La propriété de Baire des ensembles et l'homéomorphie généralisée.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On doit à M. Kuratowski la notion importante de l'homéomorphie généralisée. E et H étant deux ensembles de points, on dit qu'il existe entre eux une *homéomorphie de classe* α, β, s'il existe une fonction $f(x)$ définie sur E, à valeurs distinctes sur E, de classe $\leqslant \alpha$ sur E, qui transforme E en H et dont la fonction inverse (définie sur H) est de classe $\leqslant \beta$ sur H [1]).

Le but de cette Note est d'étudier comment se comporte la propriété de Baire des ensembles [2]) par rapport aux homéomorphies de classe α, β. Je démontrerai notamment les deux théorèmes suivants (pour fixer les idées, je me borne aux ensembles linéaires):

Théorème I: *Quel que soit le nombre ordinal* $\beta < \Omega$, *tout ensemble linéaire homéomorphe de classe* 0, β *d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire, jouit également de cette propriété.*

Théorème II: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire* G *jouissant de la propriété de Baire (même toujours de* 1[re] *catégorie) et un ensemble linéaire* E *qui ne jouit pas de la propriété de Baire et qui est homéomorphe de classe* 1, 0 *de l'ensemble* G.

Démonstration du théorème I.

Pour $\beta = 0$, c'est-à-dire pour les homéomorphies ordinaires, le théorème I a été démontré par moi dans ce journal en 1923 [3]).

[1]) Voir C. Kuratowski, *Topologie* I (Monografje Matematyczne t. III), Warszawa 1933, p. 221.

[2]) La propriété de Baire est considérée ici au sens restreint: cf. Kuratowski, l. c., p. 55.

[3]) *Fund. Math.* t. IV, p. 319.

Soit maintenant β un nombre ordinal positif donné $< \Omega$, et soient E un ensemble linéaire jouissant de la propriété de Baire, H un ensemble linéaire homéomorphe de classe 0, β de E. Il existe donc une fonction $f(x)$ continue sur E, à valeurs distinctes sur E, telle que $f(E) = H$, et dont la fonction inverse $\varphi(y)$, définie sur H, est de classe $\leqslant \beta$ sur H. Il existe donc une fonction de Baire d'une variable réelle y, $\psi(y)$, (de classe $\leqslant \beta + 1$) qui coïncide avec $\varphi(y)$ sur H [1]).

Soit P un ensemble parfait donné quelconque. La fonction $\psi(y)$ étant une fonction de Baire d'une variable réelle, elle est continue sur P quand on néglige un ensemble K de première catégorie par rapport à P, et nous pouvons supposer que K est un F_σ. La fonction $\varphi(y)$ (comme égale à $\psi(y)$ sur H) est donc continue sur l'ensemble $PH - K$. Or, l'ensemble $PH - K$ est évidemment un G_δ relativement à H. Désignons par E_1 l'ensemble de tous les points x de E, tels que $f(x) \epsilon PH - K$: la fonction $f(x)$ étant continue sur E et l'ensemble $PH - K$ étant un G_δ relativement à l'ensemble $H = f(E)$, on voit sans peine que l'ensemble E_1 est un G_δ relativement à E, donc un produit de E par un G_δ. L'ensemble E jouissant de la propriété de Baire, il en résulte que l'ensemble E_1 jouit également de cette propriété. Or, on a $f(E_1) = PH - K$ et la fonction $\varphi(y)$ est continue sur $H - K$: l'ensemble $PH - K$ est donc homéomorphe (de classe 0, 0) de E_1, donc, d'après mon théorème précité, jouit encore de la propriété de Baire. L'ensemble $PH = (PH - K) + PHK$ est donc une somme d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire et d'un ensemble de 1[re] catégorie par rapport à P: donc l'ensemble PH jouit de la propriété de Baire relativement à l'ensemble parfait P. L'ensemble parfait P pouvant être arbitraire, nous avons démontré que l'ensemble H jouit de la propriété de Baire.

Le théorème I est ainsi démontré.

Démonstration du théorème II.

M. N. Lusin a défini sur l'ensemble S de tous les nombres irrationnels y de l'intervalle $(0, 1)$ une fonction réelle $Z(y)$, continue et à valeurs distinctes sur S, et il a démontré que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble (linéaire) E ne jouissant pas de la propriété de Baire contenu dans S et tel que l'ensemble $G = Z(E)$ est toujours

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. XVI, p. 81.

de 1[re] catégorie [1]). Je dis que la fonction $Z(y)$ établit une homéomorphie de classe 0, 1 entre les ensembles E et G.

Désignons par $\varphi(x)$ la fonction inverse de $Z(y)$, définie sur l'ensemble $K=Z(S)$: il suffira évidemment de démontrer que la fonction $\varphi(x)$ est de classe $\leqslant 1$ sur K.

La fonction $Z(y)$ de M. Lusin est définie de la façon suivante. On part d'un système $\{P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ d'ensembles parfaits situés dans l'intervalle $(0,1)$ et tels que: 1° le diamètre de $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ tend vers 0 pour $k=\infty$, 2° $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}}\subset P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ quels que soient les nombres naturels k et $n_1, n_2,\ldots, n_k, n_{k+1}$, et 3° les ensembles $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, k étant fixe, sont sans points communs deux à deux. (Les ensembles $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ jouissent encore de deux propriétés qui n'interviendront pas dans notre démonstration). On pose ensuite

$$(1)\qquad Q_k=\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k} P_{n_1,n_2,\ldots,n_k},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes finis de k nombres naturels $n_1, n_2,\ldots, n_k$, et

$$(2)\qquad K=Q_1Q_2Q_3\ldots$$

La fonction $Z(y)$ est maintenant définie comme il suit: si

$$y=\frac{1|}{|n_1^y}+\frac{1|}{|n_2^y}+\frac{1|}{|n_3^y}+\ldots$$

est le développement du nombre y (de S) en fraction continue arithmétique, on désigne par $Z(y)$ le point (unique) de l'ensemble

$$P_{n_1^y}P_{n_1^y,n_2^y}P_{n_1^y,n_2^y,n_3^y}\ldots$$

Soient k et m deux nombres naturels donnés. Les ensembles parfaits $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, où $n_i\leqslant m$ pour $i=1,2,\ldots,k$, sont en nombre fini et sans éléments communs deux à deux: désignons par $F_{k,m}$ leur somme: ce sera donc un ensemble fermé. Définissons sur l'ensemble $F_{k,m}$ la fonction $f_{k,m}(x)$ en posant (pour les nombres naturels $n_1, n_2,\ldots, n_k$, tous $\leqslant m$):

$$f_{k,m}(x)=\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\ldots+\frac{1|}{|n_k},\quad \text{si } x\,\epsilon\, P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}.$$

[1]) *Fund. Math.* t. **XXI**, p. 120.

La fonction $f_{k,m}(x)$ est évidemment continue sur l'ensemble fermé $F_{k,m}$ (en tant que constante sur tout ensemble $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, où $n_i\leqslant m$ pour $i\leqslant k$). On peut donc étendre la fonction $f_{k,m}(x)$ (p. e. linéairement sur les intervalles contigus à $F_{k,m}$) de sorte qu'elle soit définie et continue sur tout l'intervalle $(0,1)$. Nous désignerons encore par $f_{k,m}(x)$ la fonction étendue ainsi.

Soit maintenant x un nombre de l'ensemble K. D'après $x\,\epsilon\, K$, (2) et (1) (les ensembles $P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, où k est fixe, étant disjoints), on conclut sans peine qu'il existe une suite infinie de nombres naturels $g_1^x, g_2^x, g_3^x,\ldots$ (bien déterminée par x), telle que

$$(3)\qquad x\,\epsilon\, P_{g_1^x, g_2^x,\ldots,g_k^x}\quad \text{pour}\quad k=1,2,3,\ldots$$

Soit k un nombre naturel donné. Posons $\mu(x)=g_1^x+g_2^x+\ldots+g_k^x$: de (3) et de la définition de la fonction $f_{k,m}(x)$ résulte tout de suite que

$$f_{k,m}(x)=\frac{1|}{|g_1^x}+\frac{1|}{|g_2^x}+\ldots+\frac{1|}{|g_k^x},\quad \text{pour}\quad m\geqslant\mu(x),$$

donc

$$(4)\qquad \lim_{m=\infty} f_{k,m}(x)=\frac{1|}{|g_1^x}+\frac{1|}{|g_2^x}+\ldots+\frac{1|}{|g_k^x},\quad \text{pour}\quad x\,\epsilon\, K,\ k=1,2,3,\ldots$$

Posons, pour $x\,\epsilon\, K$ et pour k naturels

$$(5)\qquad \varphi_k(x)=\lim_{m=\infty} f_{k,m}(x)$$

— les fonctions $\varphi_k(x)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ sont ainsi définies sur K et de classe $\leqslant 1$ sur K (les fonctions $f_{k,m}(x)$ étant continues dans l'intervalle $(0,1)$). D'après (4) et (5) on a

$$(6)\qquad \varphi_k(x)=\frac{1|}{|g_1^x}+\frac{1|}{|g_2^x}+\ldots+\frac{1|}{|g_k^x},\quad \text{pour}\quad x\,\epsilon\, K;\ k=1,2,3,\ldots,$$

donc

$$(7)\qquad \lim_{k=\infty}\varphi_k(x)=\frac{1|}{|g_1^x}+\frac{1|}{|g_2^x}+\frac{1|}{|g_3^x}+\ldots,\quad \text{pour}\quad x\,\epsilon\, K.$$

Posons, pour $x\,\epsilon\, K$:

$$\varphi(x)=\lim_{k=\infty}\varphi_k(x):$$

d'après (6) et (7) on trouve sans peine

$$|\varphi(x)-\varphi_k(x)|<\frac{1}{k^2}\quad \text{pour}\quad x\,\epsilon\, K,\ k=1,2,3,\ldots$$

la fonction $\varphi(x)$ est donc sur K limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe $\leqslant 1$ sur K: c'est donc une fonction de clssse $\leqslant 1$ sur K. Or, la fonction $\varphi(x)$ est évidemment inverse de la fonction $Z(y)$ (définie sur S).

Nous avons ainsi démontré que la fonction $Z(y)$ établit une homéomorphie de classe 0, 1 entre les ensembles S et K: la fonction $\varphi(x)$ établit donc une homéomorphie de classe 1, 0 entre les ensembles K et S et par suite aussi entre les ensembles G et E.

Le théorème II est ainsi démontré.

Über total zusammenhangslose Mengen.

Von

S. Mazurkiewicz (Varsovie).

In dieser Note beweise ich einen Satz, welcher mit der folgenden, von Tumarkin und Hurewicz herrührenden Problemstellung in Zusammenhang steht: wird ein metrischer, separabler Raum R_1, mittelst einer Homeomorphie φ in einen vollständigen, resp. kompakten Raum R von derselben Dimension eingebettet, so soll die Dimension der Ergänzungsmenge $R - \varphi(R_1)$ untersucht werden [1]).

Satz. *Ist A ein kompakter metrischer Raum, $B \subset A$ eine total zusammenhangslose* [2]) *Menge und* $\dim A = \dim B > 0$, *so ist auch* $\dim(A - B) = \dim A$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man voraussetzen, dass B in sich dicht ist. Sei $\mathfrak{S}$ ein abzählbares, unbegrenzt feines Überdeckungssystem von B. Sei $\{(U_0^j, U_1^j)\}$, $j = 1, 2, \dots$ die Folge aller Mengenpaare derart dass: (1) $U_i^j \in \mathfrak{S}$, $i = 0, 1$; (2) es existiert eine Zerlegung $B = C_0 + C_1$ für die $\overline{C_0}\, C_1 + C_0\, \overline{C_1} = 0$, $U_i^j \subset C_i$,

[1]) Tumarkin (Proc. Acad. Amsterdam XXVIII, p. 996 und Math. Ann. 98 p. 655—656) hat gezeigt, dass für gewisse n-dimensionale Raume R_1, bei Einbettung in vollständige n-dimensionale Raume R notwendig $\dim[R - \varphi(R_1)] \geqq n - 1$. Für die Menge E die ich in Fund. Math. X, p. 318 konstruirt habe ist diese Zahl stets $= n$. Das einfachste Beispiel eines Raumes R_1, für den stets: $\dim[R - \varphi(R_1)] = n$ bildet das cartesianische Produkt eines n-dimensionalen Wurfels mit der Menge der rationalen Zahlen.

[2]) d. h. eine Menge mit lauter einpunktigen Quasikomponenten. Die Existenz solcher Mengen von beliebiger positiver Dimension ist von mir bewiesen worden (Fund. Math. X, p. 311—319).