Posons $\mathcal{Y} = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$, $Y_i = \mathcal{Y} \cdot C_i$ et

$$Y_{i_1 \ldots i_k} = \mathcal{Y} \cdot C_{i_1 \ldots i_k} \quad \text{pour} \quad k > 1.$$

On vérifie facilement que le système d'ensembles $\{Y_{i_1 \ldots i_k}\}$ satisfait aux conditions (7) et (8) (en y remplaçant X par Y) et à la formule (10). Si l'on pose $F(X^k) = Y^k = \sum_{(i_1, \ldots, i_{k-1})} Y_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1}$, on définit donc une isomorphie en raison des énoncés du N° 3. En outre, les ensembles $Y_{i_1 \ldots i_k}$ sont évidemment ambigus de classe α par rapport à $\mathcal{Y}$.

Il en est encore de même de l'ensemble Y^k, qui est somme d'un nombre fini d'ensembles $Y_{i_1 \ldots i_k}$. On a enfin $X^k = \mathcal{X} \cdot Y^k$, car

$$\mathcal{X} \cdot Y^k = \sum_{(i_1 \ldots i_{k-1})} \mathcal{X} \cdot Y_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1} = \sum_{(i_1 \ldots i_{k-1})} \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} \cdot C_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1} = \sum_{(i_1 \ldots i_{k-1})} X_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1} = X^k.$$

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, on s'appuie sur la deuxième partie du théorème précité: notamment, la formule $\mathcal{X} = \sum_{(i_1 \ldots i_k)} X_{i_1 \ldots i_k}$, valable pour chaque k (cf. (7)), implique d'après ce théorème que A_k coïncide avec l'espace tout entier. Il en est donc de même de l'ensemble $\mathcal{Y} = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$, c. q. f. d.

Remarque. *La classe de l'ensemble $\mathcal{Y} = F(\mathcal{X})$ ne peut pas être abaissée.*

Soit, en effet, dans l'espace des nombres réels $\mathcal{X}$ = l'ensemble des nombres irrationnels et $X^1, X^2, \ldots$ la suite des intervalles de cet ensemble à extrémités rationnelles. Evidemment l'ensemble X^k est ambigu de classe 0 dans $\mathcal{X}$ (c. à d. qu'il y est fermé et ouvert). L'ensemble $\mathcal{X}$ est le seul ensemble qui peut être supposé égal à $\mathcal{Y} = F(\mathcal{X})$; en effet, Z étant un sur-ensemble arbitraire de $\mathcal{X}$, soit r un nombre rationnel appartenant à $Z - \mathcal{X}$ et supposons que r soit une extrémité de l'ensemble X^k; r appartient par conséquent à la frontière de $F(X^k)$ relative à Z, de sorte que $F(X^k)$ n'est pas ouvert dans Z.

Sur la décomposition des courbes régulières [1]) en dendrites.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

M. N. E. Steenrod a démontré récemment [2]) que toute courbe régulière qui est localement une dendrite [3]) se laisse décomposer en somme de deux dendrites. Dans cet ordre d'idées, je vais démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Il existe pour tout nombre naturel n une courbe plane d'ordre* [1]) *3 qui se laisse décomposer en n, mais pas en moins dendrites.*

Démonstration. Soient dans le plan des nombres complexes $z = x + iy$:

$$(1) \qquad S = \underset{z}{E}[|z| = 1]; \quad Q = \underset{z}{E}[|z| \leqslant 1],$$

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{k,j} = e^{2\pi i \frac{2j-1}{2^k}}; \quad b'_{k,j} = a_{k,j}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right); \\ L'_{k,j} = \underset{z}{E}[z = t \cdot a_{k,j} + (1-t)\, b'_{k,j}; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1], \end{cases}$$

[1]) Quant à la définition des courbes régulières, d'ordre ect. voir K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig u. Berlin, Teubner 1933, p. 96—98.

[2]) Bull. of the Amer. Math. Soc. 40 (1934), p. 47.

[3]) Ces courbes peuvent être définies comme continus péaniens qui ne contiennent qu'un nombre fini de courbes simples fermées. On prouve aisément aussi, qu'ils sont identiques avec les courbes localement contractiles (dans le sens de ma note de C. R. 194 (1932), p. 951) ou avec les courbes péaniennes dont le nombre undimensionnel de Betti est fini.

où $k=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots 2^{k-1}$. Les segments $L'_{k,j}$ étant disjoints deux à deux et leurs diamètres tendant avec $\frac{1}{k}$ vers 0, nous pouvons faire correspondre à chaque point $b'_{k,j}$ un nombre positif $r_{k,j}$ tel, que les cercles

(3) $$Q_{k,j}=E[|z-b'_{k,j}|\leqslant r_{k,j}]$$

sont disjoints deux à deux et aussi avec la circonférence S. Posons enfin:

(4) $$L_{k,j}=\overline{L'_{k,j}-Q_{k,j}};\quad b_{k,j}=L_{k,j}\cdot Q_{k,j}$$

et

(5) $$f_{k,j}(z)=(b_{k,j}-b'_{k,j})z+b'_{k,j}.$$

Notre théorème étant évidemment vrai dans le cas $n=1$, et tous les dendrites étant contractiles [4]) dans soi, la démonstration sera finie si nous établirons que à chaque $n\geqslant 2$ correspond une courbe C_n remplissante les conditions suivantes:

(6_n) $\begin{cases} C_n \text{ est une courbe plane d'ordre 3 telle que } S\subset C_n\subset Q \\ \text{et l'ordre de } C_n \text{ au point } z=1 \text{ est égal à 2,}\end{cases}$

(7_n) $\begin{cases} C_n \text{ ne se laisse pas décomposer en } n-1 \text{ ensembles fermés} \\ \text{contractiles en } C_n,\end{cases}$

(8_n) C_n est une somme de n dendrites.

Dans le cas $n=2$ les conditions (6_2)—(8_2) étant remplies par la courbe $C_2=S$, nous pouvons procéder par induction en admettant que la courbe C_n remplissant les conditions (6_n)—(8_n) existe. Posons

(9) $$C_{n+1}=S+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k-1}}[L_{k,j}+f_{k,j}(C_n)].$$

Il s'agit de prouver que C_{n+1} jouit des conditions (6_{n+1})—(8_{n+1}).

ad (6_{n+1}). Les conditions (5) et (6_n) impliquent que les ensembles

[4]) L'ensemble A est *contractile dans l'espace* E, lorsqu'il existe une fonction $f(x,t)$ définie pour $x\in A$ et $0\leqslant t\leqslant 1$, continue par rapport aux deux variables (x,t) prises simultanément et telle que: 1° $f(x,t)\in E$, 2° $f(x,0)=x$ et 3° $f(x,1)=$const. pour chaque $x\in A$ et $0\leqslant t\leqslant 1$. La contractilité des dendrites dans soi est une conséquence du fait que les dendrites sont des rétractes absolus (Cf. ma note, Fund. Math. 18 (1932), p. 211) et que tous les rétractes absolus sont contractiles dans soi. (Cf. ma note, Fund. Math. 17 (1931), p. 170).

$P_{k,j}=L_{k,j}+f_{k,j}(C_n)$ sont les courbes d'ordre 3 contenues dans Q et dont les diamètres tendent avec $\frac{1}{k}$ vers 0. Ces courbes étant disjointes deux à deux et remplissant la condition $P_{k,j}\cdot S=a_{k,j}$, où $a_{k,j}$ est un point d'ordre 1 pour la courbe $P_{k,j}$, nous concluons en vertu de la formule (9) que C_{n+1} est une courbe d'ordre 3 qui remplit l'inclusion $S\subset C_{n+1}\subset Q$. D'après (2) nous avons $a_{k,}\neq 1$ pour $k=1,2,\ldots$ et $j=1,2,\ldots 2^{k-1}$, d'où en raison de (9), on obtient que la courbe C_{n+1} est au point $z=1$ d'ordre 2.

ad (7_{n+1}). Supposons, par contre, qu'il existe un système des ensembles fermés $F^{(1)},F^{(2)},\ldots F^{(n)}$ tel que

(10) $$C_{n+1}=\sum_{l=1}^{n}F^{(l)}$$

et que pour chaque $l=1,2,\ldots n$ existe une fonction $\varphi_l(z,t)$ qui fait une contraction de $F^{(l)}$ dans C_{n+1}. Posons:

(11) $$\begin{cases}\psi_{k,j}(z)=z & \text{pour } z\in f_{k,j}(C_n),\\ \psi_{k,j}(z)=b_{k,j} & \text{pour } z\in C_{n+1}-f_{k,j}(C_n).\end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction $\psi_{k,l}$ ainsi définie est continue. Il en résulte, selon (11), que la fonction $\psi_{k,j}\varphi_l(z,t)$ fait une contraction de l'ensemble $F^{(l)}_{k,j}=f_{k,j}(C_n)\cdot F^{(l)}$ dans $f_{k,j}(C_n)$. Mais $f_{k,j}$ est une homéomorphie et $f_{k,j}(C_n)=\sum_{l=1}^{n}F^{(l)}_{k,j}$ or, d'après (7_n), on deduit:

(12) $$F^{(l)}_{k,j}\neq 0 \quad \text{pour} \quad l=1,2,\ldots n.$$

D'autre part, il résulte du (9), (5) et de la définition des points $a_{k,j}$ et $b_{k,j}$ que chaque ensemble fermé qui admet des points communs avec tous les $f_{k,j}(C_n)$ renferme la circonférence S toute entière. Or, d'après (12), on conclut

$$S\subset F^{(l)}_{k,j},$$

ce qui contredit [5]) la contractilité de $F^{(l)}\supset F^{(l)}_{k,j}$ dans la courbe $C_{n+1}\underset{\neq}{\subset}Q$.

[5]) Car au cours de toute contraction de S dans le plan le cercle Q tout entier est „balayé" par S. Voir ma note, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), p. 383.

ad (8_{n+1}). Selon (8_n) il existe des dendrites $D^{(0)}, D^{(1)},\dots D^{(n-1)}$ tels que

(13) $$C_n = D^{(0)} + D^{(1)} + \dots D^{(n-1)}$$

où nous pouvons, bien entendu, admettre que chacun de ces dendrites contient le point 1. Posons

(14) $$D^{(m)}_{k,j} = L_{k,j} + f_{k,j}(D^{(m)}) \quad \text{pour} \quad m = 0, 1, \dots (n-1)$$

et désignons par $B_l^{(m)}$, où $l = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, 1, \dots (n-1)$ la somme de l'arc $A_l = E\left[z = e^{i+2\pi i\theta};\ \frac{l}{n+1} \leqslant \theta \leqslant \frac{l+1}{n+1}\right]$ et de tous les dendrites $D^{(m)}_{k,j}$ qui admettent avec cet arc des points communs. On voit aisément que les ensembles $B_l^{(m)}$ sont les dendrites, dont la somme est C_{n+1}. Ensuite, le nombre $\frac{1}{2\pi i}\left(i + 2\pi i \frac{l}{n+1}\right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{l}{n+1}$ étant irrationnel, toutes les extrémités des arcs A_l diffèrent des points $a_{k,j}$. Il en résulte que pour $l \equiv l' \pmod{n+1}$ on a $B_l^{(m)} \cdot B_{l'}^{(m')} = A_l \cdot A_{l'}$. Ceci établi, on conclut par une induction facile que les ensembles $E_l = B_l^{(0)} + B_{l+1}^{(1)} + \dots B_{l+n-1}^{(n-1)}$, où $l = 0, 1, \dots n$ sont des dendrites. En tenant compte du fait que $B_l^{(m)} = B_{l+n+1}^{(m)}$ et des relations (14), (13) et (9), on déduit enfin

$$\sum_{l=0}^{n} E_n = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n} B_{l+m}^{(m)} = \sum_{m=0}^{n-1}\left(S + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k-1}} D_{k,j}^{(m)}\right) =$$

$$= S + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{n-1}[L_{k,j} + f_{k,j}(D^{(m)})] =$$

$$= S + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k-1}}[L_{k,j} + f_{k,j}(C_n)] = C_{n+1}.$$

La démonstration de la condition (8_{n+1}), ainsi que de notre théorème, est terminée.

Remarque. En posant

$$C_{\aleph_0} = S_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k-1}}(L_{k,j} + f_{k,j}(C_k))$$

on obtient une courbe plane d'ordre 3, de laquelle on peut vérifier aisément qu'elle n'est pas une somme d'un nombre fini de dendrites.

En tenant compte du fait que toute courbe $f_{k,j}(C_k)$ est une somme de k dendrites, on déduit que $C_{\aleph_0}$ est une somme de $\aleph_0$ dendrites.

Il est à remarquer enfin que la courbe bien connue de M. W. Sierpiński [6]) universelle pour les courbes planes d'ordre 3, fournit un exemple d'une courbe d'ordre fini dans laquelle chaque ensemble fermé et contractile est non-dense. Cette courbe ne se laisse donc pas décomposer — d'après le théorème de M. R. Baire [7]) — même en $\aleph_0$ dendrites.

[6]) W. Sierpiński, Prace Mat. Fiz. 27 (1916), p. 77.
[7]) R. Baire, Ann. di Mat. 3 (1899), p. 65.