Sur une extension de la notion de l'homéomorphie.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous dirons que deux ensembles linéaires E et H sont *quasi-homéomorphes*, s'il existe une fonction de Baire $f(x)$ définie sur E, à valeurs distinctes sur E, telle que $f(E)=H$, et dont la fonction inverse (définie sur H) est une fonction de Baire sur H. Comme on voit sans peine, pour que deux ensembles linéaires E et H soient *quasi-homéomorphes*, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres ordinaux α et β plus petits que Ω et tels que les ensembles E et H soient homéomorphes de classe α, β au sens de M. Kuratowski [1]).

On voit sans peine que la relation de quasi-homéomorphie entre les ensembles est symétrique et transitive. On voit aussi sans peine qu'une fonction $f(x)$ qui établit une quasi-homéomorphie entre deux ensembles E et H, établit aussi une quasi-homéomorphie entre tout sous-ensemble E_1 de E et son image $f(E_1)$ (puisque, si f est une fonction de Baire sur un ensemble E, f est aussi une fonction de Baire sur tout sous-ensemble de E).

Théorème 1. *Une quasi-homéomorphie entre deux ensembles linéaires E et H peut être étendue aux ensembles mesurables B contenant resp. E et H.*

Ce théorème résulte tout de suite du théorème de M. Kuratowski sur l'extension de l'homéomorphie de classe α, β [2]). Nous donnerons ici une démonstration directe du théoréme 1.

[1]) C. Kuratowski, *Topologie I*, (Monografje Matematyczne, t. III), Warszawa 1933, p. 221. Aussi *C. R. Paris*, t. 197, p. 1090.

[2]) l. c.

Soient donc E et H deux ensembles linéaires quasi-homéomorphes. Il existe donc une fonction de Baire $f(x)$, définie sur E, à valeurs distinctes sur E, telle que $f(E)=H$, et dont la fonction inverse $g(x)$ (définie sur H) est une fonction de Baire sur H.

Comme on sait [1]), il existe des fonctions de Baire d'une variable réelle, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, telles que $\varphi(x)=f(x)$ sur E et $\psi(y)=g(y)$ sur H. Soit M, resp. N l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $y=\varphi(x)$, resp. $x=\psi(y)$: ce sont, comme on sait, des ensembles mesurables B (en tant que images géométriques des fonctions de Baire d'une variable réelle [2])). Leur produit MN est donc aussi mesurable B. L'ensemble MN a évidemment au plus un point sur toute droite parallèle à l'axe $0Y$, resp. à l'axe $0X$: les projections E^* resp. H^* de MN sur l'axe $0X$, resp. $0Y$ sont donc des ensembles mesurables B (en tant que images continues et biunivoques d'un ensemble mesurable B [3])). Or, on voit sans peine que la fonction $\varphi(x)$ est à valeurs distinctes sur E^*, que $\varphi(E^*)=H^*$ et que sur H^* la fonction inverse de φ est $\psi(y)$.

Or, on a $E\subset E^*$, puisque, si $x\in E$, on a $y=\varphi(x)=f(x)\in H$ et $x=g(y)=\psi(y)\in E$, donc $(x, y)\in M$ et $(x, y)\in N$, d'où $(x, y)\in MN$ et (d'après la définition de l'ensemble E^*): $x\in E^*$. Pareillement on trouve $H\subset H^*$.

La quasi-homéomorphie entre les ensembles E et H est ainsi étendue aux ensembles E^* et H^* qui sont mesurables B, et le théorème 1 est démontré.

Deux ensembles dénombrables sont, comme on voit sans peine, toujours quasi-homéomorphes (toute correspondance biunivoque entre les éléments de ces ensembles établissant une quasi-homéomorphie (une homéomorphie de classse 1, 1)). Or on a ce

Théorème 2. *Deux ensembles linéaires non dénombrables mesurables B sont toujours quasi-homéomorphes* [4]).

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit évidemment de démontrer que tout ensemble linéaire non dénombrable mesurable B est quasi-homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres réels.

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. XVI, p. 81.

[2]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. II, p. 78.

[3]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. X, p. 59.

[4]) Ce théorème résulte aussi sans peine d'un théorème de M. Kuratowski sur les homéomorphies de classe α, β.

Soit donc H un ensemble non dénombrable mesurable B. D'après M. Lusin, H est une somme de deux ensembles disjoints $H = H_1 + D$, où D est dénombrable et H_1 est une image continue et biunivoque de l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Il existe donc une fonction $f(x)$, définie et continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels, à valeurs distinctes dans N, et telle que $f(N) = H_1$. Or, définissons la fonction $f(x)$ pour x rationnels de sorte qu'elle établisse une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les nombres rationnels et l'ensemble D. La fonction $f(x)$ est maintenant définie pour tous les x réels et (en tant que continue lorsqu'on néglige un ensemble dénombrable) elle est, comme on voit sans peine, de classe $\leqslant 2$ de Baire. Or, elle est évidemment à valeurs distinctes et l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ (pour x réels) est H. L'image géométrique de la fonction $f(x)$ (en tant que d'une fonction de Baire) étant mesurable B, on voit sans peine que la fonction inverse de $f(x)$ (définie sur H), $g(y)$ est une fonction de Baire (puisque, en posant $g(y) = 0$ pour y non ϵH, on obtient une fonction $g(y)$ d'une variable réelle, dont l'image géométrique est mesurable B, donc une fonction de Baire d'une variable réelle, et en particulier, une fonction de Baire sur H).

L'ensemble H est donc quasi-homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres réels. Le théorème 2 est ainsi démontré.

Théorème 3. *Une quasi-homéomorphie entre deux ensembles linéaires bornés peut être étendue à toute la droite.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $h(x)$ est une fonction de Baire, définie sur un ensemble K mesurable B, l'image géométrique L de $h(x)$ sur K, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \epsilon K$ et $y = h(x)$, est mesurable B. En effet, il existe une fonction de Baire d'une variable réelle, $\chi(x)$, qui coïncide avec $h(x)$ sur K. L'image géométrique R de $\chi(x)$ est mesurable B et L est évidemment le produit de R par l'ensemble Q formée de toutes les parallèles à l'axe $0Y$ passant par les points de l'ensemble (mesurable B) K. Donc L, comme produit de deux ensembles mesurables B, est mesurable B, c. q. f. d.

Soient maintenant E et H deux ensembles quasi-homeomorphes bornés. On voit sans peine qu'on peut étendre la quasi-homéomorphie entre E et H aux ensembles E^* et H^* mesurables B et bornés. Il suffit seulement de modifier un peu la démonstration du théorème 1, en considérant au lieu des fonctions φ et ψ d'une variable réelle, les fonctions définies seulement dans les intervalles contenants resp. E et H.

Les ensembles CE^* et CH^* sont donc non dénombrables et mesurables B, et, d'après le théorème 2, ils sont quasi-homéomorphes.

Soit $f(x)$ une fonction définie sur E^* et établissant la quasi-homéomorphie entre E^* et H^*, et soit $g(x)$ une fonction définie sur CE^* et établissant la quasi-homéomorphie entre CE^* et CH^*. On voit sans peine que la fonction $F(x)$ égale à $f(x)$ sur E^* et à $g(x)$ sur CE^* est une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes, dont l'image géométrique est (en tant que, d'aprés notre remarque, somme de deux ensembles mesurables B) mesurable B, donc une fonction de Baire, que l'ensemble de toutes les valeurs de $F(x)$ (pour x réels) est l'ensemble de tous les nombres réels, et que $F(E) = H$.

Le théorème 3 est ainsi démontré.

Théorème 4. *Les classes des ensembles projectifs sont des invariants des transformations quasi-homéomorphes.*

Les classes P_n étant, comme on sait, des invariants des transformations de Baire, il suffit de démontrer notre théorème pour les classes C_n.

Pour fixer les idées nous démontrerons le théorème 4 pour la classe C_1, c'est-à-dire pour les ensembles $C(A)$ (complémentaires analytiques).

Pour les autres classes C_n $(n = 2, 3, \ldots)$ la démonstration serait tout à fait analogue.

Soit donc E un ensemble $C(A)$ linéaire et soit H un ensemble linéaire quasi-homéomorphe à E. D'après le théorème 1 la quasi-homéomorphie entre E et H peut être étendue aux ensembles E^* et H^* contenants resp. E et H et mesurables B. Il existe donc une fonction de Baire $\varphi(x)$ définie sur E^*, à valeurs distinctes sur E^* et telle que $\varphi(E^*) = H^*$ et $\varphi(E) = H$. L'ensemble E^* étant mesurable B et l'ensemble E étant un $C(A)$, l'ensemble $E^* - E$ est un (A) (ensemble analytique), donc (φ étant une fonction de Baire sur E^*), l'ensemble $\varphi(E^* - E)$ est encore un ensemble (A). Or, la fonction φ étant à valeurs distinctes sur E^*, on a évidemment $H = \varphi(E) = \varphi(E^*) - \varphi(E^* - E) = H^* - \varphi(E^* - E)$, ce qui prouve que l'ensemble H est une différence entre un ensemble mesurable B et un ensemble (A). L'ensemble H est donc un ensemble $C(A)$, c. q. f. d.

Théorème 5. *Il existe un ensemble linéaire non dénombrable N, tel que tout ensemble linéaire qui est quasi-homéomorphe à N est de mesure nulle et toujours de première catégorie.*

Démonstration. Soit Q un ensemble $C(A)$ linéaire qui n'est pas mesurable B. L'ensemble Q est, comme on sait, une somme de $\aleph_1$ ensembles non vides mesurables B sans éléments communs deux a deux,

$$(1) \quad Q = E_1 + E_2 + \ldots + E_\omega + E_{\omega+1} + \ldots + E_\xi + \ldots, \quad (\xi < \Omega)$$

jouissant de la propriété P suivante: tout ensemble mesurable B, E (et, plus généralement, tout ensemble (A)), contenu dans Q est contenu dans une somme partielle de la série (1) (c'est-à-dire pour tout ensemble mesurable B, $E \subset Q$ il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que $EE_\xi = 0$ pour $\xi \geqslant \mu$) [1]).

Soit N un ensemble contenant un et un seul point de chacun des ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$: ce sera évidemment un ensemble non dénombrable (de puissance $\aleph_1$). Je dis que l'ensemble N satisfait aux conditions du théorème 5.

En effet, soit N_1 un ensemble linéaire quasi-homéomorphe de N. D'après le théorème 1, la quasi-homéomorphie entre N et N_1 peut être étendue aux ensembles N^* et N_1^* mesurables B, tels que $N \subset N^*$ et $N_1 \subset N_1^*$. Il existe donc une fonction de Baire $f(x)$ définie sur N^*, à valeurs distinctes sur N^* et telle que $f(N^*) = N_1^*$ et $f(N) = N_1$.

D'après (1) on trouve

$$(2) \qquad f(QN^*) = \sum_{\xi<\Omega} f(E_\xi N^*).$$

La fonction f établissant une quasi-homéomorphie entre les ensembles N^* et N_1^*, elle établit aussi une quasi-homéomorphie entre le sous-ensemble QN^* de N^* et son image $f(QN^*)$. L'ensemble QN^* étant un $C(A)$ (en tant que produit d'un ensemble $C(A)$ par un ensemble mesurable B), son quasi-homéomorphe $f(QN^*)$ est, d'après le théorème 4, aussi un ensemble $C(A)$, donc un ensemble mesurable (L), et nous pouvons poser

$$(3) \qquad f(QN^*) = R + S,$$

où R est un ensemble de mesure nulle et S un F_σ.

D'après (3) on a $S \subset f(QN^*) \subset f(N^*) = N_1^*$, donc $S \subset N_1^*$. Soit T le sous-ensemble de N^* qui correspond à l'ensemble S dans la quasi-homéomorphie entre N^* et N_1^*: en tant que quasi-homéomorphe d'un ensemble mesurable B, S, l'ensemble T est mesurable B (toute image biunivoque de Baire d'un ensemble mesurable B étant mesurable B). D'après la propriété P de la série (1) il existe donc un indice $\mu < \Omega$, tel que $TE_\xi = 0$ pour $\xi \geqslant \mu$. L'ensemble N contenant seulement un point de chacun des ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$, il en résulte tout de suite (d'après (1)) que l'ensemble NT est au plus dénombrable: son quasi-homéomorphe $f(NT) = N_1 S$ est donc aussi au plus dénombrable, donc de mesure nulle. L'ensemble R étant de mesure nulle, il en résulte selon $N \subset QN^*$ et (3) que l'ensemble $f(N) = N_1 = N_1 f(QN^*)$ est de mesure nulle.

Or, soit P_0 un ensemble parfait donné quelconque. L'ensemble $P_0 f(QN^*)$ est donc un $C(A)$. Or, tout ensemble $C(A)$ jouissant de la propriété de Baire, nous pouvons poser $P_0 f(QN^*) = K + \Gamma$, où K est un ensemble de 1re catégorie sur P_0 et où Γ est un G_δ. Soit Γ_0 le sous-ensemble de QN^* qui correspond à Γ dans la quasi-homéomorphie entre N^* et N_1^*: l'ensemble Γ_0 est donc mesurable B, et il existe un indice $\mu < \Omega$, tel que $\Gamma_0 E_\xi = 0$ pour $\xi < \mu$, d'où résulte (comme plus haut) que l'ensemble $\Gamma_0 N$ est au plus dénombrable. L'ensemble $f(\Gamma_0 N) = \Gamma N_1$ est donc aussi au plus dénombrable. Or, d'après $P_0 f(QN^*) = K + \Gamma$, on a $P_0 N_1 = P_0 N_1 f(QN^*) = N_1 K + N_1 \Gamma$: l'ensemble $P_0 N_1$ est donc une somme d'un ensemble de 1re catégorie sur P_0 et d'un ensemble au plus dénombrable: c'est donc un ensemble de 1re catégorie sur P_0.

P_0 pouvant être un ensemble (linéaire) parfait donné quelconque, nous avons ainsi démontré que l'ensemble $N_1 = f(N)$ est toujours de 1re catégorie.

L'ensemble N satisfait donc aux conditions du théorème 5 qui est ainsi démontré.

[1]) Voir p. e. N. Lusin et W. Sierpiński, *Bull. Acad. Cracovie*, 1918, p. 40; *Journ. de Math.* t. II (1923), p. 65.