Sur un problème de M. H. Hahn.

Par

Z. Waraszkiewicz (Varsovie).

1. **Introduction.** Le but de cette note est de donner une solution au problème suivant, posé par M. H. Hahn: *Existe-t-il un continu dont tout continu soit une image continue?* (cf. Fund. Math. XV, p. 357). La solution est *négative*.

Je me propose, en effet, de construire une famille indénombrable $\mathcal{S}$ de courbes topologiquement planes (c. à d. homéomorphes à des courbes planes) et qui ne sont pas des images continues d'aucun *modèle* commun H[1]. Je vais établir notamment l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que f et g désignant deux transformations continues arbitraires, définies sur un continu H (d'ailleurs quelconque),

$$\textit{les conditions } f(H) \in \mathcal{S},\ g(H) \in \mathcal{S} \textit{ et } \sup_{x \in H} \varrho[f(x), g(x)] < \varepsilon \textit{ entraînent}$$
$$f(H) = g(H),$$

de sorte que si H admettait des transformations continues en toutes les courbes de la famille $\mathcal{S}$, l'espace de toutes les transformations f de ce genre, métrisé par la formule $\varrho(f, g) = \sup_{x \in H} \varrho[f(x), g(x)]$, ne contiendrait aucune partie dénombrable dense; or, c'est impossible[2],

[1]) Un continu H sera dit *modèle* d'un ensemble E, lorsqu'il existe une fonction continue sur H et telle que $f(H) = E$ (cf. S. Mazurkiewicz, *Sur les images continues des continus,* Comptes Rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, p. 66).

[2]) En vertu du théorème suivant de M. K. Borsuk (*Sur les rétractes,* Fund. Math. XVII, p. 165, th. 2): *Si l'espace P est compact, l'espace $\Phi_Q(P)$ est séparable,* $\Phi_Q(P)$ désignant l'espace de toutes les fonctions continues sur P et dont les valeurs appartiennent à Q.

puisque cet espace fait partie de celui des transformations continues de H en sous-ensembles d'un espace (à savoir du cône de révolution R) qui est *compact* par définition (voir plus loin p. 187, **4** (1)).

Quant à la famille $\mathcal{S}$, elle sera définie comme celle de certaines courbes extraites de la réunion de deux „spirales“ Σ^+ et Σ^- (à signe contraire de parcours) situées sur la surface latérale du cône R, ayant la circonférence de sa base pour sous-continu de condensation et telles que leurs arcs d'angle $\leqslant 2\pi$ sont de longueur égale à ceux de cette circonférence[3]). Chaque courbe de la famille $\mathcal{S}$ effectue d'abord un certain nombre de tours sur Σ^+, puis sur Σ^-, etc., en formant ainsi une sorte de „spirale à pointes“ qui s'approche asymptotiquement de la circonférence. Or, on peut s'arranger de façon que les nombres de tours entre deux pointes successives augmentent indéfiniment et, pour deux spirales quelconques de la famille $\mathcal{S}$, finissent par rester toujours différents. En conséquence deux mobiles parcourant respectivement les deux spirales vers la circonférence y prendraient des positions tantôt très voisines, tantôt diamétralement opposées, de sorte qu'on ne pourrait atteindre *par aucun choix des lois du mouvement* (même en admettant les vitesses continues de signe variable!) que ces mobiles finissent par rester proches. Je démontre notamment que, dans ces conditions, les arcs parcourus, bien que topologiquement proches, ont la propriété remarquable de ne se laisser obtenir d'aucun continu par des transformations continues proches. Cela tient à certaines propriétés des suites numériques (voir **5**) et qui se transportent d'une façon naturelle sur les arcs des courbes (voir **6** (7)). Quelques précautions me permettent d'établir toutes les propriétés auxiliaires de la famille $\mathcal{S}$ pour le cas des transformations continues des arcs simples (voir **3**, th. 2, et **6** (10)) et de ne les appliquer ensuite au cas général que dans la partie finale du raisonnement.

2. **Termes et notations.** Je désigne pour chaque paire de points a et b par $\varrho(a, b)$ la distance entre ces points, par $\overline{ab}$ l'arc aux extrémités a et b, par $L(\overline{ab})$ sa longueur; les points a et b étant

[3]) L'égalité des longueurs pourrait être d'ailleurs remplacée ici par la condition que la différence des longueurs tende d'une certaine manière vers 0, en s'approchant de la base du cône. On pourrait même faire la construction directement sur un cercle plan (en prenant p. ex. la projection orthogonale des courbes de la famille $\mathcal{S}$ sur la base du cône au lieu de celles de $\mathcal{S}$); cependant la démonstration serait alors plus compliquée.

situés dans un continu C, je désigne par $\varrho_c(a,b)$ la borne inférieure du diamètre des sous-continus de C qui contiennent x et y [4]).

A et B étant des ensembles quelconques, je désigne par $\varrho(A,B)$ la borne inférieure des distances entre les points x et y tels que $x \epsilon A$ et $x \epsilon B$, par $\delta(A)$ le diamètre de A et par $\overline{A}$ la *fermeture* de A.

3. Deux théorèmes sur les transformations continues de continus. Nous aurons recours dans la suite aux deux théorèmes, dont le premier concerne les modèles des continus irréductibles et le second ceux des arcs simples rectifiables.

Étant donné un continu irréductible J entre deux points a et b, supposons le décomposé linéairement en *tranches* [5]): $J = \sum\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant 1} T_\xi$, où $a \epsilon T_0$ et $b \epsilon T_1$.

Soient $0 \leqslant u < v \leqslant 1$ et

$$P = \sum_{u<\xi<v} T_\xi.$$

Appelons *portion* de J tout ensemble P de cette forme. On sait que [6]):

1° $\overline{P} \cdot T_u \neq 0 \neq \overline{P} \cdot T_v$,

2° *$\overline{P}$ est un continu irréductible entre chaque point de $\overline{P} \cdot T_u$ et chaque point de $\overline{P} \cdot T_v$,*

notamment, par suite de l'irréductibilité de J. Pour la même raison

3° *K étant un sous-continu quelconque de J tel que $K \cdot T_\xi \neq 0 \neq K \cdot T_\eta$ où $0 \leqslant \xi \leqslant u < v \leqslant \eta \leqslant 1$, on a $\overline{P} \subset K$ et l'ensemble $K - \overline{P}$ est la somme de deux ensembles $U \subset \sum\limits_{\xi \leqslant u} T_\xi$ et $V \subset \sum\limits_{\xi \leqslant v} T_\xi$,*

évidemment ouverts dans K.

Théorème 1. *J étant un continu irréductible, $\mathscr{H}$ son modèle par rapport à une transformation continue f, il existe pour toute portion $P = \sum\limits_{u<\xi<v} T_\xi$ de J un sous-continu H_1 de H tel que*

$$\overline{P} = f(H_1). \tag{I}$$

[4]) Cf. P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes* II, Verh. Akad. Amsterdam XIII, p. 35—42.

[5]) Cf. C. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles II*, Fund. Math. X, p. 250 et 259 (th. fondamental).

[6]) ibid; cf. en particulier p. 253, lemme 2.

Démonstration: Soit H_1 un sous-continu de $\mathscr{H}$ irréductible par rapport à la propriété $\overline{P} \subset f(H_1)$ [7]). Le continu H_1 est évidemment irréductible entre chaque point $a \epsilon H_1 \cdot f^{-1}(T_u)$ et chaque point $b \epsilon H_1 \cdot f^{-1}(T_v)$.

Or, supposons que l'on ait $f(H_1) - \overline{P} \neq 0$. En vertu de 3° on a donc $K - P = U + V$, où U et V sont des ensembles ouverts et dont on peut admettre que $U \neq 0$ (dans le cas où $V \neq 0$ le raisonnement serait symétrique). Par suite de la continuité de f, l'ensemble $f^{-1}(U)$ est ouvert dans H_1. En désignant donc par $I(b, H_1)$ [8]) l'ensemble de tous les points a de H_1 tels que le continu H_1 est irréductible entre b et a, on a $f^{-1}(U) - I(b,H_1) \neq 0$, puisque $I(b,H_1)$ est un ensemble frontière dans H_1 [9]). L'ensemble $H_1 - I(b,H_1)$ étant un semi-continu [10]), il existe pour un point quelconque q de l'ensemble $f^{-1}(U) - I(b,H_1)$ un continu

$$Q \subset H_1 - I(b, H_1) \tag{II}$$

contenant q et b (ce dernier point appartenant par définition à $H_1 - I(b,H_1)$). Comme $q \epsilon f^{-1}(U)$ et $b \epsilon f^{-1}(T_v)$, le sous-continu $f(Q)$ de K satisfait aux inégalités $f(Q) \cdot U \neq 0 \neq f(Q) \cdot T_v$, d'où selon 3° $f(Q) \cdot T_\xi \neq 0 \neq f(Q) \cdot T_v$ pour un $\xi \leqslant u$. Il résulte en vertu de 3° que $\overline{P} \subset f(Q)$, d'où en vertu de la définition de H_1 on tire $H_1 \subset Q$, contrairement à (II).

Théorème 2. *Soient f et g deux fonctions continues définies sur un continu arbitraire H et $\overline{ab_1}$ et $\overline{ab_2}$ deux arcs simples tels que*

$$f(H) = \overline{a_1 b_1} \quad \text{où } a_1 \epsilon \overline{ab}_1, \qquad g(H) = \overline{a_2 b_2} \quad \text{où } a_2 \epsilon \overline{ab}_2, \tag{I}$$

$$L(\overline{aa_1}) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \text{(II)}, \qquad \text{(III)} \quad \operatorname*{Min}_{x \epsilon g[f^{-1}(a_1)]} L(\overline{ax}) < \varepsilon.$$

Dans ces hypothèses l'inégalité

$$\operatorname*{Sup}_{x \epsilon H} \varrho(f(x), g(x)) < \varepsilon \tag{IV}$$

[7]) Cette propriété étant évidemment *inductive* au sens M. Brouwer, un tel continu H_1 existe en vertu du „Reduktionssatz" (voir L. E. J. Brouwer, *On the structure of perfect sets of points*, Proceed. Akad. Wett. Amsterdam 14 (1911), § 1 et C. Kuratowski, *Une méthode d'élimination des nombres transfinis...*, Fund. Math. 3, p. 89).

[8]) ibid. p. 230, Définition.

[9]) ibid. p. 236 th. III.

[10]) ibid. p. 232, lemme 1.

entraîne pour tout arc simple $\overline{uw}$ *l'existence de deux fonctions* φ *et* ψ *continues sur* $\overline{uw}$ *et telles que*

$$\text{(v)} \qquad \operatorname*{Sup}_{x \in \overline{uv}} \varrho[\varphi(x), \psi(x)] < 5\varepsilon,$$

$$\text{(vi)} \qquad \varphi(u) = \psi(u) = a, \qquad \varphi(w) = b_1,$$

$$\text{(vii)} \qquad \varphi(\overline{uw}) = \overline{ab_1} \qquad et \qquad \psi(\overline{uw}) = \overline{ab_2}.$$

Démonstration: X étant un ensemble quelconque situé sur un arc simple donné, désignons d'une façon générale par $\overline{X}$ le plus petit arc partiel contenant X.

Par suite de la continuité de f et g, il existe pour tout $x \in H$ un ensemble $U(x) \subset H$ ouvert dans H, contenant x et tel que

$$\text{(viii)} \qquad L[\overline{f(U(x))}] < \varepsilon \quad et \quad L[\overline{g(U(x))}] < \varepsilon.$$

En vertu du théorème de Borel[11]), le continu H est couvert par une suite finie $U_1, U_2, \ldots, U_m$ de ces ensembles ouverts:

$$\text{(ix)} \qquad H = \sum_{i=1}^{m} U_i.$$

En outre, H étant un continu, on peut ranger ces ensembles dans une suite

$$\text{(s)} \qquad U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n} \qquad où \quad m \leqslant n$$

assujettie aux conditions:

1⁰ $f^{-1}(a_1) \cdot U_{i_1} \neq 0 \neq f^{-1}(b_1) \cdot U_{i_n}$,

2⁰ $U_{i_k} \cdot U_{i_{k+1}} \neq 0$ où $k = 1, 2, \ldots n-1$,

3⁰ *chacun des ensembles* U_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *figure une ou plusieurs fois dans la suite* (s).

Posons pour tout k naturel $\overline{f(U_{i_k})} = \overline{a_1^{(k)} b_1^{(k)}}$ et $\overline{g(U_{i_k})} = \overline{a_2^{(k)} b_2^{(k)}}$, en convenant en particulier de désigner par $a_1^{(1)}$ et $a_1^{(n)}$ celles des extrémités des arcs $\overline{f(U_{i_1})}$ et $\overline{f(U_{i_k})}$ qui sont situées entre a et les autres. On aura donc

$$\text{(x)} \qquad L(\overline{aa_1^{(1)}}) \leqslant L(\overline{ab_1^{(1)}}) \quad et \quad L(\overline{aa_1^{(n)}}) \leqslant L(\overline{ab_1^{(n)}})$$

[11]) voir p. ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1927, p. 130, II.

et d'après (i), (ix) et 3⁰

$$\text{(xi)} \qquad \overline{a_1 b_1} = \sum_{k=1}^{n} \overline{f(U_{i_k})} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_1^{(k)} b_1^{(k)}} \quad et \quad \overline{a_2 b_2} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_2^{(k)} b_2^{(k)}}.$$

Une extrémité de $\overline{f(U_{i_1})}$ coïncidant d'après 1⁰ avec a_1 et une extrémité de $\overline{f(U_{i_m})}$ avec b_1, il vient en vertu de (x)

$$\text{(xii)} \qquad a_1 = a_1^{(1)} \quad et \quad b_1 = b_1^{(n)}.$$

Enfin, b_2 coïncidant selon (xi) avec un des points de la suite $a_2^{(1)}, b_2^{(1)}, a_2^{(2)}, b_2^{(2)}, \ldots, a_2^{(n)}, b_2^{(n)}$, convenons que

$$\text{(xiii)} \qquad a_2^{(l)} = b_2$$

pour un $l \leqslant n$. Ceci admis, les inégalités 2⁰ entraînent

$$\overline{a_1^{(k)} b_1^{(k)}} \cdot \overline{a_1^{(k+1)} b_1^{(k+1)}} \neq 0 \neq \overline{a_2^{(k)} b_2^{(k)}} \cdot \overline{a_2^{(k+1)} b_2^{(k+1)}} \quad où \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

On en tire selon (viii), en posant

$$\text{(xiv)} \qquad a_1^{(n+1)} = b_1^{(n)} \quad et \quad a_2^{(n+1)} = b_2^{(n)},$$

que l'on a pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\text{(xv)} \qquad \left.\begin{array}{l} L(\overline{a_1^{(k)} a_1^{(k+1)}}) \leqslant \max[L(\overline{a_1^{(k)} b_1^{(k)}}), L(\overline{a_1^{(k+1)} b_1^{(k+1)}})] \\ L(\overline{a_2^{(k)} a_2^{(k+1)}}) \leqslant \max[L(\overline{a_2^{(k)} b_2^{(k)}}), L(\overline{a_2^{(k+1)} b_2^{(k+1)}})] \end{array}\right\} < \varepsilon.$$

D'autre part, l'inégalité (iv) donne selon (viii) et (xiv)

$$\text{(xvi)} \qquad \varrho(\overline{a_1^{(k)} a_1^{(k+1)}}, \overline{a_2^{(k)} a_2^{(k+1)}}) \leqslant \varrho[f(U_{i_k}), g(U_{i_k})] + L[\overline{f(U_{i_k})}] + L[\overline{g(U_{i_k})}] < 3\varepsilon;$$

l'inégalité (ii) donne selon (xii) et (xv)

$$\text{(xvii)} \qquad L(\overline{a\,a_1^{(2)}}) = L(\overline{a\,a_1^{(1)}}) + L(\overline{a_1^{(1)} a_1^{(2)}}) < 2\varepsilon$$

et l'inégalité (iii) donne selon (x) et (xv)

$$\text{(xviii)} \qquad L(\overline{a\,a_2^{(2)}}) < L(\overline{a\,a_2^{(1)}}) + L(\overline{a_2^{(1)} a_2^{(2)}}) < 2\varepsilon.$$

Enfin, les définitions (xi), (xiii) et (xiv) impliquent que

$$\text{(XIX)}\quad \begin{cases} \overline{a\,a_1^{(2)}} + \sum\limits^{n} \overline{a_1^{(k)}\,a_1^{(k+1)}} = \overline{a\,b_1}, \\ \overline{a\,a_2^{(2)}} + \sum\limits_{k=2}^{l-1} \overline{a_2^{(k)}\,a_2^{(k+1)}} + \sum\limits_{k=l}^{n} \overline{a_2^{(k)}\,a_2^{(k+1)}} = \overline{a\,b_2}. \end{cases}$$

Passons à la définition des fonctions φ et ψ. Imaginons l'arc $\overline{uw}$ divisé arbitrairement en $n+1$ arcs partiels n'empiétant pas l'un sur l'autre:

$$\overline{v^{(1)}\,v^{(2)}},\ \overline{v^{(2)}\,v^{(3)}}, \dots, \overline{v^{(n)}\,v^{(n+1)}} \quad \textit{où} \quad v^{(n)} = u \quad \textit{et} \quad v^{(n+1)} = w.$$

Désignons par $\varphi(x)$ pour tout point $x \epsilon \overline{v^{(1)}\,v^{(2)}}$ le point $y \epsilon \overline{a\,a^{(2)}}$ qui vérifie l'équation

$$\text{(XX)}\qquad \frac{L(\overline{a_1^{(2)}\,y})}{L(\overline{a\,y})} = \frac{\delta(\overline{v^{(2)}\,x})}{\delta(\overline{v^{(1)}\,x})}$$

et pour tout point $x \epsilon \overline{v^{(k)}\,v^{(k+1)}}$ où $1 < k \leqslant n$ le point $y \epsilon \overline{a^{(k)}\,a^{(k+1}}$ qui vérifie l'équation

$$\text{(XXI)}\qquad \frac{L(\overline{a_1^{(k+1)}\,y})}{L(\overline{a_1^{(k)}\,y})} = \frac{\delta(\overline{v^{(k+1)}x})}{\delta(\overline{v^{(k)}\,x})}.$$

La fonction $\varphi(x)$ étant ainsi définie sur l'arc $\overline{uw}$ tout entier, on en obtient $\psi(x)$, en remplaçant l'indice inférieur 1 dans (XX) et (XXI) par l'indice 2.

Ces définitions montrent en vertu des formules (XX) et (XXI) que les deux fonctions φ et ψ sont continues sur $\overline{uw}$ et que l'on a les égalités

$$\varphi(\overline{v_1\,v_2}) = \overline{a\,a_1^{(2)}}, \qquad \psi(\overline{v_1\,v_2}) = \overline{a\,a_2^{(2)}},$$

et pour $k = 2, 3, \dots, n$:

$$\varphi(\overline{v_k\,v_{k+1}}) = \overline{a_1^{(k)}\,a_1^{(k+1)}} \quad \text{et} \quad \psi(\overline{v_k\,v_{k+1}}) = \overline{a_2^{(k)}\,a_2^{(k+1)}},$$

qui entraînent selon (XIX) la propriété (VII). La propriété (VI) résulte immédiatement de (XX) et (XXI). Enfin, pour $x \epsilon \overline{v^{(1)}\,v^{(2)}}$ on a selon (XX) $\varrho[\varphi(x), \psi(x)] < \delta(\overline{a\,a_1^{(2)}}) + \delta(\overline{a\,a_2^{(2)}})$, d'où selon (XVIII) et (XVIII)

$$\text{(XXII)}\qquad \varrho[\varphi(x), \psi(x)] < 4\varepsilon$$

et, pour $x \epsilon \overline{v^{(k)}\,v^{(k+1)}}$ où $k > 1$, on a selon (XXI) l'inégalité

$$\varrho[\varphi(x), \psi(x)] < \varrho(\overline{a_1^{(k)}\,a_1^{(k+1)}}, \overline{a_2^{(k)}\,a_2^{(k+1)}}) + \delta(\overline{a_1^{(k)}\,a_1^{(k+1)}}) + \delta(\overline{a_2^{(k)}\,a_2^{(k+1)}}),$$

d'où selon (XV) et (XVI)

$$\text{(XXIII)}\qquad \varrho[\varphi(x), \psi(x)] < 5\,\varepsilon.$$

Les inégalités (XII) et (XXIII) entraînent immédiatement la propriété (V), ce qui achève la démonstration.

4. Définition de la famille de courbes $\mathcal{S}$. Considérons sur le cône de révolution R:

(1) $\qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = 1 - r, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$

la courbe Σ^+ définie par les formules

(2) $$\frac{89\,e^{\theta} - 1}{89\,e^{\theta} + 1}, \qquad \theta \geqslant 0$$

et sa symétrique Σ^- par rapport au plan $y = 0$. Étant donné un point quelconque $\xi = (z, \theta)$ de R, soit d'une façon générale $p(\xi)$ le point $(0, \theta)$ de la circonférence $C(r = 1, z = 0)$. D'après (2) on a par différentiation

(3) $\qquad L(\overline{\xi\eta}) = L[p(\overline{\xi\eta})]$ *pour tout arc* $\overline{\xi\eta} \subset \Sigma^+$ *tel que* $L(\overline{\xi\eta}) \leqslant 2\pi$

et (1) et (2) impliquent que

(4) $\qquad$ *pour tout point* $\xi \epsilon \Sigma^+ + \Sigma^-$ *on a* $\varrho[\xi, p(\xi)] < \dfrac{1}{30}$

et que

(5) $\qquad$ *pour tout arc* $A \subset \Sigma^+ + \Sigma^-$ *l'inégalité* $\delta(A) < \dfrac{88}{45}$ *entraîne l'inégalité* $L(A) < 2\,\delta(A)\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{45}{44}$.

Désignons par $\{q_i\}$ la suite des points de Σ^+ qui sont situés sur la génératrice $\theta = 0$ de R, c. à d. des points (z_i, θ_i) définis par les conditions

(6) $$z_i = \frac{2}{89\,e^{2\pi i} + 1}, \quad \theta_i = 0 \quad \textit{où} \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

On déduit par le calcul de (2) et (6) que

(7) $\qquad$ *pour tout point* ξ *de la courbe* $\Sigma^+ + \Sigma^-$ *l'inégalité* $\varrho(q_0, \xi) < \dfrac{\sqrt{2}}{270}$ *entraîne l'inégalité* $L(\overline{q_0\,\xi}) < \varrho(q_0, \xi)\cdot\dfrac{\pi}{2}$, *où* $\overline{q_0\,\xi} \subset \Sigma^+ + \Sigma^-$.

Faisons maintenant correspondre à chaque suite infinie $\nu = \{n_k\}$ de nombres naturels la suite des arcs de Σ^+:

$$A_1^+ = \overline{q_0 q_{n_1}},\quad A_2^+ = \overline{q_{n_1+n_2} q_{n_1+n_2+n_3}},\ldots,\quad A_k^+ = \overline{q_{n_1+n_2+\ldots+n_{2k-2}} q_{n_1+n_2+\ldots+n_{2k-1}}},\ldots$$

et la suite des arcs de Σ^-:

$$A_1^- = \overline{q_{n_1} q_{n_1+n_2}},\quad A_2^- = \overline{q_{n_1+n_2+n_3} q_{n_1+n_2+n_3+n_4}},\ldots,\quad A_k^- = \overline{q_{n_1+n_2+\ldots+n_{2k-1}} q_{n_1+n_2+\ldots+n_{2k}}},\ldots$$

Posons

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^+ + A_k^-) + C = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} (A_k^+ + A_k^-)}.$$

Ainsi définie, la courbe S_ν est un continu irréductible du type λ [12]) entre le point q_0 et tout point de la circonférence C, qui est la seule tranche non ponctuelle de ce continu, de sorte que

(8) *tout sous-continu J de S_ν tel que $J \cdot C \neq 0 \neq J(S_\nu - C)$ est homéomorphe à S_ν.*

Le trajet de S_ν se compose alternativement d'un certain nombre de tours effectués dans le sens positif et d'un certain nombre de tours effectué dans le sens opposé, à savoir de n_1 tours sur Σ^+, de n_2 tours sur Σ^- et ainsi de suite. Les endroits où S_ν fait pointe coïncident par conséquent avec les extrémités $q_{n_1}, q_{n_1+n_2},\ldots$ des arcs $A_1^+, A_1^-, A_2^+, A_2^-,\ldots$ En posant donc $A_k^+ = S_\nu^{[2k-1]}$ et $A_k^- = S_\nu^{[2k]}$, on tire de (3)

(9) $$n_k = \frac{L(S_\nu^{[k]})}{2\pi} \qquad \textit{pour } k = 1, 2, \ldots$$

et l'on voit que le j-ème terme de la suite

(10) $$q_0,\ q_{n_1},\ q_{n_1+n_2},\ldots$$

est affecté de l'indice de la forme

(11) $$\omega_\nu(j-1) = \sum_{k=0}^{j-1} n_k \quad \textit{où} \quad n_0 = 0.$$

Appelons *spirales* les courbes S_ν en question, les points (10) ses *pointes* et la suite $\nu = \{n_k\}$, qui d'après (9) caractérise sa structure,

[12]) loc. cit. [5]) p. 262.

le *développement* de S_ν. Soit enfin $\mathcal{S}$ la famille des spirales S_ν dont les développements sont de la forme $\{n_k = E(10^k \cdot x)\}$ où x est un nombre de l'intervalle $[1, 2]$ et E désigne l'„entier".

Dans la suite, en parlant des spirales de la famille $\mathcal{S}$, nous allons identifier le nombre x avec la suite $\nu = \{n_k\}$ où $n_k = E(10^k \cdot x)$ et, en conséquence, nous en remplacerons l'indice ν par x.

5. Réduction des suites numériques. Etant donnée une suite (finie ou infinie) $\mu = \{m_i\}$ de nombres réels positifs [13]), nous attacherons à chaque *portion* $m_i, m_{i+1},\ldots, m_j$ de cette suite le nombre

$$\sigma(i, j) = \sum_{s=0}^{j-i} (-1)^s m_{i+s}.$$

Une suite $\nu = \{n_i\}$ de nombres positifs sera dite *suite réduite* de μ, lorsqu'il existe une suite croissante d'indices entiers positifs $i_1 = 1, i_2,\ldots, i_k,\ldots$ telle que l'on ait

(1) $$\sigma(i_k, i_{k+1} - 1) = n_k \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

et

(2) $$0 \leqslant \sigma(i_k, r) \leqslant \sigma(i_k, i_{k+1} - 1) = n_k \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots \quad \textit{et} \quad r = i_k,\ i_k + 1,\ldots,\ i_{k+1} - 1.$$

Réciproquement, la suite μ sera dite alors *modèle de réduction* de ν et chaque décomposition de μ en portions $m_{i_k} \ldots m_{i_{k+1}-1}$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) portera le nom de *décomposition de réduction* de μ relative à ν.

On voit que l'opération de réduction d'une suite μ consiste à en remplacer de telles portions par le nombre correspondant $\sigma(i_k, i_{k+1} - 1)$. Les inégalités (2) montrent que le nombre des termes de la somme (1) est *impair*, quel que soit k, puisque dans le cas contraire le dernier terme de cette somme serait négatif et par conséquent la valeur de la somme partielle dépasserait celle de la somme totale, contrairement à (2). On a donc

(3) $$i_{k+1} \equiv i_k + 1 \pmod 2 \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

[13]) Il nous suffirait, en vue d'applications, de nous borner ici aux suites finies, mais la quantité d'indices dans les raisonnements s'en trouverait alors inutilement accrue.

On conclut immédiatement de la définition de $\sigma(i,j)$ que ce symbole satisfait pour tout i et j naturels aux relations

$$\sigma(i,j)=\begin{cases}\sigma(j,i) \text{ pour } j-i\equiv 0 \pmod 2\\ -\sigma(j,i) \text{ pour } j-i\equiv 1 \pmod 2\end{cases}\tag{4}$$

et, si $i<t\leqslant j$,

$$\sigma(i,j)=\begin{cases}\sigma(i,t-1)+\sigma(t,j) \text{ pour } t-i\equiv 0 \pmod 2\\ \sigma(i,t-1)-\sigma(t,j) \text{ pour } t-i\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}\tag{5}$$

Remarquons encore que

$$0\leqslant\sigma(i_{k+1}-1,t)\leqslant\sigma(i_k,i_{k+1}-1)=n_k \text{ pour } t=i_{k+1}-1,i_{k+1}-2,\dots,i_k.\tag{6}$$

En effet, si $t=i_k$, cette inégalité est remplie en vertu de (3) et (4), qui donnent

$$\sigma(i_{k+1}-1,i_k)=\sigma(i_k,i_{k+1}-1) \text{ pour } k=1,2,\dots\tag{7}$$

et si $t>i_k$, on a selon les formules (3), (1) et (7) l'égalité $\sigma(i_{k+1}-1,t)=$ $=\sigma(i_{k+1}-1,i_k)-\sigma(i_k,t-1)=n_k-\sigma(i_k,t-1)$, qui donne les inégalités (6) en vertu de (2).

On conclut immédiatement des formules (6) et (7) que

(8) *étant donnée une décomposition de réduction relative à ν de la suite μ en portions $m_{i_k},\dots,m_{i_{k+1}-1}$ (où $i_1=1$ et $k=1,2,\dots$), la suite*

$$m_{i_2-1},m_{i_2-2},\dots,m_{i_1},m_{i_3-1},m_{i_3-2},\dots,m_{i_2},\dots,m_{i_{k+1}-1},m_{i_{k+1}-2},\dots,m_{i_k},\dots$$

est aussi un modèle de réduction de ν.

Envisageons à présent les relations entre deux décompositions de réduction de la même suite $\mu=\{m_i\}$ en portions

$$m_{i_k},\dots,m_{i_{k+1}-1} \quad \text{et} \quad m_{j_k},\dots,m_{j_{k+1}-1} \quad \text{où} \quad k=1,2,\dots$$

respectivement. On a alors les propositions suivantes:

(9) *si* $i_g\leqslant j_h<i_{g+1}\leqslant j_{h+1}$ *et* $i_{g+1}-j_h\equiv 0 \pmod 2$, *on a*

$$\sigma(j_h,i_{g+1}-1)=0,$$

car d'après (2) il vient $\sigma(j_h,i_{g+1}-1)\geqslant 0$ et d'après (6), en y posant $k=g$ et $t=j_h$, on obtient $\sigma(i_{g+1}-1,j_h)\geqslant 0$, ce qui donne $\sigma(j_p,i_{g+1}-1)=0$ en vertu de (4).

(10) *Si* $j_a\leqslant i_b\leqslant j_{a+1}\leqslant i_{b+1}\leqslant j_{a+2}$ *les congruences*

$$j_{a+1}-i_b\equiv j_{a+2}-i_{b+1}\equiv 0 \pmod 2$$

entraînent l'égalité

$$\sigma(i_b,i_{b+1}-1)=\sigma(j_{a+1},j_{a+2}-1).$$

(11) *Si* $\sigma(i_k,i_{k+1}-1)<\sigma(i_{k+1},i_{k+2}-1)$ *pour* $k=1,2,\dots,K-1$, *la relation*

(I) $\quad 0\leqslant i_k-j_p\equiv 1 \pmod 2$ *ou bien* $j_p\leqslant i_{k-1}$ (*où* $p>1$ *et* $K\geqslant k$)

entraîne l'inégalité $j_{p+1}\leqslant i_{k+1}$.

(12) *Etant donnés deux nombres réels x et y de l'intervalle* $[1,2]$ *tels que*

(II) $$E(10^{N+1}\cdot x)\neq E(10^{N+1}\cdot y),$$

(III) $\quad \sigma(i_k,i_{k+1}-1)=E(10^k\cdot x)$ *et* $\sigma(j_k,j_{k+1}-1)=E(10^k\cdot y)$

où $k=1,2,\dots,N+4$, *les inégalités*

(IV) $$j_p\leqslant i_k \quad \text{et} \quad N+1\leqslant \operatorname{Max}(k,p)\leqslant N+3$$

entraînent l'inégalité $j_{p+1}\leqslant i_{k+1}$.

Démonstrations: Ad (10). Si $j_{a+1}\neq i_b$, la congruence $j_{a+1}-i_b\equiv 0 \pmod 2$ entraîne en vertu de (9) l'égalité $\sigma(i_b,j_{a+1}-1)=0$, ce qui donne selon (6)

$$\sigma(i_b,i_{b+1}-1)=\sigma(j_{a+1},i_{b+1}-1);$$

si $j_{a+1}=i_b$, cette égalité est vérifiée identiquement.

Si $j_{a+2}\neq i_{b+1}$, la congruence $j_{a+2}-i_{b+1}\equiv 0 \pmod 2$ entraîne en vertu de (9) l'égalité $\sigma(i_{b+1},j_{a+2}-1)=0$, ce qui donne selon (6)

$$\sigma(j_{a+1},j_{a+2}-1)=\sigma(j_{a+1},i_{b+1}-1);$$

si $j_{a+2}=i_{b+1}$, cette égalité est vérifiée identiquement. Les deux égalités entraînent immédiatement l'égalité à démontrer.

Ad (11). Supposons par contre que $i_{k+1}<j_{p+1}$ et soit k_1 le plus petit indice tel que $j_p\leqslant i_{k_1}$, c. à. d. (puisque $p>1$) tel que

(V) $$i_{k_1-1}<j_p\leqslant i_{k_1}.$$

On a d'après (I) $k_1\leqslant k\leqslant K$. Deux cas peuvent se présenter:

1° $k_1=k$, ce qui donne $i_{k_1+1}<j_{p+1}$ et selon (I) et (V) la congruence $i_{k_1}-j_p\equiv 1 \pmod 2$, d'où on déduit, en appliquant successivement (5) et (2), que $\sigma(j_p,i_{k_1+1}-1)=$ $=\sigma(j_p,i_{k_1}-1)-\sigma(i_{k_1},i_{k_1+1}-1)\geqslant 0$, c. à. d. que $\sigma(j_p,i_{k-1})\geqslant\sigma(i_{k_1},i_{k_1+1}-1)$. D'autre part, cette congruence donne selon (V) $i_{k_1-1}<j_p<i_{k_1}$, ce qui implique en vertu de (4) et (6) que $\sigma(i_k-1,j_p)=\sigma(j_p,i_{k_1}-1)\leqslant\sigma(i_{k_1-1},i_{k_1}-1)$. Les deux dernières inégalités entraînent $\sigma(i_{k_1},i_{k_1+1}-1)\leqslant\sigma(i_{k_1-1},i_{k_1}-1)$, contrairement à l'hypothèse.

2° $k_1<k\leqslant K$. L'hypothèse $i_{k+1}<j_{p+1}$ donne dans ce cas $i_{k_1+2}<j_{p+1}$, d'où on conclut selon (V), en appliquant succesivement (5) et (2), que si $j_p-i_{k_1}\equiv 1$

(mod. 2), alors $\sigma(j_p, i_{k_1+1}-1) = \sigma(j_p, i_{k_1}-1) - \sigma(i_{k_1}, i_{k_1+1}-1) \geqslant 0$, c. à d.

(VI) $$\sigma(j_p, i_{k_1}-1) \geqslant \sigma(i_{k_1}, i_{k_1+1}-1).$$

D'autre part, la congruence $j_p - i_{k_1} \equiv 1 \pmod 2$ entraîne selon (V) l'inégalité $i_{k_1-1} < j_p < i_{k_1}$ ce qui donne en vertu de (4) et (6) $\sigma(j_p, i_{k_1}-1) = \sigma(i_{k_1}-1, j_p) \leqslant \sigma(i_{k_1-1}, i_{k_1}-1)$, d'où on tire selon (VI) l'inégalité $\sigma(i_{k_1}, i_{k_1+1}-1) \leqslant \sigma(i_{k_1-1}, i_{k_1}-1)$, contrairement à l'hypothèse. Enfin, si $j_p - i_{k_1} \equiv 0 \pmod 2$ et $j_p \neq i_{k_1}$, on tire de (V), de l'inégalité $i_{k_1+2} < j_{p+1}$ et de (9) (en y posant $g = k_1 - 1$ et $h = p$) à l'aide de (5) l'égalité $\sigma(j_p, i_{k_1+2}-1) = \sigma(i_{k_1}, i_{k_1+2}-1)$, qui est identiquement vérifiée dans le cas où $j_p = i_{k_1}$. Cette égalité donne selon (3), en appliquant successivement (6) et (2), l'inégalité $\sigma(j_p, i_{k_1+2}-1) = \sigma(i_{k_1}, i_{k_1+1}-1) - \sigma(i_{k_1+1}, i_{k_1+2}-1) \geqslant 0$, qui contredit l'hypothèse d'après 2°.

Ad (12). Supposons par contre que l'on ait

(VII) $$i_{k+s} < j_{p+1} \leqslant i_{k+n+1} \quad \textit{où} \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Les relations (III) et (II) entraînent en vertu de (IV) l'inégalité

(VIII) $$\sigma(j_p, j_{p+1}-1) \neq \sigma(i_k, i_{k+1}-1).$$

Si on avait $i_k - j_p \equiv 1 \pmod 2$ ou bien $i_{k-1} \geqslant j_p$, on obtiendrait selon (III), (IV) et (11) l'inégalité $i_{k+1} \geqslant j_{p+1}$, contrairement à (VII). On a donc les relations

(IX) $$i_k - j_p \equiv 0 \pmod 2$$

et $i_{k-1} < j_p$, qui, dans le cas où $i_k \neq j_p$, entraînent d'après (9) (en y posant $h = p$ et $g = k - 1$) l'égalité $\sigma(j_p, i_k - 1) = 0$, d'où selon (5)

(X) $$\sigma(j_p, j_{p+1}-1) = \sigma(i_k, j_{p+1}-1).$$

Cette relation reste évidemment vraie dans le cas où $i_k = j_p$. Les formules (III) et (IV) entraînent en vertu de (11) (où l'on substitue $k+1$ à k et $N+4$ à K) l'inégalité $j_{p+1} \leqslant i_{k+2}$, de sorte que dans la formule (VII) on a $n = 1$. La congruence (IX) donne selon (3) $j_{p+1} - i_{k+1} \equiv 0 \pmod 2$, ce qui entraîne d'apres (VII) (où $n = 1$) et (9) (en y posant $g = p$, $h = k+1$ et en permutant i et j) l'égalité $\sigma(i_{k+1}, j_{p+1}-1) = 0$, d'où selon (X) et (VII), en appliquant (5), l'égalité $\sigma(j_p, j_{p+1}-1) = \sigma(i_k, j_{p+1}-1) = \sigma(i_k, i_{k+1}-1) + \sigma(i_{k+1}, j_{p+1}-1) = \sigma(i_k, i_{k+1}-1)$, contrairement à (VIII).

Lemme. *Étant donnés deux nombres positifs $x \neq y$ de l'intervalle* $[1, 2]$ *et N désignant le plus grand entier tel que*

(I) $$E(10^N \cdot x) = E(10^N \cdot y),$$

il n'existe aucune suite $\mu = \{m_i\}$ de nombres positifs qui soit un modèle à la fois pour deux suites $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ telles que

(II) $$a_k = E(10^k \cdot x) \text{ et } b_k = E(10^k \cdot y) \text{ où } k = 1, 2, \ldots, N+4.$$

Démonstration. Supposons, par contre, qu'une telle suite μ existe et soient $m_{i_k}, \ldots, m_{i_{k+1}-1}$ et $m_{j_k}, \ldots, m_{j_{k+1}-1}$ deux décompositions de réduction de μ en portions telles que l'on ait

(III) $$\sigma(i_k, i_{k+1}-1) = a_k \text{ et } \sigma(j_k, j_{k+1}-1) = b_k \text{ pour } k = 1, 2, \ldots$$

Les hypothèses sur $\{i_k\}$ et $\{j_k\}$ étant symétriques, nous pouvons admettre que l'on a

(IV) $$j_{N+3} \leqslant i_{N+3}.$$

Soit r le plus petit indice tel que $j_{N+1} \leqslant i_r$; comme $N \geqslant 1$ par définition, on a donc

(V) $$i_{r-1} < j_{N+1} \leqslant i_r,$$

ce qui donne d'après (IV) $i_{r-1} < j_{N+1} < j_{N+3} \leqslant i_{N+3}$, d'où

(VI) $$r \leqslant N+3.$$

En vertu de (I)-(III) on a selon (VI)

(VII) $$\sigma(j_{N+1}, j_{N+2}-1) \neq \sigma(i_r, i_{r+1}-1) \neq \sigma(j_{N+2}, j_{N+3}-1).$$

D'autre part, les inégalités (VI) et (V) prouvent en vertu de (I)-(III) que les hypothèses de la proposition (12) sont remplies, aussi bien lorsqu'on y pose $k = r$ et $p = N+1$, que lorsqu'on y pose $k = N+1$ et $p = r-1$ (en permutant i et j).

On en tire

(VIII) $$i_r \leqslant j_{N+2} \leqslant i_{r+1}.$$

Enfin, les inégalités (VI) et (VIII) montrent que les hypothèses de la proposition (12) sont remplies, aussi bien lorsqu'on y pose $k = r+1$ et $p = N+2$, que lorsqu'on y pose $k = N+2$ et $p = r$ (en permutant i et j). On en tire

(IX) $$i_{r+1} \leqslant j_{N+3} \leqslant i_{r+2}.$$

Or, dans le cas où $i_r - j_{N+1} \equiv 0 \pmod 2$, on a en vertu de (3) $i_{r+1} - j_{N+2} \equiv 0 \pmod 2$ et ces deux congruences entraînent en vertu de (VIII), (IX) et (10) (si l'on y pose $a = r-1$ et $b = N+1$, en permutant i et j) l'égalité $\sigma(i_r, i_{r+1}-1) = \sigma(j_{N+1}, j_{N+2}-1)$, contraire à (VII). Par contre, dans le cas où $i_r - j_{N+1} \equiv 1 \pmod 2$, il vient en vertu de (3) $j_{N+2} - i_r \equiv 0 \pmod 2$ et $j_{N+3} - i_{r+1} \equiv 0 \pmod 2$, ce qui donne en vertu de (VIII), (IX) et (10) (en y posant $b = r$, $a = N+1$) l'égalité $\sigma(i_r, i_{r+1}-1) = \sigma(j_{N+2}, j_{N+3}-1)$, qui contredit encore la formule (VII).

6. Chaînes de points. Soient q et q' deux points arbitraires situés sur $S_\nu - C$ (où S_ν est une spirale au sens de la définition 4, p. 188), donc n'appartenant pas nécessairement à la famille $\mathcal{S}$.

Définitions. Une suite $c_1 = q,\ c_2, \ldots,\ c_r = q', \ldots,\ c_t,\ c^{t+1}$ de points de $S_\nu - C$ sera dite *chaîne d'ordre t* sur l'arc $\overline{qq'} \subset S_\nu$, si l'on a $\overline{qq'} = \overline{c_1 c_{r+1}} = \sum_{i=1}^{t} \overline{c_i c_{i+1}}$ et si celles des pointes de S_ν qui appartiennent à $\overline{c_i c_{i+1}}$ sont des extrémités de $\overline{c_i c_{i+1}}$. Si, en outre, le sens de parcours des arcs $p(\overline{c_1 c_2}),\ p(\overline{c_2 c_3}), \ldots,$ sur la circonférence C alterne au passage de i à $i+1$, c. à d. que l'on a $\operatorname{Sign}(\overline{c_i c_{i+1}}) = - \operatorname{Sign}(\overline{c_{i+1} c_{i+2}})$, la chaîne s'appellera *alternative*.

Il est évident que la chaîne formée de deux points est toujours alternative et que *toute chaine $\{c_i\}$ peut être transformée d'une façon univoque en chaîne alternative*, en y remplaçant chaque suite de points consécutifs $c_{i_k}, c_{i_k+1}, \ldots, c_{i_{k+1}}$ tels que $\operatorname{Sign}(\overline{c_{i_k} c_{i_k+1}}) = \operatorname{Sign}(\overline{c_{i_k+1} c_{i_k+2}}) = \ldots = \operatorname{Sign}(\overline{c_{i_{k+1}-1} c_{i_{k+1}}})$ par les deux points c_{i_k} et $c_{i_{k+1}}$ (i_k étant, bien entendu, des indices tels que les arcs $\overline{c_{i_k-1} c_{i_k}}$ et $\overline{c_{i_{k+1}} c_{i_{k+1}+1}}$, s'ils existent, sont en relation: $-\operatorname{Sign}(\overline{c_{i_k-1} c_{i_k}}) = \operatorname{Sign}(\overline{c_{i_k} c_{i_k+1}}) = -\operatorname{Sign}(\overline{c_{i_{k+1}} c_{i_{k+1}+1}})$).

A toute chaîne alternative $\{c_i\}$ d'ordre t sur un arc $\overline{qq'}$ nous allons attacher le nombre $Q(\{c_i\})$ des pointes de S_ν situées *à l'intérieur* de l'arc $\overline{qq'}$, et le nombre $\tau(\{c_i\}) = \frac{1}{2\pi}[L(\overline{c_1 c_2}) - L(\overline{c_2 c_3}) + \ldots + (-1)^{t+1} L(\overline{c_t c_{t+1}})]$, qui portera le nom de *coefficient*.

Nous désignerons enfin pour tout point c_i de la chaîne considérée par $\nu(i)$ le plus grand indice tel que $c_i \in S_\nu^{[\nu(i)]} = \overline{q_{\omega_\nu[\nu(i)-1]}\, q_{\omega_\nu[\nu(i)]}}$.

Voici quelques simples conséquences de ces définitions:

(1) *Pour chaque chaîne alternative $\{c_i\}$ d'ordre t sur $\overline{qq'}$ l'égalité*

$$Q[\{c_i\}] = 0 \text{ entraîne l'égalité } \tau[\{c_i\}] = \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_1 c_{t+1}}).$$

La démonstration s'obtient par induction. Pour $t=1$ la formule est évidente. Admettons qu'elle est vraie pour $t \geqslant 1$ et soit $\{c_i\}$ une chaîne alternative d'ordre $t+1$. En désignant par γ sa chaîne partielle $c_1, c_2, \ldots, c_t$, on a donc $\tau(\gamma) = \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_1 c_t})$, ce qui donne $\tau(\{c_i\}) = \tau(\gamma) + (-1)^{t+1} \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_t c_{t+1}}) = \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_1 c_t}) + (-1)^{t+1} \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_t c_{t+1}})$. Or, l'hypothèse faite sur $\overline{qq'}$ entraîne $\operatorname{Sign}(\overline{c_1 c_2}) = (-1)^{t+1} \operatorname{Sign}(\overline{c_t c_{t+1}})$, ce qui donne $L(\overline{c_1 c_{t+1}}) = L(\overline{c_1 c_t}) + (-1)^{t+1} L(\overline{c_t c_{t+1}})$. On a donc $\tau(\{c\}) = \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_1 c_{t+1}})$, c. q. f. d.

(2) *Dans les mêmes hypothèses, l'égalité $q' = c_{t+1}$ entraîne $t \equiv 1$ (mod 2),*

car l'égalité $q' = c_{t+1}$ donne $\operatorname{Sign}(\overline{c_1 c_2}) = \operatorname{Sign}(\overline{c_t c_{t+1}})$, ce qui entraîne $t \equiv 1$ (mod 2), la chaîne $\{c_i\}$ étant alternative.

(3) *Étant donnée une chaîne alternative $\{c_i\}$ d'ordre t sur l'arc $\overline{qq'} = \overline{c_1 q'} \subset S_\nu - C$, l'égalité $c_1 = c_{t+1}$ entraîne*

(I) $t \equiv 0$ (*mod* 2) *et* (II) $\tau(\{c_i\}) = 0$.

On n'a qu'à procéder par induction par rapport à $Q(\{c_i\})$.

1° Si $Q(\{c_i\}) = 0$, il vient en vertu de (1), en désignant par γ la chaîne partielle $c_1, c_2, \ldots, c_t$, $\tau(\{c_i\}) = \tau(\gamma) + (-1)^{t+1} \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_t c_{t+1}}) = \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_1 c_t}) + (-1)^{t+1} \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_t c_{t+1}}) = 0$, d'où $-(-1)^{t+1} = 1$. On en tire la congruence (I), l'égalité $c_1 = c_{t+1}$ entraînant $L(\overline{c_1 c_t}) = L(\overline{c_t c_{t+1}}) \neq 0$.

2° Supposons donc la proposition vraie pour toutes les chaînes alternatives $\{c_i\}$ telles que $Q(\{c_i\}) < k+1$ où $k \geqslant 0$, et soit $\{c_i\}$ une chaîne alternative telle que $Q(\{c_i\}) = k+1$. Désignons par q_s la première pointe située à l'intérieur de l'arc $\overline{c_1 q'}$, en le parcourant de c_1 à q (on aura donc $c_1 \neq q_s \neq q'$); soit c_g le premier point de la chaîne $\{c_i\}$ tel que $c_g = q_s$ et c_h le dernier tel que $c_h = q_s$. La suite $\gamma' = (c_1, c_2, \ldots, c_g, c_{h+1}, \ldots, c_{t+1})$ est une chaîne sur l'arc $\overline{c_1 q_s} = \overline{c_1 c_h}$ et l'on a évidemment $Q(\gamma') = 0$, ce qui entraîne en vertu de 1°

(III) $\tau(\gamma') = 0$ *et* $t - h + g \equiv 0$ (mod 2).

D'autre part, posons $k_1 = g$ et désignons pour $i \geqslant 2$ par k_i l'indice du premier point de la suite $c_{k_{i-1}+1}, c_{k_{i-1}+2}, \ldots, c_h$ qui coïncide avec q_s. Il existe donc un $j > 1$ tel que $k_j = h$ et que chaque suite $\gamma = (c_{k_i}, c_{k_i+1}, \ldots, c_{k_{i+1}})$, où $i < j$, est une chaîne alternative pour laquelle on a $c_{k_i} = c_{k_{i+1}}$ et $Q(\gamma) < k+1$. En vertu de l'hypothèse 2°, il vient en conséquence

(IV) $\tau(\gamma_i) = 0$ et $k_{i+1} - k_i \equiv 0$ (mod 2) où $i = 1, 2, \ldots, j$.

On a donc $\sum_{i=1}^{j-1} (k_{i+1} - k_i) \equiv h - g \equiv 0$ (mod 2), d'où les formules (I) et (II), d'après (III) et (IV).

Nous allons nous borner dans la suite aux chaînes alternatives $\{c_i\}$ telles que $c_1 = q_{\omega_\nu(i-1)}$ où $i = 1, 2, \ldots$ Soit, pour en évaluer les coefficients,

$$q_{\omega_\nu(i-1)} = c_1, c_2, \ldots, c_r = q', \ldots, c_{t+1}$$

une chaîne de ce genre sur $\overline{c_1 q'} \subset S_\nu - C$. Considérons d'abord le cas où $\nu(1) \leqslant \nu(t+1)$, c. à. d. où $\nu(r) \geqslant \nu(t+1) \geqslant \nu(1)$.

Désignons par Γ la suite

$$q_{\omega_\nu[\nu(1)-1]},\ q_{\omega_\nu[\nu(1)]},\ldots,\ q_{\omega_\nu[\nu(r)-1]},\ q'=c_r,\ q_{\omega_\nu[\nu(r)-1]},\ q_{\omega_\nu[\nu(r)-2]},\ldots$$
$$\ldots,\ q_{\omega_\nu[\nu(t+1)]},\ c_{t+1}$$

ou la suite

$$q_{\omega_\nu[\nu(1)-1]},\ q_{\omega_\nu[\nu(1)]},\ldots,\ q_{\omega_\nu[\nu(r)-1]},\ q'=c_r,\ c_{t+1},$$

suivant que l'on a $\nu(1)<\nu(t+1)$ ou $\nu(1)=\nu(t+1)$. Ainsi définie, Γ est évidemment une chaîne alternative sur $\overline{c_1 c_r}=\overline{c_1 q'}$. Soient $j_1=1$ et j_k où $k>1$ le premier indice supérieur à j_{k-1} tel que c_{j_k} coïncide avec un point de la suite Γ.

Il existe donc un tel m naturel que $j_m=t+1$, de sorte que $c_{j_m}=c_{t+1}$ et que pour tout $k=1,2,\ldots,m-1$ la suite $\gamma_k'=(c_{j_k},\ c_{j_k+1},\ldots,\ c_{j_{k+1}})$ est une chaîne alternative avec $Q(\gamma_k')=0$. On en conclut en vertu de (2) et (3) que l'égalité $c_{j_k}=c_{j_{k+1}}$ entraîne $j_k\equiv j_{k+1}\pmod 2$ et $\tau(\gamma_k')=0$, tandisque l'inégalité $c_{j_k}\neq c_{j_{k+1}}$ entraîne $j_{k+1}\equiv j_k+1\pmod 2$ et $\tau(\gamma_k')=L(\overline{c_{j_k}c_{j_{k+1}}})$. Ces relations prouvent que l'on a $\tau(\{c_i\})=\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1}L(\overline{c_{j_k}c_{j_{k+1}}})$ et qu'en supprimant dans la suite $c_{j_1},\ c_{j_2},\ldots,\ c_{j_m}$ chaque point qui coïncide avec son précédent immédiat, on obtient une chaîne

$$\Gamma'=c_{j_1'}=c_{j_1},\ c_{j_2'},\ c_{j_3'},\ldots,\ c_{j_{m'}'}=c_{j_m}$$

telle que

$$\text{(v)}\qquad \tau(\{c_i\})=\tau(\{c_{j_k'}\})=\sum_{k=1}^{m'-1}(-1)^{k-1}L(\overline{c_{j_k'}c_{j_{k+1}'}})\ \textit{et}\ c_{j_k'}\neq c_{j_{k+1}'},$$

l'ensemble des points de Γ' coïncidant avec celui de la chaîne Γ. En appliquant, s'il y a lieu (c. à d. si $c_{j_k'}=j_l'$ où $k<l\leqslant m'$), la proposition (3) à la chaîne Γ', on obtient une chaîne Γ'' telle que $\tau(\Gamma'')=\tau(\Gamma')$ et ainsi de suite, d'où selon (v) $\tau(\{c_i\})=\tau(\Gamma')=\tau(\Gamma'')=\ldots=\tau(\Gamma)$. Il en résulte selon **4** (9) que l'on a

$$\text{(4)}\qquad \tau(\{c_i\})=n_{\nu(1)}-n_{\nu(1)+1}+\ldots+(-1)^{\nu(t+1)-\nu(1)-1}n_{\nu(t+1)-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\nu(t+1)-\nu(1)}\frac{1}{2\pi}L(\overline{q_{\omega_\nu[\nu(t+1)-1]}c_{t+1}}),\ \textit{ou bien}\ \tau(\{c_i\})=\frac{1}{2\pi}L(\overline{c_1c_{t+1}}),$$

suivant que $\nu(1)<\nu(t+1)$ *ou* $\nu(1)=\nu(t+1)$.

Passons au cas $\nu(t+1)<\nu(1)$. On trouve par le raisonnement analogue:

$$\text{(5)}\qquad \tau(\{c_i\})=n_{\nu(1)-1}-n_{\nu(1)}+\ldots+(-1)^{\nu(1)-\nu(t+1)-1}n_{\nu(t+1)+1}+$$
$$+(-1)^{\nu(1)-\nu(t+1)}\frac{1}{2\pi}L(\overline{q_{\omega_\nu[\nu(t+1)]}c_{t+1}})\quad \textit{ou bien}\quad \tau(\{c_i\})=$$
$$=\frac{1}{2\pi}L(\overline{q_{\omega_\nu[\nu(t+1)]}c_{t+1}}),\ \textit{suivant que}\ \nu(t+1)<\nu(1)-1\ \textit{ou}$$
$$\nu(t+1)=\nu(1)-1.$$

Les formules (4) et (5) nous conduisent à la conclusion que

(6) *le coefficient d'une chaîne sur un arc $\overline{q_h q}$ ne dépasse jamais la 2π-ième partie de la longueur de cet arc,*

car le membre droit de ces formules est, en vertu de **4** (9), manifestement $\leqslant\frac{1}{2\pi}L(\overline{c_1c_{t+1}})\leqslant\frac{1}{2\pi}L(\overline{q_hq})$. En outre:

(7) *Etant donnée une chaîne alternative $\{c_i\}$ d'ordre t sur l'arc $\overline{q_0q'}\subset S_x\subset S$ telle que $x(t+1)>1$, la suite de nombres*

$$m_1=\frac{1}{2\pi}L(\overline{c_1c_2}),\quad m_2=\frac{1}{2\pi}L(\overline{c_2c_3}),\ldots,\quad m_t=\frac{1}{2\pi}L(\overline{c_tc_{t+1}})$$

est un modèle de réduction de la suite

$$E(10\cdot x),\ E(10^2\cdot x),\ldots,\ E(10^{x(t+1)-1}),\ m_n,\ m_{n+1},\ldots,\ m_t,$$

où n désigne le plus petit indice pour lequel $c_n=q_{\omega_x(x(t+1)-1)}$.

Afin de le démontrer, posons $i_1=1$ et désignons pour tout $k=2,3,\ldots,x(t+1)$ par i_k le plus petit indice tel que $c_{i_k}=q_{\omega_x(k+1)}$. Par conséquent pour tout $k=1,2,\ldots,x(t+1)-1$ et $r=1,2\ldots,i_{k+1}-i_k$ la suite $\gamma_k^{(r)}=(c_{i_{k+1}},\ c_{i_{k+1}-1},\ldots,\ c_{i_{k+1}-r})$ est une chaîne alternative sur un arc partiel de $\overline{q_{\omega_x(k)}q_0}$; en particulier $\gamma_k^{(i_{k+1}-i_k)}$ en est une sur $\overline{q_{\omega_x(k)}q_{\omega_x(k-1)}}=S_x^{(k)}\subset S_x$. On en déduit en vertu de (4) et **4** (9) que

$$\text{(vi)}\qquad \tau(\gamma^{(i_{k+1}-i_k)})=m_{i_{k+1}-1}-m_{i_{k+1}-2}+\ldots+(-1)^{i_{k+1}-i_k-1}m_{i_k}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}L(S_x^{(k)})=E(10^k\cdot x)$$

et que l'on a pour $r=1,2,\ldots,i_{k+1}-i_k$ l'une ou l'autre des égalités:

$$\tau(\gamma_k^{(r)}) = m_{i_{k+1}-1} - m_{i_{k+1}-2} + \ldots + (-1)^{r-1} m_{i_{k+1}-r} =$$
$$= E(10^k \cdot x) - E(10^{k-1} \cdot x) + \ldots + (-1)^{k-x(i_{k+1}-r)+1} (10^{x(i_{k+1}-r)+1} \cdot x) +$$
$$+ (-1)^{k-x(i_{k+1}-r)} \frac{1}{2\pi} L(\overline{q_{\omega[x(i_{k+1}-r)]}\, c_{i_{k+1}-r}})$$

ou bien

$$\tau(\gamma_k^{(r)}) = \frac{1}{2\pi} L(\overline{q_{\omega_x(k)}\, c_{i_{k+1}-r}}),$$

suivant que $x(i_{k+1}-r) < k$ ou $x(i_{k+1}-r) = k$. En vertu de l'inégalité évidente

$$\frac{1}{2\pi} L(\overline{q_{\omega_x[x(i_{k+1}-r)]}\, c_{i_{k+1}-r}}) \leqq \frac{1}{2\pi} L(\overline{q_{\omega_x[x(i_{k+1}-r)-1]}\, q_{\omega_x[x(i_{k+1}-r)]}}) = E(10^{x(i_{k+1}-r)} \cdot x)$$

on en tire:

$$0 \leqslant m_{i_{k+1}-1} - m_{i_{k+1}-2} + \ldots + (-1)^{r-1} m_{i_{k+1}-r} \leqslant E(10^k \cdot x)$$
$$\textit{pour } r = 1, 2, \ldots, i_{k+1} - i_k,$$

ce qui prouve en vertu (VI) et **5** (8) que la suite $m_1, m_2, \ldots, m_t$ est bien un modèle de réduction de la suite $E(10 \cdot x)$, $E(10^2 \cdot x), \ldots,$ $E(10)^{x(t+1)-1} \cdot x)$, $m_{i_{x(t+1)}}$, $m_{i_{x(t+1)}+1}, \ldots, m_t$.

Définition. Deux chaînes $\{c_i'\}$ et $\{c_i''\}$ d'ordre p situés respectivement sur les arcs $\overline{q_0 q'}$ et $\overline{q_0 q''}$ (d'une même spirale ou de deux spirales distinctes) seront dites *holomogues*, si l'on a $L(\overline{c_i' c_{i+1}'}) =$ $= L(\overline{c_i'' c_{i+1}''})$ et $\operatorname{Sign}(\overline{c_i' c_{i+1}'}) = \operatorname{Sign}(\overline{c_i'' c_{i+1}''})$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

On conclut immédiatement de cette définition que

(8) *les chaînes $\{c_i'\}$ et $\{c_i''\}$ étant homologues, les chaînes alternatives qui s'en obtiennent*[14]) *le sont aussi,*

(9) *les coefficients des chaînes alternatives homologues sont égaux.*

Enfin on démontre à l'aide de **3**, th. 2, que

(10) *Étant données deux fonctions continues f et g, définies sur un continu H et telles que $f(H) = \overline{a_1 q_h} \subset S_x - C$ où $h \geqslant 1$ et $g(H) = \overline{a_2 b_2} \subset S_y - C$ (S_x et S_y appartenant à $\mathfrak{S}$) les inégalités*

(I) $$\varrho(f(\xi), g(\xi)) < \frac{\sqrt{2}}{1080} \quad \textit{pour} \quad \xi \in H,$$

14) cf. plus haut, p. 194.

(II) $$L(\overline{q_0 a_1}) < \frac{\sqrt{2}}{1080}$$

entraînent l'existence de deux chaînes alternatives homologues $\{c_i'\}$ sur $\overline{q_0 q_h}$ et $\{c_i''\}$ sur $\overline{q_0 b} \subset S_y - C$, d'ordre t et telles que

(III) $c_{t+1}' = q_h$ *et* (IV) $L(\overline{q_0 b}) \leqslant L(\overline{q_0 b_2}) + \pi.$

En effet, selon (I) et (II) on a pour tout point $\xi \in f^{-1}(a_1)$

$$\varrho[q_0, g(\xi)] < \varrho(q_0, a_1) + \varrho[a_1, g(\xi)] \leqslant L(\overline{q_0 a_1}) +$$
$$+ \varrho[f(\xi), g(\xi)] < 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1080},$$

d'où, en vertu de **4** (7), l'inégalité $L[\overline{q_0 g(\xi)}] < \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{1080}$ et par conséquent

(V) $$\min_{\eta \in g[f^{-1}(a_1)]} L(\overline{q_0 \eta}) < \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{1080} < \frac{1}{150}.$$

En vertu de (I), (II) et (V) les hypothèses de **3**, th. 2, se trouvent vérifiées pour $a = q_0$, $b_1 = q_h$ et $\varepsilon = \frac{1}{150}$. Par conséquent il existe pour tout arc simple $A = \overline{uw}$ deux fonctions continues φ et ψ, définies sur A et telles que

$$1^0 \quad \varrho(\varphi(x), \psi(x)) < \frac{1}{30},$$
$$2^0 \quad \varphi(u) = \psi(u) = q_0, \ \varphi(w) = q_h,$$
$$3^0 \quad \varphi(\overline{uw}) = \overline{q_0 q_h}, \ \psi(\overline{uw}) = \overline{q_0 b_2}.$$

On peut définir sur A par induction une suite des points

(Δ) $$u = d_1, d_2, \ldots, d_{p+1} = w$$

ordonnés de u à w et tels que l'on ait sur S_x

(VI) $$L[\overline{\varphi(d_i)\, \varphi(d_{i+1})}] = \frac{\pi}{2} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

de sorte qu'aucun des arcs $\overline{\varphi(d_i)\, \varphi(d_{i+1})}$ ne contienne à son intérieur aucune pointe de S_x.

Soit à ce but $\overline{u d_1}$ le plus petit arc partiel de $\varDelta$ tel que $L[\varphi(\overline{u d_1})] = \frac{\pi}{2}$. Etant donnés pour $j \geqslant 1$ les points $d_1, d_2, \ldots, d_j$ assujettis à la condition (VI), remarquons qu'on a alors pour un $r \leqslant j-1$ l'égalité $L[\overline{\varphi(d_1)\varphi(d_j)}] = \frac{\pi}{2} r$ et d'autre part, selon **4**, (3) et (6), $L(\overline{q_0 q_h}) = \pi \cdot 2h$, d'où, selon 2°, $L[\overline{\varphi(d_j) q_h}] = L[\varphi(\overline{uv})] - L[\overline{\varphi(d_1)\varphi(d_j)}] = \frac{\pi}{2}(4h - r)$. Si $d_j \neq w$, le nombre entier $4h - r$ est positif, de sorte que $L[\overline{\varphi(d_j) d}] \geqslant \frac{\pi}{2}$ et nous pouvons désigner par $\overline{d_j d_{j+1}}$ le plus petit arc partiel de $\overline{d_j w}$ tel que l'on ait $L[\overline{\varphi(d_j)\varphi(d_{j+1})}] = \frac{\pi}{2}$. La suite $(\varDelta)$ étant ainsi définie, il vient $\sum_{i=1}^{p} \overline{d_i d_{i+1}} = \overline{u d_2} + \sum_{i=2}^{p} \overline{d_i d_{i+1}} + \overline{d_p w} = \varDelta$ d'où, selon 3°, $\sum_{i=1}^{p} \overline{\varphi(d_i)\varphi(d_{i+1})} = \overline{q_0 q_h}$ et en même temps $\varphi(d_{p+1}) = q_h$.

La suite $\{\varphi(d_i)\}$ forme donc une chaîne d'ordre p sur $\overline{q_0 q_h}$ et l'on a

$$\text{(VII)} \qquad \varphi(u) = \varphi(d_1) = q_0 \quad et \quad \varphi(d_{p+1}) = q_h.$$

Ceci établi, passons à la construction d'une chaîne $\{c_i\}$ de S_y homologue à $\{\varphi(d_i)\}$. Remarquons à ce but que pour tout $j = 1, 2, \ldots, p+1$ et $\xi \in S_y$ l'égalité $p(\xi) = p[\varphi(d_j)]$ entraîne d'après 1° et **4** (4) l'inégalité $\varrho(\psi(d_j), \xi) \leqslant \varrho[\varphi(d_j), \psi(d_j)] + \varrho(\varphi(d_j), p[\varphi(d_j)]) + \varrho(p(\xi), \xi) \leqslant \leqslant \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$. Comme $\psi(d_j) \in S_y$, on en conclut que pour tout $j = 1, 2, \ldots, p+1$ il existe des points $\eta \in S_y$ tels que l'on ait à la fois $p(\eta) = p[\varphi(d_j)]$ et $\varrho_{S_y}(\psi(d_j), \eta) \leqslant \frac{1}{10}$. Soit c_j celui de ces points pour lequel la longueur de l'arc $\overline{q_0 c_j}$ de S_y est la plus petite. On a donc

$$\text{(VIII)} \qquad p(c_j) = p[\varphi(d_j)],$$

$$\text{(IX)} \qquad \varrho_{S_y}(\psi(d_j), c_j) \leqslant 10^{-1} \quad pour \quad j = 1, 2, \ldots, p+1$$

et l'on peut évaluer à l'aide de (VI) que

$$\text{(X)} \qquad L(\overline{c_j c_{j+1}}) = L[\overline{\varphi(d_j)\varphi(d_{j+1})}] = \frac{\pi}{2} \quad pour \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

ce qui constitue une formule fondamentale pour la suite de cette note.

Remarquons à ce but que la définition de $\{\varphi(d_j)\}$ entraîne selon (VI) pour tout point $d \in \overline{d_j d_{j+1}}$ et $j \leqslant p$ l'inégalité

$$L[\overline{\varphi(d_j)\varphi(d)}] = L[p\{\overline{\varphi(d_j)\varphi(d)}\}] \leqslant \frac{\pi}{2}$$

et d'autre part on a évidemment

$$L[p\{\overline{\psi(d_j)\psi(d)}\}] \leqslant L[p\{\overline{\varphi(d_j)\varphi(d)}\}] + L[p\{\overline{\varphi(d_j)\}p\{\psi(d_j)}\}] + L[p\{\overline{\varphi(d)\}p\psi\{(d)}\}],$$

où $p\overline{[\varphi(d_j)]p[\psi(d_j)]}$ et $p\overline{[\varphi(d)]p[\psi(d)]}$ désignent respectivement les arcs les plus courts de la circonférence C aux extrémités $p[\varphi(d_j)]$, $p[\psi(d_j)]$ et $p[\varphi(d)]$, $p[\psi(d)]$. On en conclut en vertu de 1°, **4** (4) et **4** (5) que

$$\text{(XI)} \qquad L[p\{\overline{\psi(d_j)\psi(d)}\}] < \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{3}{30} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{5}\pi \quad où \quad d \in d_j d_{j+1} \quad et \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Cette inégalité montre que $Q = Q[\overline{\psi(d_j)\psi(d)}] \leqslant 1$, puisque dans le cas contraire on aurait en vertu de **4** (3) et **4** (6) l'inégalité $L[p\{\overline{\psi(d_j)\psi(d)}\}] = = 2\pi > \frac{3}{5}\pi$. Or si $Q = 0$, on a d'après (XI) et **4** (3) l'inégalité

$$\text{(XII)} \qquad L[\overline{\psi(d_j)\psi(d_{j+1})}] = L[p\{\overline{\psi(d_j)\psi(d_{j+1})}\}] < \frac{3}{5}\pi.$$

Si $Q = 1$, soit q_r la (seule) pointe de S_y située à l'intérieur de l'arc $\overline{\psi(d_j)\psi(d_{j+1})}$. Par raison de symétrie on peut admettre que pour les arcs partiels $\overline{\psi(d_j) q_r}$ et $\overline{q_r \psi(d_{j+1})}$ de cet arc on a l'inégalité

$$\text{(XIII)} \qquad L[\overline{q_r \psi(d_{j+1})}] \leqslant L[\overline{\psi(d_j) q_r}].$$

Soit donc $\overline{d_j d}$ le plus petit arc partiel de $\overline{d_j d_{j+1}}$ tel que $\psi(\overline{d_j d}) = \overline{\psi(d_j) q_r}$; il vient $q_r = \psi(d)$ et la formule (XI) entraîne selon **4** (3) l'inégalité $L[\overline{\psi(d_j) q_r}] = = L[\overline{\psi(d_j)\psi(d)}] = L[p\{\overline{\psi(d_j)\psi(d)}\}] < \frac{3}{5}\pi$, d'où selon (XIII)

$$\text{(XIV)} \qquad L[\psi(d_j)\psi(d_{j+1})] < \frac{6}{5}\pi \quad pour \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Ceci étant, les points $c_j, c_{j+1}, \psi(d_j)$ et $\psi(d_{j+1})$, qui sont situés sur un arc partiel de $S_y - C$, satisfont en vertu de (IX), (XII), (XIV) et **4** (5) à l'inégalité

$$\text{(XV)} \qquad L(\overline{c_j c_{j+1}}) \leqslant L[\overline{\psi(d_j)\psi(d_{j+1})}] + L[\overline{c_j \psi(d_j)}] + L[\overline{c_{j+1}\psi(d_{j+1})}] < < \frac{6}{5}\pi + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{45}{44} < \frac{3}{2}\pi.$$

D'autre part, on a d'après (VI), (VIII) et **4** (3) $L(\overline{c_j c_{j+1}}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n_j$ (où n_j sont des entiers non négatifs) ou bien $L(\overline{c_j c_{j+1}}) \geqslant \frac{3}{2}\pi$, suivant que $Q(\overline{c_j c_{j+1}}) = 0$ ou $Q(\overline{c_j c_{j+1}}) \geqslant 1$ *et* $j = 1, 2, \ldots, p$. Cependant la seconde alternative est impossible en vertu de l'inégalité (xv), qui entraîne par conséquent que $L(\overline{c_j c_{j+1}}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ et que $n_j = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, p$, c. à d. que $L(\overline{c_j c_{j+1}}) = \frac{\pi}{2}$.

L'egalité (x) en résulte selon (vi) [15].

Or, la définition de c_1 donne en vertu de (viii) l'égalité $c_1 = q_0$ et comme on a d'après **4** (3) et **4** (6) $L(\overline{q_0 q_r}) = 2\pi r$ pour toute pointe q_r de S_y, on en conclut en vertu de (x) que

(xvi) *aucun arc* $\overline{c_j c_{j+1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ *ne contient dans son intérieur aucune pointe de* S_y.

En désignant donc par b l'extrémité de l'arc $\overline{q_0 c_2} + \overline{c_2 c_3} + \ldots + \overline{c_p c_{p+1}}$ opposée à q_0, $\{c_j\}$ est une chaîne d'ordre p sur $\overline{q_0 b} \subset S_y$. En vertu de 3° on a évidemment $L(\overline{q_0 b}) \leqslant L(\overline{q_0 b_2}) + \operatorname{Max}_{j \leqslant p+1} L[\overline{c_j \psi(d_j)}]$ où $\overline{c_j \psi(d_j)} \subset S_y$, ce qui prouve en vertu de (ix) et **4** (5) que la condition (iv) est réalisée. D'autre part, on conclut de (viii) et (v) que $\operatorname{Sign}(\overline{c_j c_{j+1}}) = \operatorname{Sign}[\overline{\varphi(d_j)\varphi(d_{j+1})}]$ pour tout $j \leqslant p$, ce qui prouve que la chaîne $\{c_j\}$ est homologue à $\{\varphi(d_i)\}$. En désignant donc par $\{c_j'\}$ et $\{c_i''\}$ les chaînes alternatives s'obtenant respectivement des chaînes $\{\varphi(d_i)\}$ et $\{c_j\}$ (voir p. 194), l'homologie des chaînes $\{c_j'\}$ et $\{c_i''\}$ se trouve établie en vertu de (x). Par conséquent elles sont d'ordre égal et, finalement, en désignant leur ordre par t, on conclut de (vii) que la condition (iii) est aussi vérifiée.

7. Démonstration de la propriété fondamentale de la famille $\mathcal{S}$. *Etant donné un continu H et deux transformations f et g de H en spirales S_x et S_y de la famille $\mathcal{S}$, la relation*

[15]) Il est à noter que les calculs qui précèdent sont appelés à mettre en évidence (ce que nous verrons dans la suite) une différence *topologique* profonde entre les diverses spirales de la famille $\mathcal{S}$, sans quoi elles pourraient paraître très parentes, sinon homéomorphes. C'est que les invariants auxquels est due la différence en question et qui dépendent (j'y insiste) d'une façon critique des données numériques, se prêtent mal à une description par les notions topologiques usuelles, tandisque la „mise en chiffres" (à la manière des analystes) paraît fournir ici un moyen particulièrement naturel et efficace pour saisir ce genre d'invariants. On peut montrer p. ex. que les spirales de la famille $\mathcal{S}$ sont des continus irréductibles *incomparables* deux à deux par rapport aux transformations continues (cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 14, p. 235, N. Aronszajn, Fund. Mat. 19, p. 119 et ma Note de Fund. Math. 18, p. 118—137).

(i) $$\varrho[f(\xi), g(\xi)] < \frac{2\sqrt{2}}{1080 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{2}}{540 \cdot \pi} \quad \textit{pour} \quad \xi \in H$$

entraîne $x = y$.

Démonstration. Supposons par contre que $x \neq y$ et soit N le plus grand entier positif tel que

(ii) $$E(10^N \cdot x) = E(10^N \cdot y).$$

Pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et $\xi \in [1, 2]$ posons pour abréger

$$\eta(k, \xi) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} E(10^i \cdot \xi)$$

et soit U le plus petit entier positif tel que

(iii) $$\eta(U, x) > \omega_y(N+5).$$

Comme $x \in [1, 2]$ et $y \in [1, 2]$, il vient

(iv) $$U \geqslant N + 5.$$

Considérons l'arc partiel $\overline{q_0 q_{\omega_x(U)}}$ de S_x. En vertu de **3**, th. 1 (en y posant $\mathcal{H} = H$, $J = S_x$ et $P = \overline{q_0 q_{\omega_x(U)}}$), il existe un sous-continu H_1 de H tel que

(v) $$f(H_1) = \overline{q_0 q_{\omega_x(U)}}.$$

Comme $g(H) = S_y$, on a $g(H_1) \subset S_y$. Deux cas peuvent se présenter:

1° $g(H_1) \subset S_y - C$. Posons $g(H_1) = \overline{a_2 b_2}$. Les formules (i), (v) et (iv) réalisent alors les hypothèses de la proposition **6** (10), en y substituant H_1 à H, q_0 à a_1 et $\omega_x(U)$ à h. Il existent donc deux chaînes alternatives homologues $\{c_i'\}$ et $\{c_i''\}$ d'ordre t sur les arcs $\overline{q_0 q_{\omega_x(U)}}$ et $\overline{q_0 b} \subset S_y$ respectivement, telles que $c_{t+1}' = q_{\omega_x(U)}$, d'où

(vi) $$x(t+1) = U \geqslant N + 6.$$

Les coefficients de ces chaînes étant égaux d'après **6** (9), on tire de **6** (4) $\tau(\{c_i'\}) = \eta(U, x) = \tau(\{c_i''\}) = \eta[y(t+1) - 1, y] + (-1)^{y(t+1)-1} L(\overline{q_{\omega_y[y(t+1)-1]} c_{t+1}}) < \omega_y[y(t+1)]$, ce qui donne d'après (iii)

(vii) $$y(t+1) \geqslant N + 6.$$

En désignant respectivement par n' et n'' les plus petits indices tels que $c_{n'}' = q_{\omega_x[x(t+1)-1]}$ et $c_{n''}'' = q_{\omega_y(y(t+1)-1)}$, les relations (vi) et (vii) impliquent en vertu de **6** (7) que *la suite* $\{m_i\}$ où $m_i = \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_i' c_{i+1}'}) =$ $= \frac{1}{2\pi} L(\overline{c_i'' c_{i+1}''})$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, t$ *est un modèle de réduction à la fois des deux suites*:

$$E(10\cdot x),\ E(10^2\cdot x), \ldots,\ E(10^{x(t+1)-1}\cdot x),\ m_{n'},\ m_{n'+1}, \ldots,\ m_t,$$

$$E(10\cdot y),\ E(10^2\cdot y), \ldots,\ E(10^{y(t+1)-1}\cdot y),\ m_{n''},\ m_{n''+1}, \ldots,\ m_t.$$

Il en résulte selon (II) et le lemme de **5**, que l'on a $\mathrm{Min}\,[x(t+1), y(t+1)] \leqslant N+4$, contrairement à (VI) et (VII).

2° $g(H_1)\cdot C \neq 0$. Remarquons que l'on a selon (V)

(IX) $$f^{-1}(q_0)\cdot H_1 \neq 0$$

et que $g(H_1)$ n'est pas entièrement contenu dans C, car pour $x \in g[f^{-1}(q_0)]$ on a selon (I) $\varrho(q_0, x) < \frac{2\sqrt{2}}{1080\pi}$, d'où en vertu de **4** (7)

(X) $$\max_{x\in g[f^{-1}(q_0)]} L(\overline{q_0 x}) < \frac{\sqrt{2}}{1080} \quad \text{où} \quad \overline{q_0 x} \subset S_y$$

et par conséquent $g(H_1)(S_y - C) \neq 0$. En vertu de **4** (8) le continu $J = g(H_1)$ est donc un continu irréductible entre C et un point $a_1 \in S_y - C$; d'après (X) ce point vérifie l'inégalité

(XI) $$L(\overline{q_0 a_1}) < \frac{\sqrt{2}}{1080}.$$

Soit V le plus petit entier positif tel que

(XII) $$\eta(V, y) > \omega_x(U).$$

En vertu de **3**, th. 1 (en y substituant H_1 à $\mathscr{H}$, g à f et l'arc $\overline{a_1 q'_{\omega_y(V)}}$ de $S_y - C$ à $\overline{P}$), il existe un sous-continu H_2 de H_1 tel que

(XIII) $$g(H_2) = \overline{a_1 q_{\omega_y(V)}},$$

d'où $f(H_2) \subset \overline{q_0 q_{\omega_x(U)}}$ selon (V). En posant donc $\overline{a_2 b_2} = f(H_2)$, on conclut de (XIII), (I) et (XI) que les hypothèses de la proposition **6** (10) (en y substituant g à f, f à g, x à y, y à x, H_2 à H et $\omega_y(V)$ à h) sont réalisées. Il existe donc deux chaînes alternatives homologues $\{c_i'\}$ sur $\overline{q_0 q_{\omega_y(V)}} \subset S_y$ et $\{c_i''\}$ sur un arc $\overline{q_0 b} \subset S_x - C$, d'ordre t et

telles que

(XIV) $c'_{t+1} = q_{\omega_y(V)}$ *et* $L(\overline{q_0 b}) \leqslant L(\overline{q_0 b_2}) + \pi \leqslant L(\overline{q_0 q_{\omega_x(U)}}) + \pi$.

Ces chaînes ayant d'après **6** (9) les mêmes coefficients, on conclut de **6** (4), **4** (9) et l'égalité (XIV) que l'on a $\tau[\{c_i'\}] = \eta(V, y) = \tau[\{c_i''\}]$.

Selon **4** (9), **6** (6) et l'inégalité (XIV) on a donc

$$\eta(V, y) \leqslant \frac{1}{2\pi} L(\overline{q_0 b_2}) \leqslant \frac{1}{2\pi} L(\overline{q_0 q_{\omega_x(U)}}) + \frac{1}{2} \leqslant \omega_x(U) + \frac{1}{2},$$

ce qui donne, $\eta(V, y)$ et $\omega_x(U)$ étant des entiers, $\eta(V, y) \leqslant \omega_x(U)$, contrairement à (XII).

Dans les deux cas, la supposition que l'on a $x \neq y$ implique donc une contradiction.