On connait peu d'exemples de familles semblables d'ensembles de points. Telles sont p. e. la famille de tous les ensembles linéaires mesurables et la famille de tous les ensembles plans mesurables (superficiellement), ce qu'on peut démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu.

Quant à notre théorème, il est encore à remarquer que le problème suivant reste ouvert:

Existe-t-il une transformation $f(x)$ qui satisfait aux conditions de notre théorème et encore telle que si E est un sous-ensemble de X de mesure nulle, $f(E)$ est un ensemble de 1^{re} catégorie, et si E est un sous-ensemble de X de 1^{re} catégorie, $f^{-1}(E)$ est un ensemble de mesure nulle? (En d'autres termes, existe-t-il une transformation biunivoque de la droite en soi qui transforme tous les ensembles de 1^{re} catégorie en tous les ensembles de mesure nulle et tous les ensembles de mesure nulle en tous les ensembles de 1^{re} catégorie?).

Sur l'isomorphie algébro-logique et les ensembles relativement boreliens.

Par

C. Kuratowski et T. Posament (Lwów).

1. Isomorphie. Soit $\boldsymbol{C}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{X}$ (dit l'espace). $\boldsymbol{C}$ est dit un *corps algébro-logique*, lorsque 1°: avec X il contient le complémentaire $X' = \mathcal{X} - X$ de X, 2° avec X_1 et X_2 il contient $X_1 + X_2$.

On constate facilement qu'un corps contient, avec X_1 et X_2, le produit $X_1 X_2$ ainsi que la différence $X_1 - X_2$; il contient aussi l'ensemble vide et l'espace $\mathcal{X}$ tout entier.

Soit $F(X)$ une fonction qui fait correspondre à chaque ensemble appartenant au corps $\boldsymbol{C}$ un sous-ensemble d'un espace donné $\mathcal{Y}$ (différent ou non de $\mathcal{X}$).

Nous appelons la fonction $F(X)$ une *isomorphie algébro-logique* lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes:

(1) $$F(\mathcal{X}) = \mathcal{Y},$$

(2) $$F(X_1 - X_2) = F(X_1) - F(X_2),$$

(3) $$F(X) = 0 \textit{ entraîne } X = 0.$$

Les formules (1) et (2) impliquent que [1])

$$F(X_1 + X_2) = F(X_1) + F(X_2), \quad F(X_1 \cdot X_2) = F(X_1) \cdot F(X_2),$$
$$F(X') = F'(X), \quad F(0) = 0.$$

[1]) Cf. la note de M. Posament: *„Sur quelques propriétés des fonctions d'ensembles"*, C. R. de la Soc. de Sc. de Varsovie 1934.

Les formules (1)—(3) impliquent que les relations suivantes: $F(X_1)=F(X_2)$, $F(X_1)=F(X_2)+F(X_3)$, $F(X_1)=F(X_2)\cdot F(X_3)$, $F(X_1)=F(X_2)-F(X_3)$, $F(X_1)=F'(X_2)$ sont respectivement *équivalentes* aux relations: $X_1=X_2$, $X_1=X_2+X_3$, $X_1=X_2\cdot X_3$, $X_1=X_2-X_3$, $X_1=X_2'$. On voit ainsi que chaque relation entre ensembles du corps $\boldsymbol{C}$, exprimée en termes de l'Algèbre de la Logique, reste invariante lorsqu'on remplace les ensembles X par $F(X)$.

Ce fait justifie l'emploi du terme „isomorphie algébro-logique" [1]).

2. Prolongement des fonctions. Nous avons défini la notion d'isomorphie algébro-logique en supposant que la fonction $F(X)$ envisagée était définie pour tous les éléments d'un corps algébro-logique. Or, supposons, d'une façon plus générale, que le domaine $\boldsymbol{D}$ de variation de l'argument X n'est pas nécessairement un corps, mais que la fonction $F(X)$ se laisse prolonger sur les éléments du plus petit corps algébro-logique $\boldsymbol{C}$ contenant $\boldsymbol{D}$ de façon qu'elle devienne une isomorphie au sens du N° 1; supposons en outre que l'égalité (1) soit réalisée. On démontre alors facilement que — si un prolongement de ce genre existe — il est déterminé d'une manière univoque. De sorte que dans ce cas encore la fonction $F(X)$, définie pour $X \in \boldsymbol{D}$, peut être nommée isomorphie algébro-logique.

L'équivalence suivante constitue un critère pour que la fonction $F(X)$, $X \in \boldsymbol{D}$ (où $\boldsymbol{D}$ n'est pas nécessairement un corps), soit une isomorphie:

$$\{F(X_1)\cdot\ldots\cdot F(X_n)\cdot F'(X_{n+1})\cdot\ldots\cdot F'(X_{n+k})=0\}\equiv$$
$$\equiv\{X_1\cdot\ldots\cdot X_n\cdot X'_{n+1}\cdot\ldots\cdot X'_{n+k}=0\},$$

quel que soit le système d'ensembles $X_1,\ldots,X_{n+k}$, $n\geqslant 0$, $k\geqslant 0$, appartenant à la famille $\boldsymbol{D}$ [2]).

[1]) Il serait aussi naturel de nommer (par analogie à la Théorie des groupes) ***homomorphie algébro-logique*** toute fonction $F(X)$ qui satisfait aux relations (1) et (2) (sans qu'elle satisfasse nécessairement à (3)).

[2]) autrement dit, que les systèmes $X_1,\ldots,X'_{n+k}$ et $F(X_1),\ldots,F'(X_{n+k})$ soient toujours *semblables au sens combinatoire* (d'après une dénomination de M. Alexandroff).

Ce critère peut aussi être exprimé de la façon suivante. Appelons [1]) *constituant* de la famille $\boldsymbol{D}$ chaque ensemble de la forme

$$C=X_1\cdot\ldots\cdot X_n\cdot X'_{n+1}\cdot\ldots\cdot X'_{n+k},\ \text{où}\ n\geqslant 0,\ k\geqslant 0\ \text{et}\ X_i\in\boldsymbol{D}.$$

Faisons correspondre au constituant C l'ensemble

$$D=F(X_1)\cdot\ldots\cdot F(X_n)\cdot F'(X_{n+1})\cdot\ldots\cdot F'(X_{n+k})$$

qui est évidemment un constituant de la famille de tous les ensembles $F(X)$ avec $X\in\boldsymbol{D}$.

Or, notre critère signifie que *le constituant D qui correspond au constituant C s'annule dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque C s'annule.*

La correspondance que nous venons de définir est univoque: bien que l'ensemble C puisse être représenté de différentes manières comme constituant, il n'existe qu'un seul ensemble D qui vient lui correspondre. D'une façon plus générale, si on fait correspondre à la somme $S=C_1+\ldots+C_m$ l'ensemble $T=D_1+\ldots+D_m$ (où D_i correspond à C_i), cette correspondence est encore univoque [2]), de sorte, qu'en posant $F(S)=T$, on définit la fonction F pour chaque élément du corps $\boldsymbol{C}$ (puisque chaque élément de ce corps est la somme d'un nombre fini de constituants). On vérifie aisément que la fonction F, ainsi prolongée sur le corps $\boldsymbol{C}$ tout entier, est une isomorphie algébro-logique dans le sens du N° 1.

3. Systèmes déterminants. En vue des applications nous allons établir un critère d'isomorphie lié aux systèmes déterminants (c. à d. aux systèmes d'ensembles $X_{i_1\ldots i_k}$ où $i_1\ldots i_k$ désigne une suite finie variable d'entiers positifs).

Soit

$$\mathcal{X}=X_1^k+X_2^k+\ldots,\quad k=1,2,\ldots,\tag{4}$$

une suite de décompositions de $\mathcal{X}$ en ensembles disjoints:

$$X_i^k\cdot X_j^k=0\quad\text{pour}\quad i\neq j\ ^{3)}.\tag{5}$$

[1]) d'accord avec une terminologie de G. Boole.

[2]) Cela résulte facilement du fait que l'égalité $C_1+\ldots+C_m=C_1^*+\ldots+C_n^*$ signifie que certains constituants s'annulent.

[3]) Ainsi, par exemple, si $\mathcal{X}$ désigne l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle 01 et si, pour $\mathfrak{z}\in\mathcal{X}$, $\mathfrak{z}=\frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(1)}}+\frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(2)}}+\ldots$ est le développement de $\mathfrak{z}$ en fraction continue — X_i^k se compose des nombres $\mathfrak{z}$ tels que $\mathfrak{z}^{(k)}=i$.

Posons

(6) $$X_{i_1 \dots i_k} = X_{i_1}^1 \cdot \ldots \cdot X_{i_k}^k.$$

On constate facilement que

(7) $$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i, \qquad X_{i_1 \dots i_n} = \sum_{i=1}^{\infty} X_{i_1 \dots i_n i}$$

(8) $$X_{i_1 \dots i_n} \cdot X_{j_1 \dots j_n} = 0 \quad \text{pour} \quad (i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_n)$$

(9) $$X_i^k = \sum_{(i_1 \dots i_{k-1})} X_{i_1 \dots i_{k-1} i}.$$

Inversement, si un système déterminant $\{X_{i_1 \dots i_k}\}$ satisfait aux conditions (7) et (8), les ensembles X_i^k définis par la formule (9) satisfont aux conditions (4)—(6).

Admettons à présent, que $\mathcal{Y} = Y_1^k + Y_2^k + \ldots$ soit une suite de décompositions analogues (en ensembles disjoints) et que l'on ait toujours l'équivalence

(10) $$(X_{i_1 \dots i_k} = 0) \equiv (Y_{i_1 \dots i_k} = 0),$$

où, comme dans (6): $Y_{i_1 \dots i_k} = Y_{i_1}^1 \cdot \ldots \cdot Y_{i_k}^k$.

La fonction $F(X_i^k) = Y_i^k$ est une isomorphie algébro-logique dans le sens du N⁰ 2.

En effet, en tenant compte de l'identité $(X_i^k)' = \sum_{j \neq i} X_j^k$, on constate facilement qu'à chaque constituant

(11) $$C = X_{r_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{r_m}^{k_m} \cdot (X_{j_1}^{l_1})' \cdot \ldots \cdot (X_{j_s}^{l_s})'$$

correspond une classe $\mathfrak{S}$ de systèmes $i_1 \dots i_n$ telle que

$$C = \sum X_{i_1 \dots i_n} \quad \text{où} \quad (i_1 \dots i_n) \in \mathfrak{S}.$$

L'hypothèse que $C = 0$ équivaut en vertu de (10) à l'hypothèse que l'ensemble qui s'obtient de $\sum X_{i_1 \dots i_n}$ en remplaçant X par Y s'annule; mais ce dernier ensemble s'obtient de C en remplaçant dans (11) X par Y. Donc selon le théor. du N⁰ 2, la fonction F est une isomorphie.

Ceci établi, supposons donnée une suite de sous-ensembles $X^1, X^2, \ldots$ de $\mathcal{X}$. Posons

(12) $$X_1^k = X^k, \quad X_2^k = (X^k)' \quad \text{et} \quad X_i^k = 0 \quad \text{pour} \quad i > 2.$$

Soit $Y^1, Y^2, \ldots$ une sous-suite de $\mathcal{Y}$ et attribuons un sens analogue aux symboles Y_i^k. Le théorème précédent implique alors que *l'équivalence* (10) *supposée vérifiée, la fonction $F(X^k) = Y^k$ est une isomorphie.*

4. Ensembles relativement boreliens. Nous allons appliquer à présent la notion d'isomorphie algébro-logique à la théorie des ensembles boreliens [1]).

D'après un théorème général, si B^k, $k = 1, 2, \ldots$, est un ensemble borelien ambigu de classe $\alpha > 0$ relativement à un ensemble $\mathcal{X}$ qui est lui-même de classe α multiplicative [2]), il existe un ensemble C^k ambigu de classe α (dans l'espace tout entier) et tel que $B^k = \mathcal{X} \cdot C^k$. Dans certains problèmes il importe que les relations mutuelles entre les ensembles C^k soient les mêmes que les relations entre les ensembles B^k correspondants [3]); plus précisément, que la fonction $F(B^k) = C^k$ soit une isomorphie algébro-logique.

Dans cet ordre d'idées nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Etant donnés dans un espace métrique un ensemble arbitraire $\mathcal{X}$ et une suite d'ensembles $X^1, X^2, \ldots$ ambigus de classe α relativement à $\mathcal{X}$, on peut faire correspondre à $\mathcal{X}$ un ensemble $\mathcal{Y} = F(\mathcal{X})$ de classe $\alpha + 1$ multiplicative et aux ensembles X^k des $F(X^k)$ ambigus de classe α relativement à $\mathcal{Y}$ de façon que la fonction F soit une isomorphie algébro-logique et que l'on ait $X^k = \mathcal{X} \cdot F(X^k)$.*

De plus, si $\mathcal{X}$ est de classe $\alpha > 0$ multiplicative, l'ensemble $\mathcal{Y}$ coïncide avec l'espace tout entier.

Démonstration. Il existe d'après un théorème général [4]), un système d'ensembles $\{C_{i_1 \dots i_k}\}$ ambigus de classe α par rapport à la somme $A_k = \sum C_{i_1 \dots i_k}$ (où la sommation s'étend à tous les systèmes de k indices) et tels que A_k est ambigu de classe $\alpha + 1$, $\mathcal{X} \cdot C_{i_1 \dots i_k} = X_{i_1 \dots i_k}$ [5]), $C_{i_1 \dots i_k} \cdot C_{j_1 \dots j_n} = 0$ pour $(i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_n)$ et $n \leqslant k$ et enfin que $C_{i_1 \dots i_k} = 0$ si $X_{i_1 \dots i_k} = 0$.

[1]) Pour la terminologie concernant les ensembles boreliens, voir C. Kuratowski, *Topologie* I, Monogr. Mat. 3, 1933, § 26, ou bien ce volume, p. 206.

[2]) C. à d. un G_δ, ou un $F_{\sigma\delta}$, etc.

[3]) Voir, par exemple, le problème du prolongement des fonctions mesurables B. *Topologie* I, p. 165 et 219.

[4]) *Topologie* I, p. 165, VIII, 2.

[5]) Les ensembles $X_{i_1 \dots i_k}$ sont définis par les formules (6) et (12). On peut évidemment admettre dans la démonstration du théorème que ces ensembles constituent un système diadique, c. à d. que i_k n'admet que deux valeurs: 1 et 2.

Posons $\mathcal{Y} = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$, $Y_i = \mathcal{Y} \cdot C_i$ et

$$Y_{i_1 \ldots i_k} = \mathcal{Y} \cdot C_{i_1 \ldots i_k} \quad \text{pour} \quad k > 1.$$

On vérifie facilement que le système d'ensembles $\{Y_{i_1 \ldots i_k}\}$ satisfait aux conditions (7) et (8) (en y remplaçant X par Y) et à la formule (10). Si l'on pose $F(X^k) = Y^k = \sum_{(i_1, \ldots, i_{k-1})} Y_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1}$, on définit donc une isomorphie en raison des énoncés du N° 3. En outre, les ensembles $Y_{i_1 \ldots i_k}$ sont évidemment ambigus de classe α par rapport à $\mathcal{Y}$.

Il en est encore de même de l'ensemble Y^k, qui est somme d'un nombre fini d'ensembles $Y_{i_1 \ldots i_k}$. On a enfin $X^k = \mathcal{X} \cdot Y^k$, car

$$\mathcal{X} \cdot Y^k = \sum_{(i_1 \ldots i_{k-1})} \mathcal{X} \cdot Y_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1} = \sum_{(i_1 \ldots i_{k-1})} \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} \cdot C_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1} = \sum_{(i_1 \ldots i_{k-1})} X_{i_1, \ldots, i_{k-1}, 1} = X^k.$$

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, on s'appuie sur la deuxième partie du théorème précité: notamment, la formule $\mathcal{X} = \sum_{(i_1 \ldots i_k)} X_{i_1 \ldots i_k}$, valable pour chaque k (cf. (7)), implique d'après ce théorème que A_k coïncide avec l'espace tout entier. Il en est donc de même de l'ensemble $\mathcal{Y} = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$, c. q. f. d.

Remarque. *La classe de l'ensemble $\mathcal{Y} = F(\mathcal{X})$ ne peut pas être abaissée.*

Soit, en effet, dans l'espace des nombres réels $\mathcal{X}$ = l'ensemble des nombres irrationnels et $X^1, X^2, \ldots$ la suite des intervalles de cet ensemble à extrémités rationnelles. Evidemment l'ensemble X^k est ambigu de classe 0 dans $\mathcal{X}$ (c. à d. qu'il y est fermé et ouvert). L'ensemble $\mathcal{X}$ est le seul ensemble qui peut être supposé égal à $\mathcal{Y} = F(\mathcal{X})$; en effet, Z étant un sur-ensemble arbitraire de $\mathcal{X}$, soit r un nombre rationnel appartenant à $Z - \mathcal{X}$ et supposons que r soit une extrémité de l'ensemble X^k; r appartient par conséquent à la frontière de $F(X^k)$ relative à Z, de sorte que $F(X^k)$ n'est pas ouvert dans Z.

Sur la décomposition des courbes régulières [1]) en dendrites.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

M. N. E. Steenrod a démontré récemment [2]) que toute courbe régulière qui est localement une dendrite [3]) se laisse décomposer en somme de deux dendrites. Dans cet ordre d'idées, je vais démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Il existe pour tout nombre naturel n une courbe plane d'ordre [1]) 3 qui se laisse décomposer en n, mais pas en moins dendrites.*

Démonstration. Soient dans le plan des nombres complexes $z = x + iy$:

$$(1) \qquad S = \underset{z}{E}[|z| = 1]; \quad Q = \underset{z}{E}[|z| \leqslant 1],$$

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{k,j} = e^{2\pi i \frac{2j-1}{2^k}}; \quad b'_{k,j} \doteq a_{k,j}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right); \\ L'_{k,j} = \underset{z}{E}[z = t \cdot a_{k,j} + (1-t)\, b'_{k,j};\ 0 \leqslant t \leqslant 1], \end{cases}$$

[1]) Quant à la définition des courbes régulières, d'ordre ect. voir K. Menger, *Kurventheorie,* Leipzig u. Berlin, Teubner 1933, p. 96—98.

[2]) Bull. of the Amer. Math. Soc. 40 (1934), p. 47.

[3]) Ces courbes peuvent être définies comme continus péaniens qui ne contiennent qu'un nombre fini de courbes simples fermées. On prouve aisément aussi, qu'ils sont identiques avec les courbes localement contractiles (dans le sens de ma note de C. R. 194 (1932), p. 951) ou avec les courbes péaniennes dont le nombre undimensionnel de Betti est fini.