Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On connait plusieurs théorèmes sur les ensembles de 1re catégorie qui restent vrais quand on remplace dans leurs énoncés les ensembles de 1re catégorie par les ensembles de mesure nulle (ou inversement). Le but de cette Note est de démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu un théorème qui explique la raison de cette dualité entre la 1re catégorie et la mesure nulle.

Théorème: *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une transformation biunivoque $f(x)$ de l'ensemble X de tous les nombres réels en soi, telle que si E est un sous-ensemble de X de 1re catégorie, $f(E)$ est un ensemble de mesure nulle, et si E est un sous-ensemble de X de mesure nulle, $f^{-1}(E)$ est un ensemble de 1re catégorie.*

Démonstration.

La famille de tous les ensembles linéaires F_σ de 1re catégorie étant de puissance du continu, il résulte de l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω,

(1) $$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ldots,\ \Phi_\omega,\ \Phi_{\omega+1},\ldots,\ \Phi_\xi,\ldots,\quad (\xi<\Omega)$$

formée de tous les ensemble F_σ de 1re catégorie.

Pareillement, la famille de tous les ensembles G_δ de mesure nulle étant de puissance du continu, il résulte de l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω,

(2) $$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ldots,\ \Gamma_\omega,\ \Gamma_{\omega+1},\ldots,\ \Gamma_\xi,\ldots,\quad (\xi<\Omega)$$

formée de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle.

Posons, pour $\alpha<\Omega$:

(3) $$S_\alpha=\sum_{\xi<\alpha}\Phi_\xi\ ^{1)}$$

— ce seront encore des ensembles F_σ de 1re catégorie.

Supprimons dans la suite transfinie

(4) $$S_1,\ S_2,\ S_3,\ldots,\ S_\omega,\ S_{\omega+1},\ldots,\ S_\xi,\ldots\quad(\xi<\Omega)$$

tout ensemble S_α tel que l'ensemble $S_\alpha-\sum_{\xi<\alpha}S_\xi$ est au plus dénombrable. Les termes de la suite transfinie (4) qui resteront forment, comme on voit sans peine, encore une suite transfinie du type Ω:

(5) $$S_{\alpha_1},\ S_{\alpha_2},\ S_{\alpha_3},\ldots,\ S_{\alpha_\omega},\ S_{\alpha_{\omega+1}},\ldots,\ S_{\alpha_\xi},\ldots\quad(\xi<\Omega)$$

(ce qui résulte aisément du fait qu'il existe pour tout ensemble K de 1re catégorie un ensemble F_σ de 1re catégorie non dénombrable et disjoint avec K), et les ensembles

(6) $$Q_\mu=S_{\alpha_\mu}-\sum_{\xi<\mu}S_{\alpha_\xi}$$

sont, comme on voit sans peine, tous non dénombrables.

On voit aussi facilement que tout ensemble linéaire de 1re catégorie (en tant que contenu dans un F_σ de 1re catégorie) est contenu dans un terme de la suite (5).

Or, posons, pour $\alpha<\Omega$:

(7) $$T_\alpha=\sum_{\xi<\alpha}\Gamma_\xi$$

— ce seront des ensembles $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle.

Supprimons dans la suite transfinie

(8) $$T_1,\ T_2,\ T_3,\ldots,\ T_\omega,\ T_{\omega+1},\ldots,\ T_\xi,\ldots\quad(\xi<\Omega)$$

tout ensemble T_α tel que l'ensemble $T_\alpha-\sum_{\xi<\alpha}T_\xi$ est au plus dénombrable. Les termes de la suite (8) qui resteront forment, comme on voit sans peine, encore une suite transfinie du type Ω

(9) $$T_{\beta_1},\ T_{\beta_2},\ T_{\beta_3},\ldots,\ T_{\beta_\omega},\ T_{\beta_{\omega+1}},\ldots,\ T_{\beta_\xi},\ldots\quad(\xi<\Omega)$$

1) pour $\alpha=1$ on doit comprendre par $\sum_{\xi<\alpha}\Phi_\xi$ l'ensemble vide.

(ce qui résulte aisément du fait qu'il existe pour tout ensemble N de mesure nulle un ensemble G_δ de mesure nulle non dénombrable et disjoint avec N) et les ensembles

$$R_\mu = T_{\beta_\mu} - \sum_{\xi<\alpha} T_{\beta_\xi} \tag{10}$$

sont, comme on voit sans peine, tous non dénombrables. On voit aussi facilement que tout ensemble linéaire de mesure nulle (en tant que contenu dans un G_δ de mesure nulle) est contenu dans un terme de la suite (9).

Les ensembles (6) et (10) sont donc tous non dénombrables, donc, d'après $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, tous de puissance du continu et il existe pour tout nombre ordinal $\mu<\Omega$, une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles Q_μ et R_μ.

Les ensembles Q_μ $(\mu<\Omega)$ étant disjoints et leur somme étant, comme on voit sans peine, l'ensemble X, et pareillement les ensembles R_μ $(\mu<\Omega)$ étant disjoints et leur somme étant l'ensemble X, les correspondances biunivoques entre les ensembles Q_μ et R_μ (pour $\mu<\Omega$) déterminent une transformation biunivoque $f(x)$ de l'ensemble X en lui-même, telle que $f(Q_\mu)=R_\mu$ pour $\mu<\Omega$.

Soit maintenant E un ensemble linéaire de 1[re] catégorie. De la propriété de la suite (5) résulte que l'ensemble E est contenu dans un terme de cette suite, soit $E\subset S_{\alpha_\gamma}$. Or, d'après (6) (et (3)) on a évidemment $S_{\alpha_\gamma}=\sum\limits_{\mu\leqslant\gamma} Q_\mu$. On a donc $E\subset \sum\limits_{\mu\leqslant\gamma} Q_\mu$, d'où

$$f(E)\subset f\Big(\sum_{\mu\leqslant\gamma} Q_\mu\Big)=\sum_{\mu\leqslant\gamma} f(Q_\mu)=\sum_{\mu\leqslant\gamma} R_\mu = T_{\beta_\gamma}$$

(puisque, d'après (10) et (7), on a $T_{\beta_\gamma}=\sum\limits_{\mu\leqslant\gamma} R_\mu$).

On a donc $f(E)\subset T_{\beta_\gamma}$: l'ensemble T_{β_γ} étant, d'après (7) et d'après $\beta_\gamma<\Omega$ une somme d'un nombre fini ou d'une infinite dénombrable d'ensembles de mesure nulle, donc un ensemble de mesure nulle, on en conclut que l'ensemble $f(E)$ est de mesure nulle.

Soit maintenant E un ensemble linéaire de mesure nulle. De la propriété de la suite (9) résulte que l'ensemble E est contenu dans un terme de la suite (9), soit $E=T_{\beta_\lambda}$. D'après $T_{\beta_\lambda}=\sum\limits_{\mu\leqslant\lambda} R_\mu$ on a donc $E\subset\sum\limits_{\mu\leqslant\lambda} R_\mu$, ce qui donne ($f^{-1}(x)$ désignant la fonction inverse pour la fonction $f(x)$)

$$f^{-1}(E)\subset f^{-1}\Big(\sum_{\mu\leqslant\lambda} R_\mu\Big)=\sum_{\mu\leqslant\lambda} f^{-1}(R_\mu)=\sum_{\mu\leqslant\lambda} Q_\mu = S_{\alpha_\lambda},$$

donc $f^{-1}(E)\subset S_{\alpha_\lambda}$ étant, d'après (3) et d'après $a_\lambda<\Omega$, une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de 1[re] catégorie, donc un ensemble de 1[re] catégorie, on en conclut que l'ensemble $f^{-1}(E)$ est de 1[re] catégorie.

La fonction $f(x)$ satisfait donc aux conditions de notre théorème qui est ainsi démontré.

Voici une application de notre théorème.

M. N. Lusin a démontré[1]) que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire L de puissance du continu qui a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de 1[re] catégorie. Soit $f(x)$ une transformation qui satisfait aux conditions de notre théorème. On voit sans peine que l'ensemble $f(L)$ est de puissance du continu et a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de mesure nulle[2]).

Nous ferons encore une remarque générale suivante à propos de notre théorème.

M. E. Szpilrajn appelle *semblables* deux familles d'ensembles F_1 et F_2 s'il existe une correspondance biunivoque φ entre les ensembles-éléments des familles F_1 et F_2, et une correspondance biunivoque f entre les éléments de la somme S_1 de tous les ensembles de la famille F_1 et les éléments de la somme S_2 de tous les ensombles de la famille F_2, et si, E étant un ensemble quelconque de la famille F_1, on a toujours $f(E)=\varphi(E)$[3]).

Notre théorème peut être évidemment exprimé comme il suit:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, la famille de tous les ensembles linéaire de 1[re] catégorie et la famille de tous les ensembles linéaires de mesure nulle sont semblables.

[1]) *C. R. Paris*, t. 158, p. 1259. Cf. *Fund. Math.* t. VI, p. 155.

[2]) Cf. *Fund. Math.* t. V, p. 184, où j'ai démontré directement l'existence d'un tel ensemble.

[3]) D'après une remarque de M. Tarski la notion de la similitude des familles d'ensembles est due à B. Russell.

On connait peu d'exemples de familles semblables d'ensembles de points. Telles sont p. e. la famille de tous les ensembles linéaires mesurables et la famille de tous les ensembles plans mesurables (superficiellement), ce qu'on peut démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu.

Quant à notre théorème, il est encore à remarquer que le problème suivant reste ouvert:

Existe-t-il une transformation $f(x)$ qui satisfait aux conditions de notre théorème et encore telle que si E est un sous-ensemble de X de mesure nulle, $f(E)$ est un ensemble de 1re catégorie, et si E est un sous-ensemble de X de 1re catégorie, $f^{-1}(E)$ est un ensemble de mesure nulle? (En d'autres termes, existe-t-il une transformation biunivoque de la droite en soi qui transforme tous les ensembles de 1re catégorie en tous les ensembles de mesure nulle et tous les ensembles de mesure nulle en tous les ensembles de 1re catégorie?).

Sur l'isomorphie algébro-logique et les ensembles relativement boreliens.

Par

C. Kuratowski et T. Posament (Lwów).

1. Isomorphie. Soit $\boldsymbol{C}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{X}$ (dit l'espace). $\boldsymbol{C}$ est dit un *corps algébro-logique*, lorsque 1°: avec X il contient le complémentaire $X' = \mathcal{X} - X$ de X, 2° avec X_1 et X_2 il contient $X_1 + X_2$.

On constate facilement qu'un corps contient, avec X_1 et X_2, le produit $X_1 X_2$ ainsi que la différence $X_1 - X_2$; il contient aussi l'ensemble vide et l'espace $\mathcal{X}$ tout entier.

Soit $F(X)$ une fonction qui fait correspondre à chaque ensemble appartenant au corps $\boldsymbol{C}$ un sous-ensemble d'un espace donné $\mathcal{Y}$ (différent ou non de $\mathcal{X}$).

Nous appelons la fonction $F(X)$ une *isomorphie algébro-logique* lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes:

$$F(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}, \tag{1}$$

$$F(X_1 - X_2) = F(X_1) - F(X_2), \tag{2}$$

$$F(X) = 0 \textit{ entraîne } X = 0. \tag{3}$$

Les formules (1) et (2) impliquent que [1])

$$F(X_1 + X_2) = F(X_1) + F(X_2), \quad F(X_1 \cdot X_2) = F(X_1) \cdot F(X_2),$$
$$F(X') = F'(X), \quad F(0) = 0.$$

[1]) Cf. la note de M. Posament: *„Sur quelques propriétés des fonctions d'ensembles"*, C. R. de la Soc. de Sc. de Varsovie 1934.