morphe à $\mathcal{N}$ en supprimant un ensemble dénombrable convenablement choisi. Autrement dit, il existe un ensemble dénombrable D tel que l'ensemble $N_1 = f(\mathcal{N} - D)$ est homéomorphe à $\mathcal{N}$.

L'ensemble D étant dénombrable, la différence $N_2 = \mathcal{N} - D$ est évidemment homéomorphe à $\mathcal{N}$.

Pour établir notre théorème (dans le cas α, 0), il suffit donc de démontrer que la fonction f n'est pas de classe $\xi < \alpha$ sur l'ensemble N_2.

Supposons que f soit de classe $\xi > 0$ sur N_2. Par conséquent, AN_2 est de classe multiplicative ξ par rapport à N_2 (puisque l'ensemble $f(AN_2) = f(A) \cdot N_1$ est fermé dans N_1). Autrement dit, il existe un ensemble B de classe multiplicative ξ (dans $\mathcal{N}$) tel que $BN_2 = AN_2 = A - D$, d'où $A = BN_2 + AD$. Or, l'ensemble N_2 étant de classe multiplicative ξ (comme ensemble G_δ), l'ensemble BN_2 l'est également. L'ensemble AD étant dénombrable, on en conclut que $\alpha \leqslant \xi$.

Ceci établi, passons au cas général où α et β sont arbitraires. Soient f_1 et f_2 deux homéomorphies respectivement de classe α, 0 et 0, β telles que $f_1(N^1) = N^1$ et $f_2(N^2) = N^2$, où N^1 et N^2 désignent respectivement les parties de $\mathcal{N}$ contenus dans les intervalles 0, $1/2$ et $1/2$, 1. En convenant que la fonction f coïncide sur N^1 avec f_1 et sur N^2 avec f_2, on définit une homéomorphie de classe α, β telle que $f(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. Les homéomorphies f_1 et f_2 étant supposées précisément des classes α, 0 et 0, β, f est précisément de classe α, β.

Sur les points de densité au sens fort.

Par

Frédéric Riesz (Szeged, Hongrie).

1. Dans son livre sur l'intégration récemment paru [1]), M. Saks vient d'établir le théorème suivant.

Presque tous les points d'un ensemble plan en sont des points de densité au sens fort.

L'ensemble en question est supposé d'être envisagé après avoir fixé un système orthogonal de coordonnées x, y et ce que le théorème affirme, c'est que, excepté au plus certains points dont l'ensemble est de mesure nulle, tous les autres points X de l'ensemble E envisagé jouissent de la propriété suivante: pour toute suite indéfinie de rectangles R_n parallèles aux axes, comprenant le point X et dont les diagonales deviennent infiniment petites avec $1/n$, la *densité moyenne de E par rapport à R_n* (c'est la mesure extérieure de la partie de E comprise dans R_n divisée par l'aire de R_n), a pour limite l'unité.

Ce théorème comporte une généralisation surprenante du célèbre théorème de M. Lebesgue sur les points de densité; en effet on était forcé jusqu'à ces derniers jours, par des raisons de méthode, à n'admettre que des suites R_n dites *régulières*, savoir telles que le rapport des cotés adjacents reste entre des bornes finis indépendants de n.

M. Saks déduit son résultat d'un théorème de M. Stepanoff sur les différentielles approximatives, théorème dont la démonstration n'est pas des faciles. Vu l'importance du théorème de M. Saks

[1]) S. Saks: *Théorie de l'intégrale*, Monografje Matematyczne, t. II, Warszawa 1933, p. 231.

pour le problème de l'inversion des intégrales définies des fonctions de plusieurs variables, je pense qu'il ne soit pas sans intérêt de présenter, dans ce qui suit, une autre démonstration entièrement élémentaire.

Tout ce que nous dirons, s'appliquera immédiatement au cas général de l'espace à n dimensions.

2. La démonstration du théorème sera basée sur le lemme suivant.

Étant donné, dans le plan des x, y, un ensemble ouvert O et étant choisie une quantité positive θ inférieure à l'unité, envisageons, parmi les segments PQ parallèles à l'axe des x, tous ceux sur lesquels la densité linéaire moyenne de l'ensemble O (mesure linéaire de la partie de O comprise dans le segment, divisée par celle de ce dernier) est plus grande que θ. Alors les extrémités, gauches et droites, de tous ces segments forment deux ensembles ouverts O_1 et O_2 tels que

$$\text{mes } O_1 \leqslant {}^1/_\theta \text{ mes } O, \quad \text{mes } O_2 \leqslant {}^1/_\theta \text{ mes } O.$$

Pour la démonstration il suffira de considérer l'ensemble O_1, composé des extrémités gauches P des segments envisagés. PQ étant un tel segment, un déplacement parallèle infiniment petit de PQ en $P'Q'$ ne modifiera pas sensiblement la mesure linéaire de la partie de O comprise dans PQ et de cette sorte, en même temps que P, les points suffisamment voisins de P appartiennent également à l'ensemble O_1, c'est-à-dire que l'ensemble O_1 est *ouvert*.

Cela étant, soit Δ une droite parallèle à l'axe des x et traversant l'ensemble O. La partie commune de Δ et de O_1 étant composée d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles *ouverts*, disjoints deux à deux, envisageons un de ces intervalles, soit AB. Je dis que la densité linéaire moyenne $d(O; AB)$ de l'ensemble O par rapport à l'intervalle AB n'est pas inférieure à θ. En effet, sous l'hypothèse contraire, il en serait de même pour les intervalles PB, P étant situé entre A et B et suffisamment proche de A. Or nous allons voir que la densité moyenne $d(O; PB)$ n'est inférieure à θ pour aucun point P intérieur à AB. En effet, soit P un tel point et faisons varier le point X le long de PB et de son prolongement au delà de B. Envisageons la fonction

$$g(X) = \overline{PX}(\theta - d(O; PX)) = \theta \cdot \overline{PX} - \text{mes lin}(O \cdot PX).$$

La fonction $g(X)$ étant continue et comme de plus elle devient infinie positive quand le point X s'éloigne indéfiniment, elle admettra

un minimum; montrons qu'elle l'atteint pour $X = B$. En effet, ce minimum ne pourra être atteint pour aucun X intermédiaire entre P et B, puisque ces points appartenant à l'ensemble O_1, il en existerait un point R de sorte que

$$d(O; XR) > \theta$$

et que, par conséquent,

$$g(R) - g(X) = \theta \cdot \overline{XR} - \text{mes lin}(O \cdot OR) = \overline{XR}(\theta - d(O; XR)) < 0,$$

contrairement à l'hypothèse faite. D'autre part, le point B n'appartenant pas à l'ensemble O_1, on a

$$d(O; BX) \leqslant \theta$$

pour tous les points X situés au delà de B et de cette sorte,

$$g(X) - g(B) = \overline{BX}(\theta - d(O; BX)) \geqq 0$$

pour ces points X.

Donc le minimum de $g(X)$ est atteint pour $X = B$. Par conséquent, on a

$$g(B) \leqq g(P) = 0.$$

C'est que

$$d(O; PB) \geqq \theta$$

et cela pour tout point P intérieur à l'intervalle AB. Il s'ensuit que l'on a aussi

$$d(O; AB) \geqq \theta,$$

ce qu'il fallait prouver [1]). Autrement dit,

$$\text{mes lin}(O \cdot AB) \geqq \theta \cdot \overline{AB}$$

et cela pour tous les intervalles AB dont se compose la partie commune de l'ensemble O_1 et de la droite Δ. En additionnant, il vient que

$$\text{mes lin}(O \cdot \Delta) \geqq \theta \text{ mes lin}(O_1 \cdot \Delta)$$

[1]) Pour le raisonnement qui précède, cf. ma Note: *Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood*, *Journal of the London Math. Soc.*, vol. 7 (1932), pp. 10—13, en particulier la remarque en bas p. 12.

et enfin, en faisant varier Δ et en intégrant par rapport à l'ordonnée y, il résulte que

$$\text{mes } O \geqq \theta \text{ mes } O_1,$$

c. q. f. d.

3. Pour démontrer maintenant le théorème de M. Saks, nous commençons par observer que l'on ne restreindra pas la généralité en supposant *fermé* l'ensemble E dont il s'agit. Cela vient immédiatement de ce que tout ensemble E fait partie d'un ensemble mesurable $\overline{E}$ tel que

$$\text{mes ext } (E \cdot R) = \text{mes } (\overline{E} \cdot R)$$

pour tous les rectangles R et que de plus, tout ensemble mesurable peut être épuisé, à un ensemble de mesure nulle près, par une suite dénombrable d'ensembles fermés.

Soit donc E un ensemble fermé et soient données les quantités $0 < \theta < 1$ et $\varepsilon > 0$. Posons

$$\mu = {}^1/_4\, \varepsilon\, \theta^2$$

et envisageons un ensemble ouvert O renfermant l'ensemble E et choisi de sorte que l'ensemble $O - E$ soit de mesure inférieure à μ. Cela posé, remplaçons dans notre lemme l'ensemble O par l'ensemble $O - E$, évidemment ouvert, et formons l'ensemble fermé E_1 en effaçant de l'ensemble E les points appartenant à l'ensemble $O_1 + O_2$. Puis appliquons le lemme à l'ensemble $O_1 + O_2$ et cela en échangeant le rôle des x et y; c'est-à-dire que nous formons les ensembles ouverts O_3, O_4, composés des extrémités de tous les segments parallèles à l'axe des y et sur lesquels la densité moyenne de l'ensemble $O_1 + O_2$ est supérieure à θ. Soit E_2 l'ensemble fermé qui reste de E_1 après avoir supprimé les points appartenant à l'ensemble $O_3 + O_4$. Alors la densité linéaire moyenne de l'ensemble $O - E$ ne pourra surpasser la limite θ sur aucun segment parallèle à l'axe des x, sauf ceux dont les deux extrémités, gauche et droite, appartiennent respectivement aux ensembles O_1 et O_2. Par conséquent, cette densité sera $\leqq \theta$ pour tous les segments dont l'une des extrémités appartient à l'ensemble E_1. Il en sera de même pour les segments passant par un point X de E_1, ce qui vient en décomposant le segment en deux autres issus du point X. Il s'ensuit que sur tout segment parallèle à l'axe des x, compris dans l'ensemble O et passant si même par un seul point de l'ensemble E_1, la densité linéaire moyenne de l'ensemble E (complémentaire à celle de $O - E$) est $\geqq 1 - \theta$. On conclut de même que la densité linéaire moyenne de l'ensemble E_1 est $\geqq 1 - \theta$ sur tout segment parallèle à l'axe des y, compris dans O, donc aussi dans O_1 et O_2, et passant par un point de l'ensemble E_2. Il s'ensuit immédiatement que la densité moyenne de l'ensemble E sera $\geqq (1-\theta)^2$ par rapport à tout rectangle R parallèle aux axes, compris dans O et contenant, à son intérieur ou sur sa périphérie, un point au moins appartenant à l'ensemble E_2. Donc, à plus forte raison, étant envisagé un point arbitraire X appartenant à E_2, la densité moyenne de l'ensemble E sera $\geqq (1-\theta)^2$ pour tout rectangle parallèle aux axes, comprenant X et dont la diagonale est suffisament petite.

Observons enfin que l'ensemble $O_1 + O_2$ étant compris évidemment dans les ensembles O_3, O_4, il en sera de même pour l'ensemble $E - E_2$. Or d'après notre lemme, on a

$$\text{mes } O_1 \leqq {}^1/_\theta \text{ mes } (O - E) < {}^1/_\theta\, \mu = {}^1/_4\, \theta\, \varepsilon$$

et de même pour O_2. De plus, par le même lemme,

$$\text{mes } O_3 \leqq {}^1/_\theta \text{ mes } (O_1 + O_2) < {}^1/_2\, \varepsilon;$$

il en est de même pour O_4 et par conséquent

$$\text{mes } (O_3 + O_4) < \varepsilon.$$

Enfin, l'ensemble $E - E_2$ étant compris dans $O_3 + O_4$, il vient que

$$\text{mes } (E - E_2) < \varepsilon.$$

C'est-à-dire que, à part au plus un sous-ensemble dont la mesure est inférieure à ε, tous les points de E jouissent de la propriété que nous venons d'indiquer et que l'on pourra énoncer brièvement en disant que la *densité inférieure* de E autour de ces points, prise au sens fort, est $\geqq (1-\theta)^2$. Or ε étant arbitraire, l'ensemble d'exception sera de mesure nulle. En faisant encore parcourir à θ une suite $\theta_n \to 0$ et en réunissant les ensembles d'exception qui correspondent à ces θ_n, on obtiendra un ensemble E_0 de mesure nulle et telle que, à part les points de E_0, tous les points de E en sont des points de densité au sens fort.

Le théorème de M. Saks est donc démontré.