Si le tranches de la fonction f ne coupent pas la sphère S_2, les tranches de la fonction h ne la coupent non plus. D'après le théorème de R. L. Moore [14]), $h(S_2)$ est donc homéomorphe à S_2. On a par conséquent $\dim h(S_2) = 2$, d'où en vertu de (1)

$$\dim f(S_2) \geqslant 2,$$

c. q. f. d.

[14]) *Concerning upper semi-continous collection of continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), p. 146. Voir aussi C. Kuratowski, *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII (1929), p. 318.

Varsovie, Mars 1934.

Sur les décompositions des continus en ensembles connexes.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Je me propose de généraliser ici un théorème de M. S. Mazurkiewicz [1]), d'après lequel tout continu localement connexe contient au moins deux points dont aucun ne le coupe. En remplaçant le terme „coupe" par „divise" [2]), ce qui est dans les continus localement connexes la même chose [3]), le théorème de M. Mazurkiewicz subsiste, comme on sait, pour les continus (c. à d. ensembles connexes et compacts) arbitraires. Je le déduis ici comme corollaire 1 du théorème 1, qui concerne les décompositions des continus en une famille de puissance quelconque (> 1) d'ensembles connexes.

Le théorème 2 concerne le cas où cette famille est finie et l'ensemble à décomposer est connexe (séparable ou non).

Théorème 1. *Etant donnée une famille d'(au moins deux) ensembles connexes C_x formant un continu:*

$$K = \sum_x C_x,$$

[1]) *Un théorème sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. II (1921), p. 119. Voir aussi C. Kuratowski, *Contribution à l'étude des continus de Jordan*, Fund. Math. V (1924), p. 113 et H. M. Gehman, *Concerning irreducible continua*, Proc. Nat. Acad. Sc. (1928). p. 434, Corollary 2*a*. C'est la démonstration de M. Kuratowski qui a été le point de départ pour ma généralisation.

[2]) Un ensemble connexe E est *divisé* par son sous-ensemble S, lorsque l'ensemble $E - S$ n'est pas connexe.

[3]) Voir C. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fund. Math. IX (1927), p. 135, th. 5.

il existe toujours au moins deux indices x' et x'' tels que les ensembles

$$\sum_{x \neq x'} C_x \quad \text{et} \quad \sum_{x \neq x''} C_x$$

sont connexes.

Démonstration. Posons d'une façon générale

$$L_x = \sum_{\xi \neq x} C_\xi$$

et soit

(1) $$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

une suite de points *dense* dans K.

Le théorème serait évidemment vrai, si *chaque* L_x était connexe. Nous pouvons donc nous borner au cas où il existe un x_0 tel que

(2) $$L_{x_0} = P_0 + R_0 \quad \text{où} \quad \overline{P}_0 R_0 + P_0 \overline{R}_0 = 0 \quad \text{et} \quad P_0 \neq 0 \neq R_0.$$

Il suffit d'établir l'existence dans P_0 d'un ensemble $C_{x'}$ tel que $L_{x'}$ soit connexe, car par raison de symétrie R_0 contiendra alors un autre ensemble $C_{x''}$ de ce genre.

A ce but, nous allons définir par induction quatre suites:

(3) $$\begin{matrix} p_{i_1}, & p_{i_2}, \ldots, & p_{i_n}, \ldots \\ x_0, & x_1, & x_2, \ldots, & x_n, \ldots \\ P_0, & P_1, & P_2, \ldots, & P_n, \ldots \\ R_0, & R_1, & R_2, \ldots, & R_n, \ldots \end{matrix}$$

de façon que les quatre conditions suivantes se trouvent remplies:

(4) $p_{i_{n+1}}$ *est le premier des termes de la suite* (1) *qui appartiennent à* $P_n - C_{x_n}$

(5) $$L_{x_n} = P_n + R_n \quad \text{où} \quad \overline{P}_n R_n + P_n \overline{R}_n = 0 \quad \text{et} \quad P_n \neq 0 \neq R_n,$$

(6) $$p_{i_{n+1}} \in C_{x_{n+1}}$$

(7) $$C_{x_n} + R_n \subset R_{n+1}.$$

Or, comme on a par définition $K = L_{x_n} + C_{x_n}$, on conclut de (5) que

(8) $$K = P_n + C_{x_n} + R_n,$$

d'où, P_n et R_n étant séparés selon (5) et C_{x_n} étant connexe par hypothèse, il vient [4]) que

(9) *l'ensemble* $C_{x_n} + R_{x_n}$ *est connexe.*

D'autre part, on a en vertu de (6) et (4) $p_{i_{n+1}} \in C_{x_{n+1}} - C_{x_n}$, d'où $x_{n+1} \neq x_n$ et par conséquent $C_{x_{n+1}} \subset L_{x_n}$. Par suite de connexité de $C_{x_{n+1}}$ la relation $p \in P_n \cdot C_{x_{n+1}}$ entraine selon (5) $C_{x_{n+1}} \subset P_n$ et comme on a d'après (5), (7) et (8) $P_{n+1} \subset P_n$, on trouve

(10) $$C_{x_{n+1}} + P_{n+1} \subset P_n.$$

Enfin, on tire de (6) et (7) la relation $p_{i_{n+1}} \in R_{n+2}$, d'où selon (4) et (5)

(11) $$p_{i_{n+1}} \in P_{n+1} - P_{n+2}.$$

Ceci dit, remarquons que les conditions (4)—(7) sont vraies, en vertu de (2), pour x_0, P_0 et R_0 et admettons que ces conditions, donc aussi leurs conséquences (8)—(11), soient vraies également pour x_{i_j}, P_j et R_j où $j \leqslant n$.

Eliminons aussitôt le cas où $P_n - C_{x_n}$ ne contient aucun point de la suite (1), dense dans K, car on aurait alors $\overline{K - P_n + C_{x_n}} = K$, d'où selon (8) $K = \overline{C_{x_n} + R_n}$, de sorte que pour tout x' tel que $C_{x'} \subset P_n$ on aurait $C_{x'} \subset L_{x_n}$, donc $x' \neq x_n$ et par conséquent $C_{x_n} \subset L_{x'}$; comme on a d'après (5) $P_n R_n = 0$, il viendrait $R_n \subset L_{x'}$, donc $C_{x_n} + R_n \subset L_{x'} \subset K = \overline{C_{x_n} + R_n}$, d'où, en vertu de (9), la connexité de $L_{x'}$ et, comme on a d'après (10) $P_n \subset P_0$, l'existence dans P_0 d'un $C_{x'}$ cherché serait ainsi établie.

Or, si $P_n - C_{x_n}$ contient des points appartenant à la suite (1), nous en désignerons le premier par $p_{i_{n+1}}$, conformément à la condition (4). Puis, conformément à (6), x_{n+1} nous désignera un indice quelconque pour lequel $p_{i_{n+1}} \in C_{x_{n+1}}$.

Restent à définir les ensembles P_{n+1} et R_{n+1}. Comme $p_{i_{n+1}}$ non-$\in C_{x_n}$, on a $C_{x_n} \neq C_{x_{n+1}}$, d'où

(12) $$C_{x_n} \subset L_{x_{n+1}}.$$

[4]) B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II (1921), p. 208, th. VI.

En cas où $L_{x_{n+1}}$ était connexe, on se trouverait, en posant $x'=x_{n+1}$, encore dans le cas d'existence de l'ensemble cherché $C_{x'}$, puisque $C_{x_{n+1}} \subset L_{x_n}$ et $C_{x_{n+1}} P_n \neq 0$, donc, par suite de connexité de $C_{x_{n+1}}$, on aurait $C_{x_{n+1}} \subset P_n \subset P_0$ selon (5) et (10). On peut donc admettre que

$$L_{x_{n+1}} = A + B \quad \textit{où} \quad \bar{A}B + A\bar{B} = 0 \quad \textit{et} \quad A \neq 0 \neq B.$$

Comme d'après (5) $P_n R_n = 0$, il vient $R_n \subset L_{x_{n+1}}$, d'où selon (12) $C_{x_n} + R_n \subset L_{x_{n+1}}$, et comme l'ensemble $C_{x_n} + R_n$ est connexe en vertu de (9), il est contenu dans un seul des ensembles A et B. Nous désignerons par B cet ensemble et poserons $P_{n+1} = A$ et $R_{n+1} = B$, de sorte que les conditions (5) et (7) se trouvent réalisées.

Les suites (3) étant ainsi définies, soient

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} P_n \quad \textit{et} \quad R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n. \tag{13}$$

Il en résulte selon (5) que

$$PR = 0 \tag{14}$$

et d'après (7) que

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{x_n} + R_n), \tag{15}$$

ce qui implique en vertu de (9) et (7) que

(16) *l'ensemble R est connexe.*

Il vient en même temps selon (8)

$$K = P + R \tag{17}$$

et comme on a selon (5) $\bar{P}R = 0$, d'où $(\prod\limits_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n)$. $R = 0$, on obtient de (13), (14) et (16) $P = \prod\limits_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n$, et on en tire aussitôt en vertu du théorème de Cantor (les ensembles P_n étant d'après (10) non vides)

$$P \neq 0. \tag{18}$$

Or, P ne contient aucun point de la suite (1), car les éléments de la suite $\{p_{i_n}\}$ étant en vertu (10) et (11) distincts deux à deux, il existerait pour $p_j \in P$ un indice $i_{n+1} > j$ tel que $p_{i_{n+1}} \neq p_j$; on aurait donc $p_j \lessgtr p_{i_{n+1}}$ et en même temps, en vertu de (14) et (15), $p_j \in P \subset P_n - R \subset P_n - C_{x_n}$, ce qui est incompatible avec (4). La suite (1) étant dense dans K, on conclut donc de (14) et (17) que

$$\bar{R} = K. \tag{19}$$

Ceci établi, soit x' un indice pour lequel $C_{x'} P \neq 0$. Un tel x' existe en vertu de (18), puisque $K = \sum\limits_x C_x$. Pour tout $n = 1, 2, \ldots$ on a donc selon (14) et (15) $C_{x'} \neq C_{x_n}$, d'où $C_{x'} \subset L_{x_n}$, et comme selon (10) et (13) $C_{x'} P_n \supset C_{x'} P \neq 0$, la connexité de $C_{x'}$ donne en raison de (5) $C_{x'} \subset P_n$, d'où selon (13) $C_{x'} \subset P$. Il en résulte en vertu des égalités (14), (17) et (18) que $R \subset L_{x'} \subset K = \bar{R}$, ce qui entraîne selon (16) la connexité de $L_{x'}$. En même temps $C_{x'} \subset P \subset P_0$, c. q. f. d.

On voit sans peine que si l'ensemble L_{x_0} [5]) admet $\geqslant k$ composantes, la méthode employée permet d'indiquer k indices $x', x'', \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^{(k)}$ tels que les ensembles $L_{x^{(i)}}$ soient connexes [6]).

Il est à remarquer que dans le cas particulier où la famille des ensembles C_x est finie, l'hypothèse que K est compact, ou même seulement séparable, est superflue, car l'induction est alors également finie et il suffit en conséquence, comme on voit aisément, de définir les suites $\{x_n\}$, $\{P_n\}$ et $\{R_n\}$ de façon qu'elles remplissent les conditions (5) et (7). On est conduit ainsi au

[5]) voir formule (2), p. 298.

[6]) Cf. C. Kuratowski, l. c., p. 115, remarque. Ajoutons à ce propos que par une induction facile on arrive à montrer que dans le cas où il existe au moins n indices différents $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tels que chacun des ensembles L_{x_i} où $i = 1, 2, \ldots, n$ admet au moins $k_i > 1$ composantes, l'ensemble K contient au moins

$$2 + \sum_{i=1}^{n} (k_i - 2)$$

ensembles L_x qui sont *connexes*.

Pour voir que ce nombre ne peut être augmenté dans le cas général, il suffit d'envisager l'exemple de la famille des ensembles C_x formés de points idividuels de la dendrite

$$\overline{(0,0)(n+1,0)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j+1}^{k_i} \overline{(i,0)\left(i+\frac{1}{j}, 1\right)}.$$

Théorème 2. *Etant donnée une décomposition d'un ensemble connexe C en $n \geqslant 2$ ensembles connexes*

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

il existe au moins deux indices différents i' et i'' tels que les ensembles

$$\sum_{i \neq i'}^{n} C_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \neq i''}^{n} C_i$$

sont connexes.

Désignons avec M. C. Zarankiewicz [7]) par $\tau'(C)$ l'ensemble des points d'un ensemble connexe C tels que $C-(p)$ est encore un ensemble connexe.

On a alors deux conséquences suivantes du théorème 1:

Corollaire 1. *Dans tout continu K l'ensemble $\tau'(K)$ contient $\geqslant 2$ points.*

Pour l'établir, il suffit d'appliquer le théorème 1 à la famille formée de points du continu K.

Corollaire 2. *Dans tout continu K on a $\tau'(K) - Q \neq 0$, quel que soit le vrai sous-ensemble connexe Q de K.*

Pour le prouver, il suffit d'appliquer le théorème 1 à la famille composée de Q et de points de l'ensemble $K-Q$.

Le corollaire 2 montre que tout continu K est irréductible par rapport à la propriété d'être un ensemble connexe contenant l'ensemble $\tau'(K)$ [8]).

[7]) voir l. c., Fund. Math. IX, p. 124 et 135.
[8]) H. M. Gehman, l. c., p. 435, Corollary 2b.

Varsovie, Mars 1934.

Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire [1]).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

Introduction.

Les ensembles de mesure lebesguienne nulle et les ensembles mesurables (L) d'une part, et d'autre part les ensembles de première catégorie et ceux jouissant de la propriété de Baire (au sens large) [2]) présentent, comme on sait, beaucoup d'*analogies* [3]). Et voici un théorème connu, relative à ces classes, qui porte un caractère de *dualité:*

(t) Il existe une décomposition de la droite en deux ensembles dont l'un est de mesure nulle et l'autre de première catégorie [4]).

Je démontre dans la note présente un théorème plus général, concernant les fonctions complètement additives d'ensembles et je donne plusieurs applications de ce théorème. Elles se rattachent en

[1]) Une partie des résultats contenus dans cette note a été signalée dans ma communication *O mierzalności i warunku Baire'a,* faite au I[er] Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves (cf. C. R. de ce Congrès, Varsovie 1930, p. 300); les autres ont été présentés dans la séance de la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie), le 26. I. 1934.

[2]) c'est-à-dire les ensembles de la forme $G + K_1 - K_2$, où G est un ensemble ouvert et K_1 avec K_2 — de première catégorie.

[3]) Cf. le livre de M. W. Sierpiński: *Hypothèse du continu*, Monografje Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, chap. III; ma communication citée et ma note *Sur certains invariants de l'opération* (A), Fund. Math. **21** (1933), p. 229.

[4]) M. Sierpiński a démontré deux théorèmes qui présentent certaines généralisations de cette proposition. Cf. p. ex. son livre cité, p. 83.