $< \varrho$ est contenu dans une sphère de diamètre $< 2\varrho$, cette condition peut être énoncée aussi de façon suivante:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant une suite quelconque de nombres positifs, il existe une suite $V_1, V_2, \ldots$ de sphères telle que $\sum_{n=1}^{\infty} V_n \supset Z$ et $\delta(V_n) < \varepsilon_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$

M. Borel a posé le problème de l'existence des ensembles indénombrables satisfaisant à la condition ($C$). On ne sait pas résoudre ce problème jusqu'à présent qu'en admettant l'hypothèse du continu. Notamment M. Sierpiński a démontré que *tout sous-ensemble de Lusin d'un espace métrique séparable satisfait à la condition* ($C$) [17]).

[16]) $E$ étant un espace métrique, $\delta(E)$ désigne son diamètre.

[17]) Cf. Sierpiński l. c., p. 39 et Kuratowski: *Topologie I*, Monografje Matematyczne **3**, Warszawa-Lwów 1933, p. 274. En outre, à l'étude des ensembles jouissant de la propriété ($C$) sont consacrées les notes suivantes:

W. Sierpiński: *Sur une classe d'ensembles de mesure nulle.* C. R. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie **27** (1934), à paraître;

E. Szpilrajn: *Sur une hypothèse de M. Borel.* Fund. Math. **15** (1930), pp. 126—127;

— *Sur une classe d'ensembles linéaires.* C. R. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie **22** (1929), pp. 179—184.



Or, M. Poprougénko a démontré le suivant théorème (duquel il résulte, en vertu du résultat cité de M. Sierpiński, notre théorème **4**).

***Théorème.*** *Dans les conditions du théorème* **4**, $\mu(Z) = 0$ *pour tout ensemble $Z$ contenu dans $M$, et satisfaisant à la condition* ($C$).

Démonstration. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite arbitraire de nombre positifs. Il existe, d'après le théorème **7**, une suite $\eta_1, \eta_2 \ldots$ de nombres positifs tels que les relations: $K \epsilon \mathbf{K}$ et $\delta(K) < \eta_m$ entraînent $\mu(K) < \varepsilon_m$ pour $m = 1, 2, \ldots$ L'ensemble $Z$ satisfaisant à la condition ($C$), il existe une suite $\{V_n\}$ de sphères tels que $\sum_{n=1}^{\infty} V_n \supset Z$ et $\delta(V_n) < \varepsilon_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Soit donc $\{V_n^{(k)}\}$ (pour $k = 1, 2, \ldots$) une suite de sphères telle qu'on a

$$\mu(V_n^{(k)}) < \frac{1}{k \cdot 2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(k)} \supset Z.$$

Posons

$$W = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(k)}.$$

On a donc $\mu(W) = 0$ et — d'après la condition 6° — $\mu(Z) = 0$, c. q. f. d.

Appliquons à ce résultat le raisonnement fait à la fin du numéro **4**. Il en résulte que, s'il existe un ensemble de puissance du continu remplissant la condition ($C$) — tout ensemble de cette puissance satisfait à la condition ($\gamma$).