la fonction $\varphi(x)$ est donc sur K limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe $\leqslant 1$ sur K: c'est donc une fonction de clssse $\leqslant 1$ sur K. Or, la fonction $\varphi(x)$ est évidemment inverse de la fonction $Z(y)$ (définie sur S).

Nous avons ainsi démontré que la fonction $Z(y)$ établit une homéomorphie de classe 0, 1 entre les ensembles S et K: la fonction $\varphi(x)$ établit donc une homéomorphie de classe 1, 0 entre les ensembles K et S et par suite aussi entre les ensembles G et E.

Le théorème II est ainsi démontré.

Über total zusammenhangslose Mengen.

Von

S. Mazurkiewicz (Varsovie).

In dieser Note beweise ich einen Satz, welcher mit der folgenden, von Tumarkin und Hurewicz herrührenden Problemstellung in Zusammenhang steht: wird ein metrischer, separabler Raum R_1, mittelst einer Homeomorphie φ in einen vollständigen, resp. kompakten Raum R von derselben Dimension eingebettet, so soll die Dimension der Ergänzungsmenge $R-\varphi(R_1)$ untersucht werden [1]).

Satz. *Ist A ein kompakter metrischer Raum, $B \subset A$ eine total zusammenhangslose* [2]) *Menge und* $\dim A = \dim B > 0$, *so ist auch* $\dim(A-B) = \dim A$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man voraussetzen, dass B in sich dicht ist. Sei $\mathfrak{S}$ ein abzählbares, unbegrenzt feines Überdeckungssystem von B. Sei $\{(U_0^j, U_1^j)\}$, $j=1,2,\ldots$ die Folge aller Mengenpaare derart dass: (1) $U_i^j \in \mathfrak{S}$, $i=0,1$; (2) es existiert eine Zerlegung $B = C_0 + C_1$ für die $\overline{C_0}C_1 + C_0\overline{C_1} = 0$, $U_i^j \subset C_i$,

[1]) Tumarkin (Proc. Acad. Amsterdam XXVIII, p. 996 und Math. Ann. 98 p. 655—656) hat gezeigt, dass für gewisse n-dimensionale Raume R_1, bei Einbettung in vollständige n-dimensionale Raume R notwendig $\dim[R-\varphi(R_1)] \geqq n-1$. Für die Menge E die ich in Fund. Math. X, p. 318 konstruirt habe ist diese Zahl stets $=n$. Das einfachste Beispiel eines Raumes R_1, für den stets: $\dim[R-\varphi(R_1)] = n$ bildet das cartesianische Produkt eines n-dimensionalen Wurfels mit der Menge der rationalen Zahlen.

[2]) d. h. eine Menge mit lauter einpunktigen Quasikomponenten. Die Existenz solcher Mengen von beliebiger positiver Dimension ist von mir bewiesen worden (Fund. Math. X, p. 311—319).

$i=0,1$. Da B total unzusammenhängend ist, so existiert zu jedem Punktepaar p_0, p_1 aus B- ein Paar (U_0^j, U_1^j) derart dass: $p_i \in U_i^{(j)}$, $i=0,1$.

Jeder endlichen dyadischen Zahlenfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ordnen wir zu eine Menge $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \subset B$ in folgender weise.

$D(0) = C_0^1$, $D(1) = C_1^1$, wo C_0^1, C_1^1 den Bedingungen genügen:

$$C_0^1 + C_1^1 = B; \quad \overline{C_0^1}\, C_1^1 + C_0^1\, \overline{C_1^1} = 0; \quad U_i^1 \subset C_i^1, \quad i=0,1.$$

Sei $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ bestimmt und in B zugleich offen und abgeschlossen; $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ enthält mindestens zwei Punkte; also existiert ein kleinstes j, — wir bezeichnen es mit $j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ derart dass:

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)\, U_i^{j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)} \neq 0 \quad i=0,1$$

und eine Zerlegung: $B = C_0^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)} + C_1^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)}$ derart dass:

$$\overline{C_0^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)}}\, C_1^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)} + C_0^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)}\, \overline{C_1^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)}} = 0$$

$$U_i^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)} \subset C_i^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)}, \quad i=0,1.$$

Wir setzen:

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha) = D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)\, C_\alpha^{j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)} \quad \alpha = 0,1$$

es ist dies eine in B zugleich offene und abgeschlossene Menge.

Sei $x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_r}{3^r}$ ein Punkt des Cantorschen Discontinuums welches wir mit P bezeichnen. Wir setzen: $G(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}$. Es ist $G(x)$ eine kompakte Teilmenge von A.

Es ist $j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) < j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$. In der Tat aus:

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \subset D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1})\, U_i^{j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1})} \neq 0 \quad i=0,1$$

folgt, $D(\alpha_1 \ldots \alpha_k)\, U_i^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1})} \neq 0$, $i=0,1$, also ist die Ungleichung:

$$j(\alpha_1 \ldots \alpha_k) > j(\alpha_1 \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1})$$

mit der Definition von $j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$ unvereinbar. Andrerseits ist:

$$D(\alpha_1 \ldots \alpha_k, 0)\, U_1^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)} \subset C_0^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)}\, C_1^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)} = 0$$

$$D(\alpha_1 \ldots \alpha_k, 1)\, U_0^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)} \subset C_1^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)}\, C_0^{j(\alpha_1 \ldots \alpha_k)} = 0$$

also sicher: $j(\alpha_1 \ldots \alpha_k) \neq j(\alpha_1 \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1})$.

Wir zeigen jetzt dass $G(x)\, B$ höchstens einen Punkt enthält. Nehmen wir an q_0, q_1 wären zwei verschiedene Punkte aus $G(x)\, B$. Sei j_1 die erste Zahl für die $q_i \in U_i^{j_1}$, $i=0,1$. Sei m die erste Zahl für die: $j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) > j_1$. Es ist $q_i \in G(x)\, B \subset \overline{D(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}\, B = D(\alpha_1 \ldots \alpha_m)$. Also:

$$U_i^{j_1}\, D(\alpha_1 \ldots \alpha_m) \neq 0; \quad i=0,1; \quad j_1 < j(\alpha_1 \ldots \alpha_m)$$

in Widerspruch mit der Definition von $j(\alpha_1 \ldots \alpha_m)$.

Aus $x_l \to x_0$ folgt $Ls\, G(x_l) \subset G(x_0)$ [1]. Sei nämlich $x_l = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_r^{(l)}}{3^r}$, $l = 0, 1 \ldots$ Zu jedem natürlichen s existiert ein l_s derart das $\alpha_r^{(l)} = \alpha_r^{(0)}$ für $l \geqq l_s$, $r = 1, 2, \ldots, s$. Also ist für $l \geqq l_s$: $G(x_l) \subset \overline{D(\alpha_1^{(0)} \ldots \alpha_s^{(0)})}$. also für jedes s: $Ls\, G(x_l) \subset \overline{D(\alpha_1^{(0)} \ldots \alpha_s^{(0)})}$, woraus die Behauptung folgt.

Sei A_1 die Menge aller Punktepaare (x, y), wo $x \in P$, $y \in G(x)$. Offenbar ist A_1 kompakt. Sei $G_1(x)$ die Menge aller (x, y), wo $y \in G(x)$.

Ist $q \in B$, so existiert ein und nur ein $x(q) \in P$ derart dass $q \in G(x(q))$.

Sei B_1 die Menge aller Paare $(x(q), q)$, wo $q \in B$. Die Zuordnung $\varphi(q) = (x(q), q)$ ist eine Homeomorphie. Also ist $\dim A_1 \geqq \dim B_1 = \dim B = \dim A$. Mindestens eine Komponente von A_1 hat dieselbe Dimension wie A_1, da aber jede Komponente von A_1 in einem $G_1(x)$ enthalten sein muss, so ist für ein x_1: $\dim G_1(x_1) = \dim A_1$; $G_1(x_1)$ ist mit $G(x_1) \subset A$ homeomorph, also schliesslich: $\dim G(x_1) = \dim A$.

Da $G(x_1)\, B$ höchstens einen Punkt enthält so folgt:

$$\dim(A - B) = \dim[G(x_1) - B] = \dim A. \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Man sieht dass $A - B$ sogar ein n-dimensionales Kontinuum enthält.

[1]) Ls — oberer abgeschlossener Limes (nach der Bezeichnungsweise von Kuratowski: Topologie I, p. 153).

Warszawa 19/I 1934.