Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale.

Von

H. Busemann und W. Feller (Kopenhagen).

Die folgende Untersuchung greift die Frage auf, nach welchen Mengen die totalstetigen additiven Mengenfunktionen oder, was dasselbe ist, die unbestimmten Lebesgueschen Integrale differenziert werden können, d. h. wenn R ein System messbarer Mengen positiven Masses ist, von denen sich auf jeden Punkt Q des Raumes eine Teilfolge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots = \{\varrho_\nu\}$ zusammenzieht, so wird gefragt: Wie muss das System R beschaffen sein, damit für jede summierbare Funktion $f(P)$ und alle Punkte Q mit Ausnahme einer Nullmenge

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(\varrho_k)} \int_{\varrho_k} f(P)\, dP = f(Q)$$

ist [1]).

Man beweist gewöhnlich [2]) mit Hilfe des Vitalischen Satzes, dass das System der achsenparallelen Würfel (oder ein gleichwertiges) von dieser Art ist. Ein einfacher Schluss zeigt weiter, dass man dann auch nach den Mengen jeder in bezug auf das zuerst behandelte System regulären Mengenfamilie [3]) differenzieren kann. Ob es auch bezüglich der achsenparallelen Würfel *nicht* reguläre Mengensysteme gibt, nach welchen man differenzieren kann, ist nicht bekannt. Insbesondere weiss man in dieser Hinsicht nichts über beliebige Intervalle [4]) [5]). Für die Funktion

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad f(x, y) \text{ summierbar,}$$

ist also nur bewiesen, dass der Differenzenquotient

$$\frac{1}{h\cdot k} \int_x^{x+h} \int_y^{y+k} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{h\cdot k}\,[F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y)]$$

gegen einen Grenzwert strebt, wenn h und k so gegen 0 gehen, dass das Verhältnis $\left|\frac{h}{k}\right|$ zwischen zwei positiven Konstanten bleibt. Die Existenz des entsprechenden Doppellimes ist hierin nicht enthalten.

Bei der Behandlung der allgemeinen Frage nach der Beschaffenheit der Mengensysteme, nach welchen man differenzieren kann, zeigt sich ein in den bisherigen Ergebnissen nicht auftretender Unterschied zwischen dem Verhalten der Integrale beschränkter und der nicht beschränkter Funktionen. Insbesondere werden wir sehen, dass erstere nach den Intervallen differenziert werden können, letztere dagegen nicht immer.

Der Fall des beschränkten Integranden lässt sich zurückführen auf die Behandlung der Integrale über solche Funktionen, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen. Daher ist hier die Gültigkeit des Dichtesatzes bezüglich R für die Differenzierbarkeit notwendig und hinreichend. Wir sagen dabei, *für R gilt der Dichtesatz, wenn für jede messbare Menge $\varkappa$ in fast allen Punkten Q des Raumes für jede sich auf Q zusammenziehende Folge $\{\varrho_k\}$ aus R der Grenzwert*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(\varrho_k \varkappa)}{m(\varrho_k)}$$

existiert, und zwar für $Q \subset \varkappa$ gleich 1, *und sonst gleich* 0 *ist.*

[1]) $m(\;)$ bezeichnet immer das Lebesguesche Mass.

[2]) Vgl. z. B. C. Carathéodory: Reelle Funktionen, 2. Auflage, Kap. IX.

[3]) Die Definition derselben, sowie die erwähnte Schlussweise findet man in der Bemerkung zu § 1. dieser Arbeit.

[4]) Unter einem *Intervall* verstehen wir hier stets ein achsenparalleles Parallelepiped des Euklidischen Raumes E^r.

[5]) Für dieses System gilt der Vitalische Satz nicht, wie Banach und H. Bohr gezeigt haben. Vgl. Carathéodory, a. a. O. Anhang. Übrigens folgt das auch beiläufig aus den Ergebnissen des § 4 dieser Arbeit.

Für den Dichtesatz lässt sich ein für das Folgende grundlegendes Kriterium angeben, welches sich einfach ausspricht, wenn man die Vereinigungsmenge $\sigma_\alpha(\varkappa)$ derjenigen Mengen ϱ aus R einführt, in welchen die „mittlere Dichte" von $\varkappa$ grösser als eine Zahl α zwischen 0 und 1 ist; d. h. für die

$$\frac{m(\varrho\,\varkappa)}{m(\varrho)} > \alpha$$

ist. Für die Gültigkeit des Dichtesatzes (§ 1) erweist sich dann als hinreichend, wenn für jede beschränkte messbare Menge K und jedes α zwischen 0 und 1 eine Beziehung der Form

$$(*) \qquad m(\sigma_\alpha(\varkappa)) \leqslant C(\alpha)\, m(\varkappa)$$

besteht, wo $C(\alpha)$ eine nur von α und R, aber nicht von $\varkappa$ abhängige Konstante bedeutet. (*) ist im allgemeinen nicht notwendig, wohl aber, wenn R mit irgend einer Menge auch alle dazu ähnlich gelegenen [6]) enthält. In diesem Falle ist (*) gleichbedeutend mit der Forderung, dass für jede Menge $\varkappa$ endlichen Masses auch $\sigma_\alpha(\varkappa)$ endliches Mass habe. Es zeigt sich nun (§ 2) merkwürdigerweise, dass dass System der Intervalle der Bedingung (*) genügt, dagegen das System aller rechtwinkligen Parallelepipede nicht, so dass für ersteres der Dichtesatz gilt, für letzteres aber nicht.

Man kann demnach (§ 3) die unbestimmten Integrale beschränkter messbarer Funktionen $f(x_1, \ldots, x_r)$ nach Intervallen differenzieren. Hieraus folgt, dass die Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_r} f(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r$$

für $s \leqslant r$ bis auf eine Nulmenge die gemischten Ableitungen

$$F_{(x_{\nu_1}\ldots x_{\nu_s})}, \quad \nu_i \neq \nu_k \quad \text{für} \quad i \neq k,$$

im Sinne des s-fachen Limes (des entsprechenden Differenzenquotienten) besitzt, und dass dieser daher für jede Permutation $\mu_1, \ldots, \mu_s$ der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ gleich

$$\frac{\partial^s F}{\partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_s}}$$

[6]) Unter ähnlich gelegen verstehen wir hier und im folgenden „ähnlich und ähnlich gelegen".

ist. Ein besonderer Beweis der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge ist in diesem Falle also nicht erforderlich.

Schliesslich (§ 4) stellen wir eine zu (*) analoge notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass bezüglich eines Systems, das mit irgendeiner Menge alle dazu ähnlich gelegenen enthält, die unbestimmten Integrale über beliebige summierbare Funktionen differenziert werden können. Man sieht sofort, dass z. B. die Würfel und die Kugeln dieser Bedingung genügen, die Intervalle dagegen nicht. Es gibt also totalstetige additive Mengenfunktionen, die sich nach Intervallen *nicht* differenzieren lassen, und wo die gemischten Ableitungen der zugehörigen Punktfunktionen im Sinne des mehrfachen Limes im allgemeinen *nicht* existieren. (Vgl. den *Zusatz bei der Korrektur* am Ende der Arbeit).

§ 1.

Kriterien für die Gültigkeit des Dichtesatzes.

Es sei $R = \{\varrho\}$ ein System von beschränkten offenen Mengen des r-dimensionalen Euklidischen Raumes E^r von der Art, dass sich auf jeden Punkt des Raumes eine Folge $\{\varrho_k\}$ von Mengen aus R zusammenzieht. Die Voraussetzung der Offenheit der Mengen ϱ bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da man die Resultate mühelos auf Systeme beliebiger meßbarer Mengen positiven Maßes überträgt. Wenn $\varkappa$ eine messbare Menge ist, so verstehen wir unter der *mittleren Dichte von $\varkappa$ in einer Menge ϱ* den Quotienten

$$\frac{m(\varkappa \cdot \varrho)}{m(\varrho)}.$$

Wir bilden zunächst den Limes inferior der mittleren Dichte für eine beliebige sich auf einen Punkt P zusammenziehende Folge $\{\varrho_k\}$ von Mengen aus R. Die untere Grenze dieser Limites inferiores für alle sich auf P zusammenziehenden Folgen $\{\varrho_k\}$ aus R nennen wir mit Lebesgue die *untere Dichte von $\varkappa$ bezüglich R in P*. Entsprechend nennen wir die obere Grenze der Limites superiores derselben Folgen die *obere Dichte von $\varkappa$ bezüglich R in P*. Sind in einem Punkte diese beiden Dichten gleich, so sprechen wir von *Dichte* schlechthin. Die Dichte existiert insbesondre in allen Punkten, in denen entweder die obere Dichte gleich Null oder die untere Dichte gleich 1 ist.

Wir sagen, *für das System R gilt der Dichtesatz, wenn für jede messbare Menge die (untere) Dichte in fast allen Punkten der Menge gleich 1 ist, oder, was dasselbe ist, wenn die (obere) Dichte für jede messbare Menge in fast allen Punkten ihrer Komplementärmenge verschwindet.*

Wir führen nun einige Bezeichnungen ein. $d(\lambda)$ bedeute stets den Durchmesser der Punktmenge λ; der Buchstabe N mit oder ohne Indizes ist für Nullmengen reserviert. Es sei $0 < \alpha < 1$, $\delta < 0$ und $\varkappa$ eine messbare Menge. *Unter $\sigma_{\alpha,\delta}(\varkappa)$ verstehen wir die Vereinigungsmenge aller Mengen ϱ aus R, in denen die mittlere Dichte von $\varkappa$ grösser als α ist und deren Durchmesser kleiner als δ sind, für die also:*

$$1)\quad m(\varrho\,\varkappa) > \alpha \cdot m(\varrho),$$
$$2)\quad d(\varrho) < \delta$$

ist. $\sigma_\alpha(\varkappa)$ *ist*, wie in der Einleitung angegeben, *die Vereinigungsmenge aller Mengen aus R, welche nur der ersten Einschränkung unterworfen sind.*

Aus der Definition sieht man, dass für die Vereinigungsmenge beliebiger messbarer Mengen λ stets

$$\sigma_{\alpha,\delta}\left(\sum \lambda\right) \supset \sum \sigma_{\alpha,\delta}(\lambda), \tag{1}$$

und ferner, dass für $\alpha_1 \leqslant \alpha$, $\delta_1 \geqslant \delta$ und $\varkappa_1 \supset \varkappa$ stets

$$\sigma_{\alpha_1,\delta_1}(\varkappa_1) \supset \sigma_{\alpha,\delta}(\varkappa) \tag{2}$$

ist. Hiernach enthält der Durchschnitt $\prod\limits_{\delta>0} \sigma_{\alpha,\delta}(\varkappa)$ bei festem α alle Punkte des Raumes, in denen die obere Dichte von $\varkappa$ grösser als α und darüber hinaus höchstens solche Punkte, in denen sie gleich α ist.

Wenn der Dichtesatz gilt, folgt hieraus

$$\prod_{\delta>0} \sigma_{\alpha,\delta}(\varkappa) + N_1 = \varkappa + N_2; \tag{3}$$

wenn umgekehrt (3) für jedes α zwischen 0 und 1 gilt, so ergibt sich daraus wegen (2)

$$\prod_{0<\alpha<1} \prod_{\delta>0} \sigma_{\alpha,\delta}(\varkappa) + N_3 = \varkappa + N_4,$$

d. h. die obere Dichte von $\varkappa$ ist in fast allen Punkten von $E^r - \varkappa$ gleich 0.

Wir betrachten jetzt eine monoton abnehmende Folge beschränkter messbarer Mengen $\varkappa_\nu$ mit leerem Durchschnitt, und eine monoton gegen 0 abnehmende Folge positiver Zahlen δ_ν. Wenn der Dichtesatz gilt, so strebt für jedes α zwischen 0 und 1

$$m(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\varkappa_\nu)) \to 0; \tag{4}$$

denn nach (2) ist für $\nu > n$

$$m(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\varkappa_\nu)) \leqslant m(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\varkappa_n))$$

und nach (3)

$$\lim_{\nu\to\infty} m(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\varkappa_n)) = m(\varkappa_n),$$

also

$$\lim_{\nu\to\infty} m(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(\varkappa_\nu)) \leqslant m(\varkappa_n)$$

für alle n, woraus (4) wegen $m(\varkappa_n) \to 0$ folgt.

Die somit für die Gültigkeit des Dichtesatzes notwendige Bedingung (4) ist schwächer als (3), aber trotzdem *hinreichend*. Dazu haben wir zu zeigen, dass für jede beschränkte messbare Menge Λ die Teilmenge der Punkte, in denen sie bezüglich R nicht die Dichte 1 hat, eine Nullmenge ist. Es sei λ die Teilmenge von Λ, in welcher die untere Dichte von Λ bezüglich R kleiner als $1-\alpha$ ist. Es ist zu beweisen, dass jede abgeschlossene Teilmenge φ von λ das Mass 0 hat. Auf jeden Punkt von φ zieht sich nach Voraussetzung eine Folge $\{\varrho_i\}$ von Mengen aus R zusammen mit

$$m(\varphi \cdot \varrho_i) \leqslant m(\lambda \cdot \varrho_i) < (1-\alpha)\, m(\varrho_i). \tag{5}$$

Wir wählen unter diesen Mengen endlich viele, etwa $\varrho_1^1, \ldots, \varrho_{s_1}^1$, mit kleinerem Durchmesser als 1 so, dass sie φ überdecken und setzen $\sum\limits_{i=1}^{s_1} \varrho_i^1 = \gamma_1$. Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ schon definiert, so wählen wir endlich viele der Ungleichung (5) genügende Mengen, etwa $\varrho_1^n, \ldots, \varrho_{s_n}^n$, die in γ_{n-1} enthalten und deren Durchmesser kleiner als $1/n$ sind, so, dass sie φ überdecken, und setzen $\sum\limits_{i=1}^{s_n} \varrho_i^n = \gamma_n$. Es gilt dann $\gamma_n \subset \gamma_{n-1}$ und ferner

$$m(\varphi) \leqslant m(\gamma_n) = m(\varphi) + \epsilon_n \quad \text{mit} \quad \epsilon_n \to 0.$$

Die Mengen $\varkappa_n = \gamma_n - \varphi$ bilden also eine monoton abnehmende Folge mit leerem Durchschnitt. Es ist wegen $\varrho_i^n \subset \gamma_n$

$$m(\varrho_i^n) = m(\varkappa_n \cdot \varrho_i^n) + m(\varphi \cdot \varrho_i^n);$$

ferner gilt nach (5)

$$m(\varphi \cdot \varrho_i^n) < (1-\alpha)\, m(\varrho_i^n),$$

also

$$m(\varkappa_n \cdot \varrho_i^n) > \alpha \cdot m(\varrho_i^n);$$

daher ist

$$\varphi \subset \sigma_{\alpha, \frac{1}{n}}(\varkappa_n).$$

Da die Mengen $\varkappa_n$ die Voraussetzungen für (4) erfüllen, ergibt sich aus (4): $m(\sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}(\varkappa_n)) \to 0$, also $m(\varphi) = 0$. Wir haben damit gefunden:

I. *Für das System R gilt der Dichtesatz dann und nur dann, wenn für jedes α zwischen* 0 *und* 1, *für jede monoton abnehmende Folge beschränkter messbarer Mengen $\varkappa_n$ und jede Folge $\delta_1 > \delta_2 > \ldots, \delta_\nu \to 0$ die Bedingung*

$$m(\sigma_{\alpha, \delta_\nu}(\varkappa_\nu)) \to 0 \tag{4}$$

erfüllt ist.

Insbesondre gilt also der Dichtesatz, wenn für jede beschränkte messbare Menge $\varkappa$ die Abschätzung

$$m(\sigma_\alpha(\varkappa)) < C(\alpha) \cdot m(\varkappa) \tag{6}$$

besteht, wobei $C(\alpha)$ nur vom System R und von α abhängt, nicht aber von $\varkappa$. Dass die Bedingung (6) im allgemeinen nicht notwendig sein kann, ist trivial. Hingegen ist sie es, wenn das System R mit irgend einer Menge ϱ auch alle zu ihr ähnlich gelegenen Mengen enthält. Dem Beweise dieser Behauptung schicken wir folgenden Hilfsatz voraus:

Ist $\varkappa$ eine messbare beschränkte Menge positiven Masses, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ in jeder offenen Menge Γ abzählbar viele zu $\varkappa$ ähnlich gelegene Mengen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ derart, dass

$$1)\quad m\left(\sum \varkappa_\nu\right) = m(\Gamma)$$

$$2)\quad \sum m(\varkappa_\nu) < m(\Gamma) + \varepsilon$$

ist. Dabei kann man die $\varkappa_\nu$ der Einschränkung unterwerfen, dass ihre Durchmesser kleiner sind als eine vorgegebene Zahl δ [7]).

[7]) Wenn $\varkappa$ nach aussen quadrierbar ist, kann $\varepsilon = 0$ gemacht werden, was dann ein Spezialfall des Vitalischen Satzes ist.

I sei ein offenes Intervall dass $\varkappa$ enthält, und

$$\frac{m(\varkappa)}{m(I)} = a;$$

dabei kann $a < 1$ vorausgesetzt werden, da sonst nichts zu beweisen ist. Wir bemerken zunächst folgendes: λ sei eine beliebige Teilmenge von Γ, welche Vereinigungsmenge von zu $\varkappa$ ähnlich gelegenen Mengen ist, und es werde

$$\frac{m(\lambda)}{m(\Gamma)} = q$$

gesetzt. Dann gibt es in Γ zu jedem $\eta > 0$ eine Folge von paarweise fremden zu $\varkappa$ ähnlich gelegenen Mengen $\varkappa_\nu$ derart, dass für ihre Vereinigungsmenge $\Lambda = \Sigma \varkappa_\nu$ die beiden Ungleichungen

$$\text{a)}\quad \frac{m(\lambda + \Lambda)}{m(\Gamma)} > q + a\frac{1-q}{2}$$

$$\text{b)}\quad m(\lambda\Lambda) < \eta$$

gelten. Zum Beweise überdecken wir $\Delta = \Gamma - \lambda$ durch eine offene Menge Δ' so dass

$$m(\Delta' - \Delta) > \text{Min}\left[\eta,\, a\frac{1-q}{2} m(\Gamma)\right]$$

wird. Wir stellen Δ' bis auf eine Nullmenge als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen zu I ähnlich gelegenen, paarweise fremden Intervallen I_ν dar. Bei der Dilatation, die I in I_ν überführt, gehe $\varkappa$ in $\varkappa_\nu$ über: $\Lambda = \Sigma \varkappa_\nu$ sei ihre Vereinigungsmenge. Dann ist

$$m(\Lambda) = m\left(\sum \varkappa_\nu\right) = \sum m(\varkappa_\nu) = a \sum m(I_\nu) = a\, m(\Delta')$$

und

$$m(\lambda \cdot \Lambda) \leqslant m(\lambda \cdot \Delta') < \text{Min}\left[\eta,\, a\frac{1-q}{2} m(\Gamma)\right].$$

Um auch (a) zu beweisen, bemerke man, dass

$$m(\lambda + \Lambda) = m(\lambda) + m(\Lambda) - m(\lambda\Lambda) \geqslant$$
$$\geqslant m(\lambda) + a \cdot m(\Delta') - a\frac{1-q}{2} m(\Gamma).$$

Beachtet man $m(\lambda) = q \cdot m(\Gamma)$ und

$$m(\Delta') \geqslant m(\Delta) = m(\Gamma) - m(\lambda),$$

so ergibt sich

$$m(\lambda + \Lambda) > \left(q + a\,\frac{1-q}{2}\right) m(\Gamma).$$

Aus dieser Bemerkung leitet man den Hilfssatz so ab:

$\varkappa^1$ sei eine zu $\varkappa$ ähnlich gelegene Teilmenge von Γ. Wir nehmen zur Induktion an, dass die Menge $\varkappa^n$ bereits definiert sei, und zwar als Vereinigungsmenge von gewissen zu $\varkappa$ ähnlich gelegenen Teilmengen $\varkappa_\nu^n$ von Γ, derart dass

$$(7) \qquad \sum_\nu m(\varkappa_\nu^n) < m(\varkappa^n) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\varepsilon.$$

Es sei

$$q_n = \frac{m(\varkappa^n)}{m(\Gamma)}.$$

Wir wenden das soeben beschriebene Verfahren an auf

$$\lambda = \varkappa^n, \quad q = q_n, \quad \eta = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Dadurch wird eine Menge $\Lambda = \Sigma\varkappa_\nu$ von zu $\varkappa$ ähnlich gelegenen Mengen $\varkappa_\nu$ bestimmt, und zwar ist wegen $\varkappa_\nu \cdot \varkappa_\mu = 0$ für $\nu \neq \mu$ und wegen (7)

$$\sum_\nu m(\varkappa_\nu^n) + \sum m(\varkappa_\nu) \leqslant m(\varkappa^n) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\varepsilon + m(\Lambda) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

sodass $\varkappa^{n+1} = \varkappa^n + \Lambda$ der Ungleichung (7) mit $n+1$ und außerdem der Beziehung

$$m(\varkappa^{n+1}) > \left(q_n + a\,\frac{1-q_n}{2}\right) m(\Gamma)$$

genügt. Setzt man wieder

$$q_{n+1} = \frac{m(\varkappa^{n+1})}{m(\Gamma)},$$

so ist nach Konstruktion

$$q_{n+1} > q_n + a\,\frac{1-q_n}{2}.$$

Die Zahlen q_n wachsen monoton und streben offenbar gegen 1. Die Grenzmenge der $\varkappa^n$ ist daher mit Γ massgleich; sie ist Vereinigungsmenge von zu $\varkappa$ ähnlich gelegenen Teilmengen von Γ und genügt wegen (7) auch der zweiten Bedingung des Hilfssatzes. Schliesslich ist es klar, dass man sich bei der ganzen Konstruktion auf solche zu $\varkappa$ ähnlich gelegene Mengen beschränken kann, deren Durchmesser kleiner als δ sind. Damit ist der Hilfsatz bewiesen.

Unsere Behauptung über die Ungleichung (6) bestand im folgenden: Wenn das System R mit jeder Menge ϱ auch alle zu ϱ ähnlich gelegenen Mengen enthält, und der Abschätzung (6) *nicht* genügt, so gilt bezüglich R der Dichtesatz *nicht*. Wir zeigen, dass es unter den angegebenen Voraussetzungen in jedem offenen Intervall I eine messbare Menge $\varkappa$ mit

$$m(\varkappa) < \frac{2}{3}\, m(I)$$

gibt, die in allen Punkten von I bezüglich R eine positive obere Dichte hat.

Da die Ungleichung (6) für R nicht erfüllt ist, gibt es für ein festes $\alpha > 0$ und für jede positive Zahl C eine beschränkte messbare Menge $\varkappa$ mit

$$m(\sigma_\alpha(\varkappa)) > C \cdot m(\varkappa).$$

Es sei $\{\varkappa_n\}$ eine Folge von solchen Mengen mit

$$m(\sigma_\alpha(\varkappa_n)) > 4^n \cdot m(\varkappa_n).$$

$\sigma_\alpha(\varkappa_n)$ ist Vereinigungsmenge von Mengen ϱ des Systems R, in denen die mittlere Dichte von $\varkappa_n$ grösser als α ist. Wir können unter diesen endlich viele so herausgreifen, dass ihre Vereinigungsmenge π_n b e s c h r ä n k t ist, und dass für ihr Mass die Ungleichung

$$m(\pi_n) > 4^n \cdot m(\varkappa_n)$$

erfüllt ist. Nun konstruieren wir nach unserem Hilfssatz in I für jedes n eine Folge von zu π_n ähnlich gelegenen Mengen π_n^ν, deren Durchmesser $d(\pi_n^\nu) < 1/n$ sind, und für die

$$m(I) = m\left(\sum_\nu \pi_n^\nu\right) \leqslant \sum_\nu m(\pi_n^\nu) < 2 \cdot m(I)$$

ist. $\varkappa_n^\nu$ sei das Bild von $\varkappa_n$ in π_n^ν; ferner sei

$$\pi^n = \sum_\nu \pi_n^\nu, \quad \varkappa^n = \sum_\nu \varkappa_n^\nu.$$

Es ist dann

$$m(\pi^n) = m(I),$$

$$m(\varkappa^n) \leqslant \sum_\nu m(\varkappa_n^\nu) < \frac{1}{4^n} \sum_\nu m(\pi_n^\nu) < \frac{2}{4^n} m(I).$$

Für die Menge $\varkappa = \sum_n \varkappa^n$ ist also

$$m(\varkappa) < \frac{2}{3} m(I);$$

diese Menge hat aber in fast allen Punkten des Intervalls I bezüglich R mindestens die obere Dichte α. Jede Menge π_n^ν ist Vereinigungsmenge von Mengen ϱ des Systems R, in denen $\varkappa_n^\nu$ und wegen $\varkappa \supset \varkappa^n \supset \varkappa_n^\nu$ erst recht die Menge $\varkappa$ eine grössere mittlere Dichte als α hat. Nun liegen fast alle Punkte von I für jedes n in einem $\pi_n^{\nu_n}$. Wegen $d(\pi_n^\nu) < 1/n$ zieht sich wirklich auf fast jeden Punkt von I eine Folge von Mengen ϱ unsres Systems zusammen, in denen die mittlere Dichte von $\varkappa$ grösser als α ist. Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

II. *Dem System R mögen mit jeder Menge ϱ auch alle zu ϱ ähnlich gelegenen Mengen angehören; dann ist für die Gültigkeit des Dichtesatzes bezüglich R notwendig und hinreichend, dass für jedes α zwischen* 0 *und* 1 *und alle beschränkten messbaren Mengen $\varkappa$ die Ungleichung*

$$m(\sigma_\alpha(\varkappa)) < C(\alpha) \cdot m(\varkappa)$$

besteht, wobei $C(\alpha)$ nur von α und vom System R, nicht aber von $\varkappa$ abhängt.

Man kann diesem Kriterium eine etwas andere Fassung geben:

II'. *Der Dichtesatz gilt bezüglich des Systems R, das wieder mit jeder Menge alle dazu ähnlich gelegenen enthalte, dann und nur dann, wenn für jedes α zwischen* 0 *und* 1 *und jede messbare Menge $\varkappa$ endlichen Masses* [8]*) auch die Menge $\sigma_\alpha(k)$ endliches Mass hat.*

Es gebe eine Menge $\varkappa$ endlichen Maßes mit $\sigma_\alpha(\varkappa) = \infty$. Wir wählen bei vorgegebenem C aus den Mengen ϱ, welche $\sigma_\alpha(\varkappa)$ bilden — für die also $m(\varrho \cdot \varkappa) > \alpha \cdot m(\varrho)$ ist — endlich viele, etwa $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, so aus, dass

$$m(\varrho_1 + \ldots + \varrho_n) > C \cdot m(\varkappa)$$

wird, und bezeichnen den Durchschnitt $\varkappa \cdot \sum_{i=1}^n \varrho_i$ mit $\varkappa'$. Dann ist $\varkappa'$ beschränkt, und andrerseits $\sigma_\alpha(\varkappa') \supset \varrho_1 + \ldots + \varrho_n$, also

$$m(\sigma_\alpha(\varkappa')) \geqslant m(\varrho_1 + \ldots + \varrho_n) \geqslant C \cdot m(\varkappa) \geqslant C \cdot m(\varkappa').$$

Jetzt zeigen wir, dass die Bedingung hinreichend ist. Wenn der Dichtesatz bezüglich R nicht gilt, so gibt es bei passendem α eine Folge beschränkter messbarer Mengen $\varkappa_n$, für die

$$m(\sigma_\alpha(\varkappa_n)) > n^2 \cdot m(\varkappa_n).$$

Wir verstehen unter $\varkappa_n'$ eine zu $\varkappa_n$ ähnlich gelegene Menge mit $m(\varkappa_n') = \frac{1}{n^2}$ und unter s_n eine solche beschränkte Teilmenge von $\sigma_\alpha(\varkappa_n')$, für die ebenfalls

$$m(s_n) > n^2 \cdot m(\varkappa_n') = 1$$

gilt. Wir verschieben die Mengen $\varkappa_n'$ so, dass die zugehörigen Mengen s_n paarweise fremd werden. Dann ist

$$m\left(\sum \varkappa_n'\right) \leqslant \sum m(\varkappa_n') = \sum \frac{1}{n^2},$$

$$m\left(\sum s_n\right) = \infty$$

und [9])

$$\sigma_\alpha\left(\sum \varkappa_n'\right) \supset \sum \sigma_\alpha(\varkappa_n') \supset \sum s_n.$$

Bemerkung.

Wenn der Dichtesatz für ein System R gilt, so gilt er nach

[8]) Das Wesentliche ist, daß $\varkappa$ nicht beschränkt vorausgesetzt wird.

[9]) Es gibt Systeme R, für welche das Kriterium I erfüllt ist, II aber nicht. Aus § 2 wird hervorgehen, dass dies zutrifft für das System aller Rechtecke ϱ der Ebene, für die die Verhältnisse der Seitenlängen grösser oder gleich $\frac{1}{1+t}$ sind, wobei t die Entfernung des Mittelpunktes von ϱ vom Ursprung ist. Dieses System hat allerdings die Eigenschaft, in jedem beschränkten Bereich der Bedingung (6) zu genügen; es gibt jedoch auch einfache Beispiele, von Systemen, die (4) erfüllen, und wo es trotzdem eine Menge positiven Masses derart gibt, dass die Bedingung (6) in keiner Umgebung eines Punktes dieser Menge erfüllt ist.

Lebesgue auch für alle bezüglich des Systems R regulären Mengenfamilien. Dabei heisst die Mengenfamilie π bezüglich R regulär, wenn sich auf jeden Punkt P eine Mengenfolge $\{\pi_k\}$ aus π zusammenzieht mit der Eigenschaft, dass jedes π_k in einem solchen ϱ_k aus R enthalten ist, für das

$$\frac{m(\pi_k)}{m(\varrho_k)} > \vartheta(P) > 0$$

gilt, wobei $\vartheta(P)$ eine beliebige von P, aber nicht von der speziellen Folge $\{\pi_k\}$ abhängige positive Funktion ist. Etwas allgemeiner nennt man die Mengenfamilie π *„in P regulär bezüglich R“*, wenn es zu jeder gegen P konvergierenden Folge von Menge π_k aus π eine sich auf P zusammenziehende Folge $\{\varrho_k\}$ aus R gibt, mit

$$\varrho_k \supset \pi_k, \quad \frac{m(\pi_k)}{m(\varrho_k)} > \vartheta > 0.$$

(Zum Unterschied gegen eben wird $\pi_k \supset P$ nicht gefordert).

Wenn dann für eine beliebige messbare Menge $\varkappa$ und eine Folge $\{\varrho_k\}$, die sich auf P zusammenzieht,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(\varkappa\,\varrho_k)}{m(\varrho_k)} = 1$$

ist, so gilt auch

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(\varkappa\,\pi_k)}{m(\pi_k)} = 1.$$

Denn ist C die Komplementärmenge von $\varkappa$, so ist

$$1-\frac{m(\pi_k\,\varkappa)}{m(\pi_k)} = \frac{m(C\pi_k)}{m(\pi_k)} \leqslant \frac{m(C\varrho_k)}{m(\varrho_k)}\cdot\frac{m(\varrho_k)}{m(\pi_k)} \leqslant \frac{1}{\vartheta}\left(1-\frac{m(\varrho_k\,\varkappa)}{m(\varrho_k)}\right) \to 0.$$

Wenn also eine messbare Menge in irgend einem Punkte des Raumes bezüglich R die Dichte 1 oder 0 hat, so hat sie an dieser Stelle dieselbe Dichte für jede dort bezüglich R reguläre Mengenfamilie.

§ 2.

Spezielle Mengensysteme, für die der Dichtesatz gilt oder nicht gilt.

A. Die Intervalle.

$R=\{\varrho\}$ sei nun das System aller offenen Intervalle [4]) des E^r.

Nach (6) gilt bezüglich der Intervalle der Dichtesatz, wenn wir zeigen können:

Für jede beschränkte messbare Menge $\varkappa$ des E^r ist

$$m(\sigma_\alpha(\varkappa)) \leqslant 2^{(r^2)}\cdot\alpha^{-r}\cdot m(\varkappa). \tag{8}$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach r. Vorher bemerken wir, dass $\varkappa$ als *offene* Menge angenommen werden darf. Denn aus (8) für offene Mengen ergibt sich dieselbe Beziehung für beliebige messbare Mengen durch Grenzübergang.

1). Es sei $r=1$ und γ eine beschränkte offene Menge auf der Geraden E^1. $\sigma_\alpha(\gamma)$ ist die Vereinigungsmenge der offenen Intervalle ϱ mit

$$\alpha\cdot m(\varrho) < m(\varrho\,.\,\gamma).$$

Aus diesen ϱ wählen wir endlich viele, etwa $\varrho_1,\ldots,\varrho_h$ so aus, dass $m(\sigma_\alpha(\gamma)) - m(\sum_1^h \varrho_i) < \varepsilon$ wird. Haben drei dieser ϱ_i einen nichtleeren Durchschnitt, so ist wenigstens eins in der Summe der beiden anderen enthalten. Wir können demnach $\sum_{i=1}^h \varrho_i$ so als Vereinigungsmenge gewisser ϱ_i, etwa $\varrho_{i_1},\ldots,\varrho_{i_s}$, darstellen, dass jeder Punkt von $\sigma_\alpha(\gamma)$ in höchstens zwei der ϱ_{i_k} vorkommt. Dann liegt auch jeder Punkt von $\gamma\cdot\Sigma\varrho_i$ in höchstens zwei der offenen Mengen $\gamma\cdot\varrho_{i_k}$; daher gilt

$$m(\sigma_\alpha(\gamma)) - \varepsilon < m\left(\sum_{i=1}^h \varrho_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^s m(\varrho_{i_k}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^s m(\gamma\cdot\varrho_{i_k}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\alpha}\, m\left(\sum_{k=1}^s \gamma\cdot\varrho_{i_k}\right) \leqslant \frac{2}{\alpha}\, m(\gamma).$$

Eine etwas eingehendere Überlegung liefert [10]), die genaue Abschätzung

$$m(\sigma_\alpha(\gamma)) \leqslant \left(\frac{2}{\alpha}-1\right) m(\gamma),$$

welche wir aber nicht brauchen.

[10]) vgl. z. B. H. Lebesgue: Ann. de l'École Norm. sup. (3) **27**, 1910.

2) Für den weiteren Beweis führen wir einige Bezeichungen ein: $x_1, \dots, x_r$, z seien die Koordinaten des E^{r+1}, E^r sei die $(x_1, \dots, x_r)$-Ebene. $m^1(\ )$ bedeutet das lineare, $m^r(\ )$ das r-dimensionale, $m^{r+1}(\ )$ das $(r+1)$-dimensionale Mass. Ist λ irgendeine Menge des E^{r+1}, so bezeichne λ_t den Durchschnitt von λ mit der Ebene $z=t$, und λ^P den Durchschnitt von λ mit der Parallelen zur z-Achse durch den Punkt P. Ist λ_t r-dimensional und λ^P eindimensional messbar, so sei $\sigma_\beta^r(\lambda_t)$ die Vereinigungsmenge aller r-dimensionalen Intervalle e der Ebene $z=t$ mit

$$m^r(\lambda_t \cdot e) > \beta \cdot m^r(e),$$

und $\sigma_\beta^1(\lambda^P)$ die Vereinigungsmenge aller linearen Intervalle i der Parallelen zur z-Achse durch P mit

$$m^1(\lambda^P \cdot i) > \beta \cdot m^1(i).$$

3) Es sei (8) für den Index r schon bewiesen. γ sei irgend eine beschränkte offene Menge des E^{r+1}. Wir behaupten, dass $\sigma_\alpha(\gamma)$ in der folgendermassen konstruierten Menge Γ enthalten ist: wir ersetzen jedes γ_t durch die Menge $\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^r(\gamma)$ und bilden

$$\Gamma_* = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sigma_{\frac{\alpha}{2}}^r(\gamma_t).$$

Γ_* ist offen [11]). Dann ersetzen wir jeden linearen Schnitt Γ_*^P von Γ_* durch die Menge $\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^1(\Gamma_*^P)$ und definieren

$$\Gamma = \sum_{P \subset E^r} \sigma_{\frac{\alpha}{2}}^1(\Gamma_*^P).$$

[11]) Ist nämlich $Q \subset E_t$ ein Punkt von Γ_*, so gibt es in E_t ein r-dimensionales Intervall ρ_t mit

$$m^r(\gamma_t \rho_t) > \frac{\alpha}{2} m^r(\rho_t).$$

Nun besteht $\rho_t \cdot \gamma_t$ aus inneren Punkten von γ; zu jedem Punkt von $\rho_t \cdot \gamma_t$ gibt es also ein ihn enthaltendes $(r+1)$-dimensionales Intervall, das in γ liegt. Aus diesen suchen wir endlich viele, $I^1, \dots, I^h$, aus, deren Vereinigungsmenge auch noch der Ungleichung

$$m^r(\rho_t(I^1 + \dots + I^h)_t) > \frac{\alpha}{2} m^r(\rho_t)$$

genügt. Die Schnitte $(I^1 + \dots + I^h)_\tau$ sind für hinreichend kleine $|t-\tau|$ kongruent, so dass auch die entsprechenden $\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^r(I^1 + \dots + I^h)_\tau$ kongruent sind. Andrerseits liegen sie alle in Γ_*, also gehört mit $Q \subset \rho_t$ eine ganze Umgebung zu Γ_*.

Γ ist wieder offen [11]). Um $\sigma_\alpha(\gamma) \subset \Gamma$ zu zeigen, haben wir nachzuweisen, dass jedes $(r+1)$-dimensionale Intervall ϱ mit

$$m^{r+1}(\gamma \cdot \varrho) > \alpha \cdot m^{r+1}(\varrho)$$

in Γ liegt. Das Intervall j sei die Projektion von ϱ auf die z-Achse, ξ sei die Projektion von ϱ auf E^r, ferner e diejenige Teilmenge des Intervalls j, für welche

$$\text{(9)}\quad e: \qquad m^r(\gamma_t \cdot \varrho_t) > \frac{\alpha}{2} \cdot m^r(\varrho_t)$$

gilt. e ist offen, und zwar gilt

$$\text{(10)}\qquad m^1(e) > \frac{\alpha}{2} m^1(j);$$

denn wegen $m^r(\varrho_t) = m_r(\xi)$ für $t \subset j$ und $m^r(\gamma_t \cdot \varrho_t) \leqslant \frac{\alpha}{2} m^r(\varrho_t)$ für $t \subset j-e$ ist

$$\alpha \cdot m^1(j) \cdot m^r(\xi) = \alpha \cdot m^{r+1}(\varrho) < m^{r+1}(\varrho\gamma) = \int_{j-e} m^r(\gamma_t \cdot \varrho_t)\, dt +$$

$$+ \int_e m^r(\gamma_t \cdot \varrho_t)\, dt \leqslant \frac{\alpha}{2} \int_{j-e} m^r(\varrho_t)\, dt + \int_e m^r(\varrho_t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant m^r(\xi) \left(\frac{\alpha}{2} m^1(j) + m^1(e) \right).$$

Nach (9) gilt für $t \subset e$

$$\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^r(\gamma_t) \supset \sigma_{\frac{\alpha}{2}}^r(\gamma_t \cdot \varrho_t) \supset \varrho_t,$$

daher

$$\text{(11)}\qquad \sum_{t \subset e} \varrho_t \subset \Gamma_*.$$

Jede Parallele zur z-Achse durch einen Punkt P aus ξ schneidet $\sum_{t \subset e} \varrho_t$ in einer zu e kongruenten Menge. Daher besteht für die Schnitte ϱ^P und $\Gamma_*^P \varrho^P$ nach (10) und (11) die Beziehung

$$\frac{\alpha}{2} \cdot m^1(\varrho^P) = \frac{\alpha}{2} \cdot m^1(j) < m^1(e) \leqslant m^1(\Gamma_*^P \cdot \varrho^P) \qquad (P \subset \xi).$$

Demnach ist

$$\varrho^P \subset \sigma_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*^P) \qquad \text{für} \quad P \subset \xi$$

und damit

$$\varrho = \sum_{P \subset \xi} \varrho^P \subset \sum_{P \subset \xi} \sigma_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*^P) \subset \Gamma,$$

also auch $\sigma_\alpha(\gamma) \subset \Gamma$.

4) Wir zeigen nun noch

$$m^{r+1}(\Gamma) \leqslant 2^{(r+1)^2} \cdot \alpha^{-(r+1)} \cdot m^{r+1}(\gamma).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$m^r(\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^r(\gamma_t)) \leqslant \frac{2^{r^2} \cdot 2^r}{\alpha^r} \cdot m^r(\gamma_t),$$

also

$$m^{r+1}(\Gamma_*) = \int_{-\infty}^{\infty} m^r(\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^r(\gamma_t))\, dt \leqslant 2^{r^2+r} \cdot \alpha^{-r} \cdot m^{r+1}(\gamma).$$

Ferner ist, wie unter 1) gezeigt wurde,

$$m^1(\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*^P)) \leqslant \frac{4}{\alpha}\, m(\Gamma_*^P),$$

daher

$$m^{r+1}(\sigma_\alpha(\gamma)) \leqslant m^{r+1}(\Gamma) = \int_{E^r} m^1(\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*^P))\, dP \leqslant \frac{4}{\alpha}\, m^{r+1}(\Gamma_*) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(r+1)^2} \cdot \alpha^{-(r+1)} \cdot m^{r+1}(\gamma).$$

Damit ist (8) bewiesen, und wir haben gefunden:

Bezüglich des Systems aller achsenparalleler Parallelepipede des E^r gilt der Dichtesatz.

Hierbei ist, wie aus dem Beweis ersichtlich, unwesentlich, dass die Achsen aufeinander senkrecht stehen, sodass der Dichtesatz überhaupt für Systeme von Parallelepipeden gilt, die zu einem festen ähnlich gelegen sind.

Allgemeiner zeigt man, etwa in der Ebene, leicht, dass *der Dichtesatz für das System aller konvexen Polygone gilt, deren Seiten zu einer von endlich vielen fest vorgegebenen Richtungen parallel sind.*

B. Erstes Beispiel eines Systems, für das der Dichtesatz nicht gilt.

Sehr leicht zu behandeln ist das System aller der Γ-förmigen Mengen der Ebene, die aus zwei achsenparallelen Rechtecken zusammengesetzt sind:

$$\varrho = (x_0 < x < X_0,\ y_0 < y < Y_0;\ X_0 < x < X_1,\ y_0 < y < Y_1 < Y_0).$$

Betrachtet man etwa das Einheitsquadrat W, so sieht man ohne weiteres, dass für $0 < \alpha < 1$ die Menge $\sigma_\alpha(W)$ den ganzen Halbstreifen $0 < y < 1$, $x > 0$ enthält. Da unser System mit jeder Menge zugleich alle ähnlich gelegenen enthält, folgt aus dem Kriterium II' unmittelbar, dass dafür der Dichtesatz n i c h t gilt.

C. Das System aller Parallelepipede.

Wir beweisen nun, dass der Dichtesatz bereits für das System a l l e r Rechtecke der Ebene n i c h t gilt, woraus man sofort die entsprechende Tatsache für alle höheren Dimensionen ableitet.

Da das System mit jeder Menge auch die dazu ähnlich gelegenen enthält, genügt es nach II', eine Menge $\varkappa$ endlichen Masses anzugeben, für die

$$m(\sigma_{\frac{1}{2}}(\varkappa)) = \infty$$

ist [12]).

1) Es sei ABC eine offene Dreiecksfläche. Wir verdoppeln die Seiten AB und AC über B und C hinaus und bekommen so die Punkte B' und C'. Dann liegt für jeden Punkt Q des offenen Dreiecks $AB'C'$ die Strecke QA mehr als halb in ABC; also gibt es zu Q ein offenes Rechteck, dessen eines Seitenpaar parallel zu QA ist, und das halb von ABC überdeckt wird. Daher ist

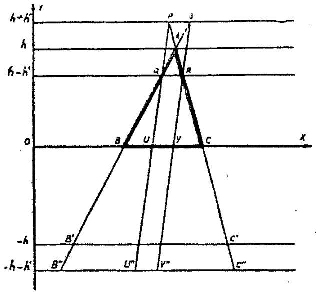
$$AB'C' \subset \sigma_{\frac{1}{2}}(ABC).$$

Die folgende Konstruktion gibt eine Folge von Dreiecken $A_\nu B_\nu C_\nu$ so an, dass ihre Vereinigungsmenge endliches, die Vereinigungsmenge der entsprechenden Dreiecke $A_\nu B'_\nu C'_\nu$ aber unendliches Mass hat.

[12]) Das folgende Beispiel ist einer Konstruktion nachgebildet, welche O. Perron zur Vereinfachung der von Besicovitch gegebenen Lösung des Kakeyaschen Problems gemacht hat (siehe Math. Zeitschr. **28**, 1928, S. 383/6). Übrigens kann man diese selbst auch für unsere Zwecke verwenden.

2) Es bezeichne D das offene Dreieck ABC (siehe Fig.), dessen Grundlinie BC auf und dessen Spitze A oberhalb der x-Achse liegt. Die Länge der Höhe sei h, die der Grundlinie BC sei a, die Punkte B' und C' mögen dieselbe Bedeutung haben wie unter 1).

Es sei $0<h'<h$. Wir bringen die Geraden $y=h+h'$, $y=h-h'$ und $y=-(h+h')$ zum Schnitt mit den Geraden AB und AC. Die Schnittpunkte nennen wir in der aus der Figur ersichtlichen Reihenfolge P, Q, R, S, B'', C''. Die beiden parallelen Geraden PQ und RS schneiden die Strecken BC und $B''C''$ in U, V bzw. U'', V''. Die (offenen) Dreiecksflächen PUC und SVB bezeichnen wir mit D_1 und D_2.



Von dieser Konstruktion werden wir folgendes gebrauchen:

Die Höhe der Dreiecke D_1 und D_2 beträgt $h+h'$. Die Länge der Strecke QR ist $\frac{h'}{h}\cdot a$. Die beiden Dreiecke SAR und PAQ bilden das halbe Parallelogramm $PQRS$, und daher ist

$$m(D_1+D_2)-m(D)=h'\cdot\frac{h'}{h}a.$$

Die Summe der Längen der Grundlinien BV und UC von D_1 und D_2 beträgt

$$a+\frac{h'}{h}a=\frac{a}{h}\cdot(h+h').$$

Die Vereinigungsmenge der zu D_1 und D_2 gehörenden Dreiecke $SB''V''$ und $PU''C''$ enthält $AB''C''$. Der Flächeninhalt des Trapezes $B'C'C''B''$ ist grösser als $2a\cdot h'$. Für das Folgende ist wesentlich, dass dieser Inhalt linear mit h' wächst, während $m(D_1+D_2)-m(D)$ zu h'^2 proportional ist.

3) Wir gehen von der soeben beschriebenen Konfiguration aus und setzen zur Induktion (ν bedeute in a^ν u. a. stets Indizes):

$$D=\Delta^1=\varkappa^1,\quad a=a^1;$$

$$D_1=\Delta_1^2,\quad D_2=\Delta_2^2,\quad \Delta_1^2+\Delta_2^2=\varkappa^2;$$

$$h=h^1,\quad B'=B^1,\quad C'=C^1,\quad B''=B^2,\quad C''=C^2.$$

Ferner sei speziell $h'=\frac{h}{2}$, also $h+h'=\frac{3}{2}h=h^2$. Die Grundlinie von Δ_k^i bezeichnen wir mit a_k^i. Wir nehmen an, die Dreiecke

$$\Delta_k^n,\quad k=1,2,\ldots,2^{n-1},$$

seien schon definiert. Es werde $\varkappa^n=\sum\limits_k \Delta_k^n$ gesetzt. Die Grundlinie von Δ_k^n liege auf der x-Achse und ihre Länge sei a_k^n. Die Δ_k^n haben alle dieselbe Höhe h^n, und folgende Gleichungen (die für $n=1$, $n=2$ richtig sind) mögen bestehen:

a) $h^n=h^1\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$,

b) $a_1^n+a_2^n+\ldots+a_{2^{n-1}}^n=a^1\frac{h^n}{h^1}$,

c) $m(\varkappa^n)=m(\Delta_1^n+\ldots+\Delta_{2^{n-1}}^n)\leqslant a^1\cdot h^1\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{a^1\cdot h^1}{2}$,

d) $\sigma_{\frac{1}{2}}(\varkappa^n)$ enthält das Dreieck AB^nC^n, wobei B^n und C^n die Schnittpunkte der Geraden AB und AC mit $y=-h^n$ sind.

Der $(n+1)$-te Schritt besteht dann im folgenden: Wir wenden die Konstruktion aus 2) an auf jedes Δ_k^n, wobei wir $h'=\frac{h^1}{n+1}$ setzen. Den Dreiecken D_1 und D_2 entsprechen dabei Δ_{2k-1}^{n+1} und Δ_{2k}^{n+1} mit den Grundlinien a_{2k-1}^{n+1} und a_{2k}^{n+1}. Die gemeinsame Höhe $h+h'$ bezeichnen wir mit h^{n+1}. Dann ist

$$h^{n+1}=h^n+h'=h^1\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Wir zeigen, dass auch b) bis d) für den Index $n+1$ erfüllt sind. Wir setzen wieder $\varkappa^{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{2^n}\Delta_k^{n+1}$; es ist, wie unter 2) gezeigt wurde,

$$a_{2k-1}^{n+1} + a_{2k}^{n+1} = \frac{a_k^n}{h^n} h^{n+1},$$

also

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k^{n+1} = \frac{h^{n+1}}{h^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k^n = a^1 \cdot \frac{h^{n+1}}{h^1}.$$

Ferner ist

$$m(\Delta_{2k-1}^{n+1} + \Delta_{2k}^{n+1}) - m(\Delta_k^n) = \left(\frac{h^1}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{a_k^n}{h^n},$$

also

$$m(\varkappa^{n+1}) = m\left(\sum_{k=1}^{2^n} \Delta_k^{n+1}\right) = m\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_k^n\right) +$$

$$+ m\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} [(\Delta_{2k-1}^{n+1} + \Delta_{2k}^{n+1}) - \Delta_k^n]\right) \leqslant a^1 h^1 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{a^1 h^1}{2} +$$

$$+ \left(\frac{h^1}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{h^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k^n = a^1 \cdot h^1 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{a^1 h^1}{2}.$$

Schliesslich seien B^{n+1} und C^{n+1} die Schnittpunkte der Geraden $y = -h^{n+1}$ mit den Geraden AB und AC. Offenbar enthält $\sum_{k=1}^{2^n} \sigma_{\frac{1}{2}}(\Delta^{n+1})$ das ganze Dreieck $AB^{n+1} C^{n+1}$, und daher ist auch

$$AB^{n+1} C^{n+1} \subset \sigma_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{2^n} \Delta_k^{n+1}\right) = \sigma_{\frac{1}{2}}(\varkappa^{n+1}).$$

Damit sind die Mengen $\varkappa^n$ für alle n definiert, und zwar ist wegen $\varkappa^n \subset \varkappa^{n+1}$ für $\varkappa = \lim \varkappa^n$

$$m(\varkappa) = \lim m(\varkappa^n) \leqslant a^1 h^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{a^1 h^1}{2}.$$

Andrerseits ist

$$\sigma_{\frac{1}{2}}(\varkappa^n) \subset \sigma_{\frac{1}{2}}(\varkappa),$$

und da $\sigma_{\frac{1}{2}}(\varkappa^n)$ das Dreieck $AB^n C^n$ enthält, dessen Höhe

$$h^1 + h^n = h^1 \left(1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)$$

gegen ∞ strebt, ist der ganze innere Winkelraum der Halbstrahlen AB und AC in $\sigma_{\frac{1}{2}}(\varkappa)$ enthalten. Wir haben also gefunden:

Für das System aller rechtwinkligen Parallelepipede des E^r ($r \geqslant 2$) gilt der Dichtesatz nicht.

Bemerkungen.

a) Die von uns zum Beweise der Notwendigkeit der Bedingung (6) verwandte Schlussweise liefert ein Verfahren, aus den Mengen $\varkappa^n$ eine beschränkte messbare Menge zu konstruieren, die in einer zu ihr fremden Menge positiven Masses in bezug auf die Rechtecke eine positive Dichte hat.

b) Indem wir nochmals auf 1) und 2) zurückgreifen, stellen wir fest, dass jeder Punkt der Dreiecke $AB^\nu C^\nu$ in einem solchen Rechteck liegt, dessen eines Seitenpaar parallel zu einer Richtung des Winkelraumes BAC ist. Wenn (W) eine in BAC dichte Menge von Geraden durch A ist, so lässt sich dieses Rechteck natürlich auch so wählen, dass das erwähnte Seitenpaar parallel zu einer passenden Richtung aus (W) ist. Da der Winkel BAC keiner Beschränkung unterlag, sehen wir: Der Dichtesatz gilt bereits *nicht* bezüglich des Systems der Rechtecke, deren eines Seitenpaar parallelel zu einer beliebigen unter den Geraden einer in irgend einem Winkelraum dichten Geradenmenge ist.

§ 3.

Die Differentiation der unbestimmten Integrale mit beschränkten Integranden.

Die Mengenfunktion $\varphi(\varkappa)$ heisse im Punkte P bezüglich R differenzierbar, wenn für jede sich auf P zusammenziehende Folge $\{\varrho_k\}$ aus R der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varphi(\varrho_k \varkappa)}{m(\varrho_k)}$$

existiert.

Wir setzen voraus, dass für das System R der Dichtesatz gilt, und wollen feststellen, was sich daraus über die Differenzierbarkeit der totalstetigen absolut additiven Mengenfunktionen, oder was dasselbe ist [12]), der unbestimmten Lebesgueschen Integrale entnehmen lässt. Der Dichtesatz selbst erledigt diese Frage für die Integrale solcher messbarer Funktionen, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen.

Es sei $f(P)$ eine summierbare Funktion und $M_{\alpha,\beta}$, $\alpha<\beta$, die Menge der Punkte, für die

$$M_{\alpha,\beta}: \qquad \alpha \leqslant f(P) < \beta$$

ist. $N_{\alpha,\beta}$ sei die Menge der Punkte von $M_{\alpha,\beta}$, in welchen die untere Dichte von $M_{\alpha,\beta}$ kleiner als 1 ist. $N_{\alpha,\beta}$ hat das Mass 0. Wir setzen

$$N_f = \sum_{\alpha<\beta} N_{\alpha,\beta},$$

wo (α,β) alle rationalen Zahlenpaare mit $\alpha<\beta$ durchläuft.

Als einfache *Folge des Dichtesatzes* ergibt sich: *Wenn $f(P)$ beschränkt ist, so ist das Integral $\int\limits_x f(P)\cdot dP$ in allen Punkten Q, die nicht der Nullmenge N_f angehören, bezüglich R differenzierbar, und seine Ableitung hat dort den Wert $f(Q)$.*

Es sei nämlich $|f(P)|<C$, α,β rational, Q ein Punkt aus $M_{\alpha,\beta}$, der nicht in N_f enthalten ist; $M'_{\alpha,\beta}$ sei die Komplementärmenge von $M_{\alpha\beta}$ und ϱ_k irgend eine sich auf Q zusammenziehende Folge aus R. Dann ist

$$-C\cdot m(M'_{\alpha,\beta}\varrho_k)+\alpha\cdot m(M_{\alpha,\beta}\varrho_k) \leqslant \int\limits_{\varrho_k} f(P)\cdot dP \leqslant$$
$$\leqslant \beta\cdot m(M_{\alpha,\beta}\varrho_k)+C\cdot m(M'_{\alpha,\beta}\varrho_k),$$

woraus

$$\alpha \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\int\limits_{\varrho_k} f(\varrho)\,d P}{m(\varrho_k)} \leqslant \beta$$

folgt.

Hiernach sind die Integrale über beschränkte Funktionen speziell nach den Intervallen differenzierbar. Dieses Ergebnis formulieren wir in üblicher Weise als einen Satz über die Punktfunktion

$$F(x_1,\ldots,x_r)=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\cdots\int\limits_0^{x_r} f(X)\,dX, \quad |f(x)|<C.$$

[12]) Bekanntlich benötigt man, um das zu beweisen, nur die äusserst einfache Differentiation nach den Mengen eines sich verfeinernden quadratischen Gitters. Vgl. etwa de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue..., Paris 1916, S. 61 ff.

Wir betrachten den r-ten gemischten Differenzenquotienten der Funktion $F(x_1,\ldots,x_r)$ im Punkte $X=(x_1,\ldots,x_r)$; er lässt sich in der Integralform

$$\frac{\Delta^r F(x_1,\ldots,x_r)}{h_1\ldots h_r}=\frac{1}{h_1\ldots h_r}\int\limits_{x_1}^{x_1+h_1}\cdots\int\limits_{x_r}^{x_r+h_r} f(X)\,dX$$

schreiben; für $r=2$ ist z. B.

$$\frac{\Delta^2 F(x_1,x_2)}{h_1\cdot h_2}=$$
$$=\frac{F(x_1+h_1,x_2+h_2)-F(x_1+h_1,x_2)-F(x_1,x_2+h_2)+F(x_1,x_2)}{h_1\cdot h_2}.$$

Zur Bildung dieses Differenzenquotienten wird, geometrisch gesprochen, ein Intervall benutzt, von dem X ein Eckpunkt ist. Diese Intervalle bilden im Punkte X ein bezüglich des Systems der Intervalle reguläre Mengenfamilie (vgl. S. 238), so dass man nach ihnen differenzieren kann. Das heisst aber, dass *die r-te gemischte Ableitung $F_{(x_1x_2\ldots x_r)}$ als Grenzwert des betrachteten Differenzenquotienten fast überall existiert und zwar im Sinne des r-fachen Limes.*

Bei dem üblichen Vorgehen kommt die Existenz dieses Limes nicht heraus, da man voraussetzt, dass die Intervalle, nach denen man differenziert, bezüglich der Würfel regulär sind, so dass die Verhältnisse $h_i : h_k$ sämtlich beschränkt bleiben müssen.

Die Existenz des Doppellimes

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{1}{h_1 h_2}\left[F(x_1+h_1,x_2+h_2)-F(x_1+h_1,x_2)-F(x_1,x_2+h_2)+F(x_1,x_2)\right]$$

macht, wenn die Existenz der ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ bekannt ist, einen besondren Beweis für die Existenz und Gleichheit der beiden gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$ unnötig.

Entsprechend existieren in r Dimensionen die gemischten Ableitungen s-ter Ordnung ($s\leqslant r$) fast überall, und es ist

$$(12) \qquad \frac{\partial^s F}{\partial x_{\nu_1}\ldots\partial x_{\nu_s}}=F_{(x_{\nu_1}\ldots x_{\nu_s})}, \quad \nu_i \neq \nu_k \text{ für } i\neq k,$$

wobei die Ableitung rechts als s-facher Limes des entsprechenden Differenzenquotienten definiert ist. (Darin ist die Vertauschbarkeit der Ableitungsreihenfolge links natürlich enthalten).

Wenn nämlich bekannt ist, dass die Ableitungen $F_{(x_{\nu_1}\dots x_{\nu_s})}$ ($\nu_i \neq \nu_k$ für $i \neq k$) für alle $s \leqslant r$, abgesehen von einer r-dimensionalen Nullmenge existieren, so folgt aus bekannten Grenzwertsätzen auch die Existenz der iterierten Ableitungen und die Gleichung (12). Um aber auch für $s < r$ zu zeigen, dass $F_{(x_{\nu_1}\dots x_{\nu_s})}$ fast überall existiert, genügt es zu wissen, dass die Menge, in der $F_{(x_{\nu_1}\dots x_{\nu_s})}$ nicht existiert, r-dimensional messbar ist. Denn ihr Schnitt mit allen s-dimensionalen Hyperebenen parallel zu $(x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_s})$, in denen F totalstetig ist, hat das s-dimensionale Mass 0. Wir betrachten den s-ten Differenzenquotienten, durch dessen Grenzwert $F_{(x_{\nu_1}\dots x_{\nu_s})}$ definiert ist, und konstruieren die Menge der Punkte, in denen sein Limes superior vom Limes inferior verschieden ist. Dabei ist es offenbar gestattet, sich auf rationale Zuwächse $h_{\nu_1}, \dots, h_{\nu_s}$ zu beschränken. Wir ordnen alle rationalen Kombinationen $(h_{\nu_1}, \dots, h_{\nu_s})$ mit $\sum\limits_{i=1}^{s} h_{\nu_i}^2 < \frac{1}{n}$ in eine Folge, und bilden die entsprechende Folge der Differenzenquotienten. Ihr Limes superior sei $L_n(P)$, der Limes inferior $l_n(P)$. Da die beiden Folgen $L_n(P)$ und $l_n(P)$ monoton ab-, bzw. zunehmen, existiert $L(P) = \lim L_n(P)$ und $l(P) = \lim l_n(P)$. Die Funktionen $L(P)$ und $l(P)$ sind messbar, und daher auch die Menge, in der $L(P) > l(P)$ ist; sie besteht offenbar genau aus den Punkten, in denen der Differenzenquotient keinem Grenzwert zustrebt.

§ 4.

Differentiation beliebiger unbestimmter Integrale.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, dass aus dem Dichtesatz die Differenzierbarkeit der Integrale beliebiger summierbarer Funktionen, z. B. schon für das System der Intervalle, *nicht* folgt.

Zu diesem Zweck beweisen wir den folgenden, dem Kriterium II analogen Satz:

Das System R enthalte mit jeder Menge ϱ alle dazu ähnlich gelegenen Mengen. Bezüglich R ist dann und nur dann jede totalstetige additive Mengenfunktion differenzierbar, wenn für beliebige positive Zahlen $a_1, \dots, a_n$ und beliebige fremde, beschränkte messbare Mengen $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$ die Vereinigungsmenge s aller Mengen ϱ aus R mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cdot m(\varkappa_\nu \varrho) > m(\varrho) \tag{13}$$

der Bedingung

$$m(s) < C \cdot \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cdot m(\varkappa_\nu) \tag{14}$$

genügt, wo C lediglich von System R abhängt.

1) Hinreichend. Wir bemerken, dass (14) wesentlich schärfer ist als (6), so dass der Dichtesatz bezüglich R gilt. Es genügt offenbar Integrale über positive summierbare Funktionen zu betrachten;

$$\varphi(\varkappa) = \int_{\varkappa} f(P) \cdot dP, \quad f(P) > 0,$$

sei die zu untersuchende Funktion; $\varkappa_\nu$ sei die Menge der Punkte mit

$$\varkappa_\nu: \qquad \nu - 1 \leqslant f(P) < \nu.$$

Dann konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu \cdot m(\varkappa_\nu)$. Es sei $s_{n_0, \varepsilon}$ die Vereinigunsmenge der Menge ϱ aus R, für die

$$\sum_{n_0}^{\infty} \nu \cdot m(\varkappa_\nu \varrho) > \varepsilon \cdot m(\varrho), \quad \varepsilon > 0,$$

ist. $s_{n_0, \varepsilon}$ nimmt bei festem ε monoton ab; der Durchschnitt ist wegen (14)[14]) eine Nullmenge. Wir bilden die Vereinigungsmenge N dieser Nullmengen für $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ N_f sei die auf S. 248 definierte, zu f gehörige Nullmenge. Wir zeigen nun: Wenn $P \not\subset N_f + N$,

[14]) Aus der Gültigkeit von (14) für eine beliebige endliche Zahl von Mengen $\varkappa_\nu$ folgt offenbar die Gültigkeit für abzählbar viele $\varkappa_\nu$ (eventuell mit „$\leqslant$" statt „$<$").

so ist für jede sich auf P zusammenziehende Folge $\{\varrho_k\}$ aus R

$$\lim_{k=\infty} \frac{\varphi(\varrho_k)}{m(\varrho_k)} = f(P).$$

Wir wählen bei festem ε die Zahl n_0 so gross, dass P nicht mehr in $s_{n_0, \varepsilon}$ enthalten ist. Dann gilt

$$\frac{\varphi(\varrho_k)}{m(\varrho_k)} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n_0-1} \varphi(\varrho_k \cdot \varkappa_\nu)}{m(\varrho_k)} + \frac{\sum_{\nu=n_0}^{\infty} \varphi(\varrho_k \cdot \varkappa_\nu)}{m(\varrho_k)}.$$

Die Wahl von n_0 hat zur Folge, dass der zweite Summand rechts höchstens die Grösse ε hat. Andrerseits folgt aus dem Dichtesatz, dass der erste Summand mit wachsendem k gegen $f(P)$ strebt.

2) Notwendig. Der Beweis verläuft genau wie der Nachweis der Notwendigkeit von (II). Wenn (14) nicht erfüllt ist, so gibt es zu jedem n gewisse Zahlen $a_1^n, \ldots, a_{\nu_n}^n$, die offenbar grösser als 1 vorausgesetzt werden dürfen, und fremde beschränkte, messbare Mengen $\varkappa_1^n, \ldots, \varkappa_{\nu_n}^n$ derart, dass eine beschränkte messbare Menge s^n existiert, welche Vereinigungsmenge von Mengen ϱ aus R mit

$$\sum_i a_i^n \cdot m(\varrho\, \varkappa_i^n) > m(\varrho) \tag{15}$$

ist und der Ungleichung

$$m(s^n) > 4^n \cdot \sum_i a_i^n \cdot m(\varkappa_i^n) \tag{16}$$

genügt. Es sei

$$h(P; s^n) = \begin{cases} a_i^n & \text{für} \quad P \subset s^n \cdot \varkappa_i^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{17}$$

Dann ist

$$\int_{s^n} h(P; s^n) \cdot dP = \sum_i a_i^n \cdot m(s^n \varkappa_i^n) < \frac{1}{4^n} \cdot m(s^n), \tag{18}$$

und jeder Punkt von s^n liegt in einer Menge ϱ aus R mit

$$\int_{\varrho} h(P; s^n) \cdot dP > m(\varrho). \tag{19}$$

Durch Ähnlichkeitsübertragung werde $h(P; \tau)$ für alle zu s^n ähnlich gelegenen Mengen τ definiert. Die Gleichungen (18), (19) übertragen sich auf $h(P; \tau)$, da ja R mit ϱ alle zu ϱ ähnlich gelegenen Mengen enthält. Wir überdecken nach dem Hilfssatz von S. 232 den Einheitswürfel W mit zu s^n ähnlich gelegenen Mengen s_j^n so, dass

$$d(s_j^n) < \frac{1}{n}, \quad \sum_j m(s_j^n) \leqslant 2, \quad m\Big(\sum_j s_j^n\Big) = 1$$

wird. Wir setzen weiter

$$f^n(P) = \sum_j h(P; s_j^n).$$

Wegen (16) und (18) ist f^n summierbar und

$$\int_W f^n\, dP < \frac{1}{4^n} \sum_j m(s_j^n) = \frac{2}{4^n}.$$

Die Funktion $f = \sum_{n=1}^{\infty} f^n$ ist dann ebenfalls summierbar mit

$$\int_W f\, dP < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}.$$

Da wir alle $a_i^n > 1$ vorausgesetzt haben, hat f, soweit es nicht verschwindet, wenigstens den Wert 1. Deshalb hat die Menge der Punkte mit $f > 0$ höchstens das Mass 2/3. Andrerseits liegt, von einer Nullmenge abgesehen, jeder Punkt Q von W für jedes n in einem s_j^n, also auch in einer Menge ϱ aus R mit (vergl. (19))

$$\int_{\varrho} f(P) \cdot dP \geqslant \int_{\varrho} h(P; s_j^n) \cdot dP > m(\varrho).$$

Da der Durchmesser

$$d(s_j^n) < \frac{1}{n}$$

ist, ziehen sich diese Mengen ϱ auf Q zusammen; die obere Ableitung der Funktion f bezüglich R ist also fast überall in W

gleich 1, während f mindestens in einer Teilmenge des Masses 2/3 von W verschwindet, womit die Behauptung bewiesen ist.

Bekanntlich kann man bezüglich R jede totalstetige Funktion differenzieren, wenn für dass System R der **Vitalische Überdeckungssatz** gilt. Aus diesem muss also die Bedingung (14) folgen. Unser Notwendigkeitsbeweis zeigt nun gerade, dass das System R dem Vitalischen Satze nicht genügen kann, wenn (14) nicht erfüllt ist. Von den beim Beweise verwandten Mengen ϱ zieht sich nämlich auf fast jeden Punkt von W eine Teilfolge zusammen. Trotzdem: Wie man auch abzählbar viele paarweise fremde unter den ϱ herausgreift, stets hat ihre Vereinigungsmenge höchstens das Mass 2/3. Es seien ϱ^ν irgend welche fremde unter den Mengen ϱ, als deren Vereinigungsmenge s^n definiert ist. Für sie gilt (15), woraus nach (16)

$$m\left(\sum_\nu \varrho^\nu\right) = \sum_\nu m(\varrho^\nu) < \sum_i \sum_\nu a_i^n \cdot m(\varrho^\nu \varkappa_i^n) < \sum_i a_i^n \cdot m(\varkappa_i^n) < \\ < \frac{1}{4^n} \cdot m(s^n)$$

folgt. Dieselbe Abschätzung gilt für jedes System der Mengen ϱ in irgend einem s_j^n. Für ein beliebiges System von fremden Mengen ϱ gilt also

$$m\left(\sum \varrho\right) < \sum_n \frac{1}{4^n} \sum_j m(s_j^n) = \sum \frac{2}{4^n} = \frac{2}{3}.$$

Der Umweg über den Vitalischen Satz zum Nachweis von (14) ist jedoch nicht erforderlich. Denn man sieht sehr leicht:

Wenn ϱ eine Menge des Systems R ist, $d(\varrho)$ ihr Durchmesser, ferner $U(\varrho)$ die Menge aller Punkte, deren Abstand von ϱ kleiner als $2 \cdot d(\varrho)$ ist, und wenn

$$\frac{m(U(\varrho))}{m(\varrho)} < \beta, \tag{20}$$

gilt wo β eine von ϱ unabhängige Zahl bedeutet, so genügt das System R der Bedingung (14). Solche Systeme bilden z. B. die **Kugeln**, die **Würfel** und ferner alle **rechtwinklingen Parallelepipede, bei denen die Verhältnisse der Kantenlängen beschränkt sind.**

Es sei s die wie oben definierte Vereinigungsmenge der ϱ mit (13). Wir beweisen, dass (14) mit $C = \beta$ erfüllt ist, wobei wir eine auch beim üblichen Beweis des Vitalischen Satzes vorkommende Idee benutzen. Aus den ϱ, welche s bilden, wählen wir eine Folge ϱ_1', ϱ_2',..., welche s überdeckt. Wir setzen $\varrho_1 = \varrho_1'$, und bezeichnen mit ϱ_2 das erste ϱ_ν' der Folge, das nicht in $U(\varrho_1)$ enthalten ist. Allgemein sei ϱ_{n+1} das erste ϱ_j' der Folge ϱ_ν', das nicht in $\sum\limits_{\nu=1}^{n} U(\varrho_\nu)$ enthalten ist. So erhalten wir eine Folge $U(\varrho_n)$, deren Vereinigungsmenge s überdeckt. Aus dieser Folge denken wir uns jedes $U(\varrho_i)$ bereits gestrichen, das ganz in einem anderen enthalten ist. Dann sind die ϱ^ν paarweise fremd. Denn für $n > m$ enthält ϱ_n einen Punkt ausserhalb von $U(\varrho_m)$. Hätte es einen Punkt P mit ϱ_m gemeinsam, so wäre $d(\varrho_n) \geqslant 2 \cdot d(\varrho_m)$. Daher enthielte $U(\varrho_n)$ alle Punkte, die von P um weniger als $4 \cdot d(\varrho_m)$ entfernt sind; ein Punkt von $U(\varrho_m)$ hat aber von P höchstens den Abstand $3 \cdot d(\varrho_m)$, und es wäre $U(\varrho_m) \subset U(\varrho_n)$. Daher ist

$$m\left(\sum_i \varrho_i\right) = \sum_i m(\varrho_i) > \frac{1}{\beta} \sum_i m(U(\varrho_i)) \geqslant \frac{1}{\beta} m\left(\sum_i U(\varrho_i)\right) \geqslant \frac{1}{\beta} m(s).$$

Andrerseits ist wegen (13) und der Fremdheit der ϱ_i

$$\sum_i m(\varrho_i) < \sum_\nu \sum_i a_\nu \cdot m(\varkappa_\nu \varrho_i) \leqslant \sum_\nu a_\nu \cdot m(\varkappa_\nu),$$

womit

$$m(s) < \beta \sum_\nu a_\nu \cdot m(\varkappa_\nu)$$

bewiesen ist.

Wenn die Beziehung (14) für ein System R nicht gilt, so lässt sich das im allgemeinen noch leichter feststellen, z. B. unmittelbar für das System der **achsenparallelen Rechtecke** der Ebene. Bedeutet W ein achsenparalleles Quadrat, so ist für dieses System

$$m(\sigma_{\frac{1}{n}}(W)) = (4n \cdot \log n + 1) \cdot m(W).$$

(14) ist also schon für $\varkappa_1 = W$, $a_1 = n$, $\varkappa_\nu = 0$ für $\nu > 1$, nicht erfüllt [15]).

[15]) Damit ist nochmals gezeigt, dass für die achsenparallelen Rechtecke der Vitaliche Satz nicht gilt.

Man kann also die unbestimmten Integrale nicht beschränkter Funktionen im allgemeinen nach achsenparallelen Rechtecken nicht differenzieren, oder, anders ausgedrückt: Für die Funktion

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

braucht, wenn $f(x, y)$ nicht beschränkt ist, die zweite gemischte Ableitung $f_{(x,y)}$ im Sinne des Doppellimes nicht zu existieren.

Zusatz bei der Korrektur.

Nach Vollendung der Arbeit bemerken wir, dass einige Behauptungen der Einleitung durch das neue Buch von S. Saks: Théorie de l'Intégrale, Warszawa 1933, überholt sind. Der Dichtesatz für das System der Intervalle wurde bereits von Herrn Saks bewiesen (vgl. S. 231 f.). Ferner hat Herr Saks dort auch schon bemerkt, dass die Integrale über unbeschränkte Integranden nach Intervallen nicht differenzierbar zu sein brauchen; wir verdanken einen Beweis und eine, auf dem Begriff der Baireschen Kategorien beruhende, Verschärfung dieser Behauptung einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Saks. Schliesslich sei erwähnt, dass man nach einer Bemerkung von O. Nikodym bereits aus einem, zu anderen Zwecken konstruierten Beispiel von A. Zygmund schliessen kann, dass der Dichtesatz für das System aller Rechtecke der Ebene nicht gilt. (vgl. S. 232 des zitierten Buches).

Kopenhagen, den 30. XI. 1933.

Remark on the differentiability of the Lesbesgue indefinite integral.

By

S. Saks (Warszawa).

1. If $f(x, y)$ is a summable function of two variables then, by the well known theorem of Lebesgue, at almost every point (x, y) we have

$$\lim_{\delta(\sigma)\to 0} \frac{1}{\operatorname{meas} \sigma} \int\int_\sigma f\, dx\, dy$$

where σ denotes an arbitrary square containing the point (x, y). Under the additional assumption that $f(x, y)$ is a bounded function it has been recently proved [1]) that this theorem holds again if the square σ is replaced by an interval i. e. by a rectangle with sides parallel to the axis. However, this generalization of the Lebesgue theorem is not true for unbounded functions as it has been shown by Busemann and Feller on the basis of a general criterion concerning the differentiability of absolutely additive functions with respect to given families of open sets, and as has been also mentioned elsewhere by the author [2]). In connection with those results the following theorem might be of some interest:

A. *Let $\mathfrak{L}$ be the space of the functions $f(x, y)$ summable over the square $S = [0, 1; 0, 1]$ (with the ordinary norm $\|f\| = \int\int_S |f(x, y)|\, dx\, dy$).*

[1]) See F. Riesz, *Sur les points de densité au sens fort*, this volume, pp. 221—225; Busemann und Feller, *Zur Differentiation des Lebesguesche Integrale*, ibid., pp. 226—256; Saks, *Théorie de l'intégrale* (Monografje Matematyczne), Warszawa, 1933, p. 232.

[2]) Busemann und Feller, l. c.; Saks, l. c., p. 232.