Sur les transformations continues d'espaces métriques compacts.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Le théorème général que j'établis dans cette Note permet d'obtenir par une voie très simple la démonstration d'un théorème de M. K. Borsuk, ainsi qu'un résultat sur les transformations de la surface sphérique, qui semble être nouveau.

Les lettres f, g et h désigneront les transformations (fonctions) *continues* d'un espace donné X et les lettres $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$ les décompositions semi-continues de X en „tranches" dans le sens de M. C. Kuratowski [1]) („Urbildmengen" des auteurs allemands) de la forme $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ et $h^{-1}(x)$ où $x \epsilon f(X)$, $x \epsilon g(X)$ et $x \epsilon h(X)$ respectivement.

Théorème 1. *Chaque transformation continue f d'un espace métrique et compact E se laisse représenter comme superposition de deux transformations*

$$f(x) = gh(x) \quad \text{où} \quad x \epsilon E$$

telles que les tranches de la décomposition $\boldsymbol{F}$ de E aient pour composantes celles de la décomposition $\boldsymbol{H}$ et que les tranches de la décomposition $\boldsymbol{G}$ de $h(E)$ soient de dimension nulle.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{H}$ la décomposition de l'espace E en composantes des tranches de la décomposition $\boldsymbol{F}$. Nous allons montrer

[1]) *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques et compacts*, Fund. Math. XI (1928), p. 169. Cette théorie des décompositions semi-continues sera souvent appliquée dans la suite. J'en emprunte aussi la terminologie.

que la décomposition $\boldsymbol{H}$ est semi-continue. Soit à ce but $T, T_1, T_2, \ldots$ une suite de tranches de $\boldsymbol{H}$ telles que

$$(1) \qquad T \cdot \mathrm{Li}\, T_n \neq 0 \text{ [2])}.$$

D'après la définition de la décomposition $\boldsymbol{H}$, les ensembles $T, T_1, T_2, \ldots$ sont des composantes des tranches $T', T_1', T_2', \ldots$ de la décomposition $\boldsymbol{F}$ et on a selon (1) $T' \cdot \mathrm{Li}\, T_n' \neq 0$.

La décomposition $\boldsymbol{F}$ étant semi-continue, on a [3]) $\mathrm{Ls}\, T_n' \subset T'$.

En vertu de (1), $\mathrm{Ls}\, T_n$ est un continu [4]). T est donc une composante de l'ensemble T' telle que $T \cdot \mathrm{Ls}\, T_n \supset T \cdot \mathrm{Li}\, T_n \neq 0$, d'où $\mathrm{Ls}\, T_n \subset T$, ce qui prouve que la décomposition $\boldsymbol{H}$ est semi-continue.

Soit h la fonction continue qui tranforme E en hyper-espace de la décomposition $\boldsymbol{H}$.

Posons

$$(2) \qquad g(x) = fh^{-1}(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon h(E).$$

Comme tranche de la décomposition $\boldsymbol{H}$ l'ensemble $h^{-1}(x)$ est contenu dans une tranche de la décomposition $\boldsymbol{F}$. Il en résulte que les valeurs de la fonction g sont des points de l'espace $f(E)$. On a $gh(x) = fh^{-1}h(x)$ selon (2) et $h^{-1}h(x) \subset f^{-1}f(x)$ d'après la définition de la fonction h. On obtient donc $gh(x) \subset ff^{-1}f(x)$ et finalement

$$f(x) = gh(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon E.$$

Nous allons démontrer que la fonction g est continue. Les espaces $h(E)$ et $gh(E) = f(E)$ étant compacts, il suffit de montrer que si une suite $\{x_n\}$ de points de l'espace $h(E)$ converge vers le point x, en même temps que la suite $\{g(x_n)\}$ converge vers $g(x')$, alors on a $g(x) = g(x')$.

Supposons, par contre, que l'on ait $g(x) \neq g(x')$. Par conséquent $f^{-1}g(x) \cdot f^{-1}g(x') = 0$, d'où selon (2)

$$(3) \qquad f^{-1}fh^{-1}(x) \cdot f^{-1}fh^{-1}(x') = 0.$$

La suite $\{x_n\}$ converge vers x, ce qui donne $\mathrm{Ls}\, h^{-1}(x_n) \subset h^{-1}(x)$, d'où $h^{-1}(x) \cdot \mathrm{Ls}\, h^{-1}(x_n) \neq 0$.

[2]) Je me sers des symboles $\mathrm{Li}\, A_n$ et $\mathrm{Ls}\, A_n$ de C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem., Varsovie 1933, p. 152—153, au lieu des symboles Lim inf et Lim sup, qu'on emploie d'habitude.

[3]) Voir C. Kuratowski, l. cit. [1]), th. I.

[4]) Je m'appuis sur le lemme suivant, dû a S. Janiszewski: *Etant donnée dans un espace métrique et compact une suite de continus A_n tels que* $\mathrm{Li}\, A_n \neq 0$, *l'ensemble* $\mathrm{Ls}\, A_n$ *est un continu.* Cf. S. Janiszewski, *Thèse*, Paris 1911, p. 19.

On en tire

$$f^{-1}fh^{-1}(x)\cdot \mathrm{Ls}\, f^{-1}fh^{-1}(x_n) \neq 0, \tag{4}$$

puisque pour tout $Y \subset E$ on a $Y \subset f^{-1}f(Y)$. La suite $\{g(x_n)\}$ convergeant vers $g(x')$, il vient $\mathrm{Ls}\, f^{-1}g(x_n) \subset f^{-1}g(x')$ et d'après (2) $\mathrm{Ls}\, f^{-1}fh^{-1}(x_n) \subset f^{-1}fh^{-1}(x')$, contrairement à (3) et (4).

Il reste a démontrer que pour tout $x \in f(E)$ l'ensemble $g^{-1}(x)$ est 0-dimensionnel. Vu sa compacticité, il suffit de montrer que chacun de ses sous-continus se réduit à un point.

Soit donc C un continu tel que $0 \neq C \subset g^{-1}(x)$. L'ensemble $h^{-1}(C)$ est un continu [5]), car les tranches de la décomposition $\boldsymbol{H}$ sont des continus par définition. D'autre part, on a

$$h^{-1}(C) \subset f^{-1}fh^{-1}(C) = f^{-1}g(C) = f^{-1}(x) \in \boldsymbol{F},$$

d'où il résulte que le continu $h^{-1}(C)$ est situé dans une seule composante d'une tranche de la décomposition $\boldsymbol{F}$. Ainsi $h^{-1}(C)$ se trouve contenu dans une tranche de la décomposition $\boldsymbol{H}$, ce qui prouve que $C = hh^{-1}(C)$ se compose d'un seul point, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'en vertu du théorème connu de M. W. Hurewicz [6]) on a

$$\dim f(E) \geqslant \dim h(E). \tag{*}$$

Cette formule montre que le th. 1 qui vient d'être établi permet de représenter toute transformation continue sous la forme d'une superposition de deux transformations dont la deuxième n'abaisse pas le nombre de dimensions. Cette circonstance semble être susceptible de rendre quelques services dans le domaine des ainsi dites *transformations essentielles* („wesentliche Abbildungen"), surtout lorsqu'il s'agit des transformations d'ensembles en surfaces sphériques n-dimensionnelles. La raison en est que la nature des transformations essentielles d'espaces métriques compacts en surfaces des sphères euclidiennes se laisse saisir au moyen des notions basées sur celle d'homologie [7]), ce qu'on ne peut pas affirmer dans le cas général [8]).

[5]) C. Kuratowski, l. cit. [1]), th. X.

[6]) W. Hurewicz, *Über stetige Bilder von Punktmengen*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. XXX (1927), p. 163, th. III et K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1928, p. 235.

[7]) P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 223, Hauptsatz.

[8]) Cf. H. Hopf, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. 104 (1931), p. 637—665.

Dans le cas particulier où il s'agit d'une transformation en „surface" à une dimension S_1 (c. à d. en circonférence), le théorème 1 nous permet d'obtenir par une voie très simple le théorème suivant de M. K. Borsuk [9]):

Si le continu localement connexe E ist unicohérent, l'espace S_1^E [10]) *est connexe.*

En effet, soit $f \in S_1^E$. Considérons les transformations g et h, données par le théorème 1. L'espace $h(E)$ est un continu localement connexe et d'après (*) on a $\dim h(E) \leqslant 1$, puisque $\dim f(E) \leqslant \leqslant \dim S_1 = 1$. Les tranches de la transformation h étant des continus, l'espace $h(E)$ est unicohérent [11]) et par conséquent [12]) une dendrite. Or, d'après un théorème de M. K. Borsuk [13]), l'espace $S_1^{h(E)}$ est alors connexe.

Ceci établi, considérons un point arbitraire $a \in S_1$ et posons $f'(x) = a$ pour $x \in E$ et $g'(x) = a$ pour $x \in h(E)$. Soit Φ la famille de fonctions f^* de la forme $f^* = g^*h$ où $g^* \in S_1^{h(E)}$. L'espace $S_1^{h(E)}$ étant connexe, il est évident que Φ constitue un sous-ensemble connexe (même homéomorphe à $S_1^{h(E)}$) de S_1^E. Comme $f = gh$, $f' = g'h$ et $g, g' \in S_1^{h(E)}$, d'où $f, f' \in \Phi$, il en résulte que l'espace S_2^E est connexe, c. q. f. d.

Le théorème 1 fournit le suivant

Théorème 2. *Si f est une transformation continue de la surface sphérique S_2 et aucune tranche de f ne coupe S_2, alors on a*

$$\dim f(S_2) \geqslant 2.$$

Démonstration. D'après le théorème 1 et la relation (*) il vient $f(x) = gh(x)$ pour $x \in S_2$, de sorte que les tranches de la fonction h sont des composantes des tranches de la fonction f et

$$\dim f(S_2) \geqslant \dim h(S_2). \tag{5}$$

[9]) *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XVII (1931), p. 195, § 38. Nous ne citons ici qu'une partie du théorème de M. Borsuk, qui a la forme d'une condition nécessaire et suffisante.

[10]) A^B désigne ici l'espace des transformations continues de l'ensemble B en sous-ensembles de A. Dans la note précitée de M. K. Borsuk ce sens est assigné au symbole $\Phi_A(B)$.

[11]) C. Kuratowski, l. cit. [1]), p. 182, corollaire II, 4°.

[12]) K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig-Berlin 1932, p. 306.

[13]) K. Borsuk, *Einige Sätze über stetige Streckenbilder*, Fund. Math. XVIII (1932), p. 206, Hauptsatz 2.

Si le tranches de la fonction f ne coupent pas la sphère S_2, les tranches de la fonction h ne la coupent non plus. D'après le théorème de R. L. Moore[14]), $h(S_2)$ est donc homéomorphe à S_2. On a par conséquent $\dim h(S_2) = 2$, d'où en vertu de (1)

$$\dim f(S_2) \geqslant 2,$$

c. q. f. d.

[14]) *Concerning upper semi-continous collection of continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), p. 146. Voir aussi C. Kuratowski, *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII (1929), p. 318.

Varsovie, Mars 1934.

Sur les décompositions des continus en ensembles connexes.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Je me propose de généraliser ici un théorème de M. S. Mazurkiewicz [1]), d'après lequel tout continu localement connexe contient au moins deux points dont aucun ne le coupe. En remplaçant le terme „coupe" par „divise" [2]), ce qui est dans les continus localement connexes la même chose [3]), le théorème de M. Mazurkiewicz subsiste, comme on sait, pour les continus (c. à d. ensembles connexes et compacts) arbitraires. Je le déduis ici comme corollaire 1 du théorème 1, qui concerne les décompositions des continus en une famille de puissance quelconque (>1) d'ensembles connexes.

Le théorème 2 concerne le cas où cette famille est finie et l'ensemble à décomposer est connexe (séparable ou non).

Théorème 1. *Etant donnée une famille d'(au moins deux) ensembles connexes C_x formant un continu:*

$$K = \sum_x C_x,$$

[1]) *Un théorème sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. II (1921), p. 119. Voir aussi C. Kuratowski, *Contribution à l'étude des continus de Jordan*, Fund. Math. V (1924), p. 113 et H. M. Gehman, *Concerning irreducible continua*, Proc. Nat. Acad. Sc. (1928). p. 434, Corollary $2a$. C'est la démonstration de M. Kuratowski qui a été le point de départ pour ma généralisation.

[2]) Un ensemble connexe E est *divisé* par son sous-ensemble S, lorsque l'ensemble $E - S$ n'est pas connexe.

[3]) Voir C. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fund. Math. IX (1927), p. 135, th. 5.