sein. Aus diesen Ungleichungen und den damit übereinstimmenden für den Fall $x < \xi$ folgt, daß die vier extremen Derivierten von $U_2^0(a, x)$ in ξ zwischen den Ableitungen von $\psi^0(x)$ und $\varphi^0(x)$ liegen. Also wird nach dem Denjoy-Saksschen Satze [39]) eine endliche Ableitung von $U_2^0(a, x)$ existieren in fast allen Punkten von K und von (a, b).

Aus den Definitionen C^0, D^0, C_1 und D_1 folgt, daß $f(x)$ auch integrierbar ist nach Definition 8 und der damit aequivalenten Definition 7. Daraus und aus der Existenz der Ableitung von $U_2^0(a, x)$ in fast allen Punkten von (a, b) folgt, daß $U_2^0(a, x)$ auch ein β_1^0-Integral (nach Def. 11) ist. —

Nennen wir die nach den Definitionen 11 und 12 gebildete Integrale *β^0-Integrale*, so folgt aus der Existenz einer endlichen Ableitung in fast allen Punkten von (a, b) daß das β^0-Integral $U^0(a, x)$ in einem maßgleichen Kerne von (a, b) stetig sein muß.

§ 14. Zusammenfassung. In (a, b) ist das α^*-Integral (§ 5) stetig in allen Punkten, das α-Integral (§§ 1—3) bis auf die Punkte einer höchstens abzählbar unendlichen Menge, das β^0-Integral (§ 13) bis auf eine Menge vom Maße Null, das abgeänderte Burkillsche Integral (§ 10) und das β-Integral (§§ 6—9) bis auf Mengen, deren Maß beliebig dicht zu $b - a$ nähern kann. Bei allen Integralen liegen die Stetigkeitspunkte überall dicht in (a, b).

Der Umfang der Definitionen ist ganz verschieden; man hat:

1° α^*-Integration $\subset$ α-Int $\subset$ β^0-Int. $\subset$ β-Int.; und

2° α^*-Integration $\subset$ α-Int. $\subset$ (abgeänderte) Burkill-Int. $\subseteq$ β-Int.

Daneben ist:

α^*-Integration $\equiv$ spezielle Denjoy-Int. $\equiv$ Perron-Int.;
Denjoy-Khintchine-Int. $\subset$ β^0-Int.; allgemeine Denjoy-Int. $\subset$ β-Int. [41]).

[41]) Zusatz bei der Korrektur. Wenn man in den Definitionen der §§ 6—9 überall statt „approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$" liest „in jedem Punkte x von (a, b) stetig auf einer Menge E_x mit unterer innerer Dichte $\geqq \tau$ in diesem Punkte ($\tau > 1/2$ und unveränderlich)" und in Def. 6 die Mengen E_α, E_β in α bzw. β untere rechte bzw. untere linke Dichte $\geqq \tau$ haben (wieder für dasselbe τ), so bleiben die in dieser Weise verallgemeinerten Definitionen 6—10 einander gleichwertig. Sie umfassen dann eine neuerdings von S. Izumi in den Proc. Imp. Ac. Japan **9** (1933), S. 570—573 mitgeteilte Integraldefinition; zum Beweise hat man nur die Betrachtungen der Seiten 150—153 in leicht ersichtlicher Weise abzuändern.

22. VIII. 1933.

Über die T- und N-Bedingungen und die approximativ stetigen Denjoy-Perron Integrale.

Von

J. Ridder (Groningen).

In einer vorigen Arbeit [1]) (Ridder 5) haben wir u. a. zwei Integralbegriffe, das α- und das β-Integral, behandelt, welche zu betrachten sind als Verallgemeinerungen des speziellen bzw. des allgemeinen Denjoyschen Integrals; wir untersuchten daselbst ihre gegenseitigen Verhältnisse und ihre Verhältnisse zu anderen Integralbegriffen und gaben weite Klassen von Funktionen an, welche Integrale in dem einen oder dem anderen Sinne sind. Außerdem hatten wir schon früher [2]) die elementarsten Eigenschaften jener Integrale besprochen. Es ist unsere Absicht in den folgenden Seiten einige weniger elementaren Eigenschaften der beiden Denjoyschen Integrale

[1]) Der Kürze halber fügen wir die hauptsächlichsten der in den folgenden Seiten zitierten Arbeiten hier zusammen:

J. Ridder: 1. *Über den Perronschen Integralbegriff und seine Beziehung zu den R_-, L_-, und D_- Integralen*, Math. Ztschr. **34** (1931), 234—269.
2. *Der Perronsche Integralbegriff*, Math. Ztschr. **37** (1933), 161—169.
3. *Über approximativ stetige Denjoy-Integrale*, Fund. Math. **21** (1933), 1—10.
4. *Über das allgemeine Denjoysche Integral*, Fund. Math. **21** (1933), 11—19.
5. *Über die gegenseitigen Beziehungen verschiedener approximativ stetiger Denjoy-Perron Integrale.*

S. Saks: 1. *Sur les fonctions continues.* Fund. Math. **17** (1931), 124—151.
2. *Théorie de l'intégralle* (monographie, Warszawa 1933).

[2]) Siehe Ridder, **2** und **3**.

in sinngemäßer Weise auf die α- und β-Integrale zu übertragen; in dem kurzen Abschnitt I findet man außerdem einige Sätze über Lebesguesche Integrale.

I Sätze über Lebesguesche Integrale.

§ 1. **Definition 1.** Eine Funktion $F(x)$ genügt in einem Intervall (a, b) der Bedingung (T_1), oder der Bedingung (T_2) (von Banach), wenn die Menge der Funktionswerte, welche in diesem Intervall unendlich oft, bzw. nicht-abzählbar unendlich oft angenommen werden, das Maß Null hat.

Definition 2. Eine Funktion $F(x)$ genügt in (a, b) der Bedingung $(N^{+\infty})$, oder der Bedindung $(N^{-\infty})$ (von Saks), wenn die Menge der Funktionswerte in den Punkten von (a, b) wo die Ableitung existiert und $+\infty$, bzw. $-\infty$, wird, das Maß Null hat.

Definition 3. $F(x)$ hat in (a, b) die Eigenschaft (N^{∞}), wenn sie dort gleichzeitig den Bedingungen $(N^{+\infty})$ und $(N^{-\infty})$ genügt.

Definition 4. Eine in (a, b) definierte Funktion $F(x)$ ist *in* (a, b) *stetig nach Darboux*, wenn sie dort endlich ist und für $a \leqq c < d \leqq b$ jeden zwischen $F(c)$ und $F(d)$ liegenden Zahlenwert in einem inneren Punkte von (c, d) angenommen wird.

Lemma 1. *Jede in (a, b) nach Darboux stetige Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft (T_1) ist in (a, b) auch stetig in gewöhnlichem Sinne.*

Beweis. Aus der Definition 4 folgt, daß es in der unmittelbaren Nähe eines Unstetigkeitspunktes ξ von $F(x)$ zu jedem y-Werte eines gewissen Intervalls (liegend zwischen oberem und unterem Limes von $F(x)$ in ξ) unendlich viele Punkte (x) geben würde, in deren jedem $F(x)$ diesen y-Wert annähme; $F(x)$ hätte somit die Eigenschaft (T_1) nicht. Die Menge der Unstetigkeitspunkte muß darum leer sein.

Satz I. *Für die in (a, b) nach Darboux stetigen Funktionen mit der Eigenschaft (T_1) sind die Bedingungen (N) (von Lusin) und (N^{∞}) aequivalent.*

Beweis. Da für die stetigen Funktionen mit der Eigenschaft (T_1) die Bedingungen (N) und (N^{∞}) aequivalent sind,[3] folgt der Satz unmittelbar aus Lemma 1.

[3]) Siehe Saks, **1**, 131 (Corollaire).

Korollar. *Damit eine in (a, b) nach Darboux stetige Funktion von beschränkter Variation*[4]) *totalstetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie der Bedingung (N^{∞}) genüge.*

Denn jede Funktion von beschränkter Variation hat die Eigenschaft (T_1)[5]). Nach Satz I genügt sie somit der Bedingung (N) und daraus folgt dann nach Denjoy ihre Totalstetigkeit.

Definition A_0. $f(x)$ sei definiert in (a, b). Eine *zu $f(x)$ im Intervall (a, b) adjungierte Majorante $\psi_0(x)$* hat die Eigenschaften: a) $\psi_0(a) = 0$; b) $\psi_0(x)$ ist für $a \leqq x \leqq b$ stetig nach Darboux und unterhalb totalstetig[6]); c) die beiden unteren Derivierten von $\psi_0(x)$ sind fast überall in $(a, b) \geqq f(x)$.

Satz II. *Damit eine für $a \leqq x \leqq b$ nach Darboux stetige Funktion $F(x)$ totalstetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie den Bedingungen (T_1) und (N^{∞}) genügt und daß sich in (a, b) eine eindeutige Funktion $f(x)$ finden läßt, welche fast überall mit $F'(x)$ zusammenfällt wo diese existiert und zu der in (a, b) eine Majorante $\psi_0(x)$ adjungiert ist.*

Da $F(x)$, nach Lemma 1, auch stetig ist in gewöhnlichem Sinne, folgt der Satz aus Ridder **4**, 13 (Satz I).

Durch Betrachtung von $-F(x)$ folgt aus diesem Satze das

Korollar. *Jede Funktion $F(x)$, welche in (a, b) stetig ist nach Darboux und den Bedingungen (T_1) und (N^{∞}) genügt, während daneben $F'(x)$ in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge nicht-negativ ist, wird in (a, b) monoton nicht-abnehmend (und totalstetig) sein.*

II. Eigenschaften beim α-Integral.

§ 2. **Definition 5.** E sei eine Teilmenge des abgeschlossenen Intervalls (a, b). Eine in den Punkten von (a, b) definierte Funktion $F(x)$ heiße *von beschränkter Variation** (abgekürzt: *BV**) *auf E*, wenn sich eine positive Zahl N finden läßt, derart daß für jedes

[4]) Es ist sofort klar, daß eine derartige Funktion auch stetig ist in gewöhnlichem Sinne.

[5]) Siehe z. B. Saks, **2**, 179.

[6]) Siehe Ridder, **1**, 244 (Def. 9) oder **3**, 3 (Fußn. 9). — Da jede unterhalb totalstetige Funktion nur Unstetigkeiten erster Art haben kann, muß jede Majorante auch stetig sein in gewöhnlichem Sinne.

System von nicht übereinander greifenden Intervallen (a_k, b_k), deren Endpunkte zu E gehören sollen,

$$\sum_{(k)} \Omega_k \leqq N$$

ist; hierbei deutet Ω_k die Oszillation von $F(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a_k, b_k) an.

Definition 6. Eine für $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $F(x)$ ist *in* (a, b) *von beschränkter Variation* im verallgemeinerten Sinne* (abgekürzt: BVV^*), wenn (a, b) sich, ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf denen $F(x)$ von beschränkter Variation* sei.

Definition 7. $F(x)$ sei *im abgeschlossenen Intervall* (a, b) *stetig im verallgemeinerten Sinne* (abgekürzt: SV), wenn (a, b) sich, ausgenommen in abzählbar vielen Punkten, überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf deren jeder stetig sei in bezug auf diese Menge.

Satz III. *Damit eine approximativ stetig Funktion BVV^* ein unbestimmtes α-Integral* [7]) *sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie der Bedingung* (N^∞) *genügt.*

Beweis. Wenn $F(x)$ eine approximativ stetige Funktion, BVV^* in (a, b), darstellt, so gibt es abzählbar viele perfekte Teilmengen (E_k) von (a, b), auf deren jeder sie BV^* ist. Es sei $E_\varkappa$ eine dieser Mengen; da die Funktion $F_\varkappa(x)$, welche auf $E_\varkappa$ mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu $E_\varkappa$ komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b), von beschränkter Variation ist in (a, b), kann $F(x)$ auf $E_\varkappa$ nur Unstetigkeiten erster Art in bezug auf $E_\varkappa$ haben. Wenn somit $F(x)$ im Punkte ξ von $E_\varkappa$ eine derartige Unstetigkeit aufweist, wird entweder der linke oder der rechte Grenzwert von $F(x)$ in bezug auf $E_\varkappa$ (oder beide) von $F(\xi)$ verschieden sein. Es sei z. B.

$$\Big|\lim_{\substack{x\to\xi;\\ x>\xi \text{ auf } E_\varkappa}} F(x) - F(\xi)\Big| = \varepsilon \neq 0.$$

Da die Oszillationen von $F(x)$ in den zu $E_\varkappa$ komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b) eine konvergente Reihe bilden,

[7]) Siehe die Definitionen 1—4 in Ridder, **5**.

gibt es eine Umgebung $\mathfrak{A}$ von ξ, derart daß die Oszillationen, welche zu den (ganz oder teilweise) in $\mathfrak{A}$ liegenden, zu $E_\varkappa$ komplementären Intervallen gehören, eine konvergente Reihe bilden, deren Summe kleiner als $\varepsilon/4$ ist. Es wird nun immer möglich sein die Umgebung $\mathfrak{A}$ derartig einzuschränken, daß für alle $x' > \xi$ der (abgeänderten) Umgebung gilt:

$$\Big|\lim_{\substack{x\to\xi;\\ x>\xi \text{ auf } E_\varkappa}} F(x) - F(x')\Big| < \varepsilon/2.$$

Da jedoch $F(x)$ in ξ approximativ stetig ist, gelangten wir zu einem Widerspruch. Somit muß $F(x)$ stetig sein auf $E_\varkappa$; sie ist dadurch in (a, b) stetig im verallgemeinerten Sinne

Die Menge der Werte von $F_\varkappa(x)$ in denjenigen Punkten (x) von $E_\varkappa$, in welchen $F'_\varkappa(x)$ existiert und entweder $+\infty$ oder $-\infty$ ist, während daneben $F'(x)$ nicht existiert, ist vom Maße Null [8]). Da außerdem $F(x)$ die Eigenschaft (N^∞) hat, wird auch $F_\varkappa(x)$ diese Eigenschaft besitzen. Daneben ist $F_\varkappa(x)$ in (a, b) stetig und von beschränkter Variation; sie muß dadurch totalstetig sein. Somit ist $F(x)$ in (a, b) totalstetig* im verallgemeinerte Sinne [9]); da sie außerdem approximativ stetig ist, ist $F(x)$ ein unbestimmtes α-Integral [10]).

Die Bedingung (N^∞) ist hinreichend.

Sie ist auch notwendig; denn wenn $F(x)$ ein α-Integral ist, wird jedes $F_k(x)$ (s. oben) totalstetig sein in (a, b) und somit die Eigenschaft (N^∞) haben; daraus folgt diese Eigenschaft auch für $F(x)$.

§ 3. **Definition 8.** *Obere Oszillation* $\Omega^+(F; a, b)$ der Funktion $F(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) sei die obere Schranke der Werte von $F(y) - F(x)$, wobei $a \leqq x \leqq y \leqq b$.

Definition 9. Für die in den Punkten einer Menge E definierte Funktion $F(x)$ deute $F(E)$ die Menge der Funktionswerte von $F(x)$ auf E an.

Lemma 2. *$F(x)$ sei endlich für $a \leqq x \leqq b$ und für die komplementären, abgeschlossenen Intervallen $\{i_k\}$ einer abgeschlossenen Teilmenge E von (a, b) sei:*

$$\sum_{(k)} \Omega^+(F; i_k) < +\infty.$$

[8]) Dies folgt aus Saks, **1**, 132 (Th. 2).
[9]) Siehe Ridder, **1**, 251 u. 252 (Def. 19*).
[10]) Siehe Ridder, **5** (Def. 2).

Wenn dann R und R_1 die Teilmengen von E andeuten, in deren Punkten $F(x)$ bzw. die Funktion $F_1(x)$, welche auf E und in a und b mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu E komplementären abgeschlossenen Intervallen von (a, b), eine Ableitung haben, so wird

$$m(R_1 - R) = m\{F(R_1 - R)\} = 0$$

sein, während fast überall auf R

$$F'(x) = F_1'(x)$$

ist [11]).

Lemma 3. *Eine im abgeschlossenen Intervall (a, b) endlichwertige Funktion $F(x)$ sei in den Punkten einer perfekten Teilmenge E stetig in bezug auf E.*

*Wenn es dann: 1° eine in (a, b) beschränkte, auf E unterhalb totalstetige** [12]) *Funktion $M(x)$ gibt mit der Eigenschaft, daß in fast jedem Punkte von E, in welchem $F'(x)$ existiert,*

$$F'(x) \leqq M'(x)$$

ist; daneben:

2° $F(x)$ in (a, b) die Eigenschaften (T_2) und $(N^{+\infty})$ hat; und:

3° für jedes Intervall (α, β), das keine Punkte von E im Innern enthält,

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqq M(\beta) - M(\alpha) \tag{1}$$

ist;

so wird $F(x)$ von beschränkter Variation* sein auf E und es gilt (1) *für jedes Teilintervall (α, β) von (a, b).*

Beweis. Es seien $F_1(x)$ und $M_1(x)$ die Funktionen, welche in den Punkten von E und in a und b mit $F(x)$ bzw. mit $M(x)$ zusammenfallen und sich linear ändern in den zu E komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b).

Da $M(x)$ auf E unterhalb totalstetig* ist, läßt sich zu willkürlich positivem ε eine natürliche Zahl K finden, derart daß für die zu E komplementären, abgeschlossenen Intervalle $\{i_k = (a_k, b_k)\}$:

[11]) Siehe Saks, **1**, 138 (Lemme 1); die oben angenommene Endlichkeit von $F(x)$, statt Stetigkeit bei Saks, l. c., läßt den Beweis ungeändert.

[12]) Daraus folgt, daß $M(x)$ in fast allen Punkten von E eine Ableitung hat. Siehe Ridder, **1**, 251—254 (Def. 16 und Satz XVIII nebst Beweis); auch **3**, 6 (Fußn. 13).

$$\sum_{k=K}^{\infty} \Omega[M(x); i_k] \leqq \sum_{k=K}^{\infty} |m_k - M(a_k)| + \sum_{k=K}^{\infty} |M(a_k) - M(b_k)| +$$
$$+ \sum_{k=K}^{\infty} |M(b_k) - m_k'| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \text{ [13])}$$

ist; hierbei ist m_k die untere, m_k' die obere Schranke von $F(x)$ im abgeschlossenen Intervall i_k. $M(x)$ ist außerdem beschränkt in (a, b); somit wird $\sum_{k=1}^{\infty} \Omega[M(x); i_k]$ eine konvergente Reihe sein. [Daraus und aus der Eigenschaft von $M_1(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation [13]) zu sein, folgt daß $M(x)$ auf E von beschränkter Variation* ist.

Aus 3° folgt dadurch:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega^{+}[F(x); i_k] \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \Omega[M(x); i_k] < +\infty. \tag{2}$$

Wenn R und R_1 die Teilmengen von E sind, in deren Punkten $F(x)$ bzw. $F_1(x)$ eine Ableitung haben, so wird nach Lemma 2 und Bedingung 1°:

$$m(R_1 - R) = m\{F(R_1 - R)\} = 0$$

und fast überall auf R:

$$F_1(x) = F'(x) \leqq M'(x) = M_1'(x) \tag{3}$$

sein. Aus $m\{F(R_1 - R)\} = 0$ und 2° folgt, daß auch $F_1(x)$ in (a, b) die Eigenschaften $(N^{+\infty})$ und (T_2) hat. Da $M_1(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation ist, folgt aus (2) und (3), daß $F_1'(x)$ integrierbar (L) ist über die Teilmenge von (a, b), auf welcher sie positiv ist. $F_1(x)$ genügt den Bedingungen eines Satzes von Saks [14]) und ist dadurch in (a, b) von beschränkter Variation mit nicht-zunehmendem singulärem Bestandteil. Es muß auch $m(E) = m(R_1) = m(R)$ sein.

Da außerdem der singuläre Bestandteil von $M_1(x)$ nicht-abnehmend ist, wird für $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ immer

[13]) Daß es möglich ist K derartig zu wählen, daß $\sum_{k=K}^{\infty} |M(a_k) - M(b_k)| < \varepsilon$ ist, folgt daraus daß die oben definierte Funktion $M_1(x)$ in (a, b) unterhalb totalstetig und somit auch von beschränkter Variation ist mit nicht-zunehmendem singulärem Bestandteil. Siehe W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2) **9** (1910), 294—297.

[14]) Siehe Saks, **1**, 135 (Th. 6).

$$F_1(\beta) - F_1(\alpha) \leqq \int_\alpha^\beta F_1'(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta M_1'(x)\,dx \leqq M_1(\beta) - M_1(\alpha)$$

sein, und somit auch:

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqq M(\beta) - M(\alpha).$$

Für die Oszillationen von $F(x)$ in den zu E komplementären Intervallen (i_k) hat man:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega[F(x); i_k] \leqq \sum_{k=1}^{\infty} [\mu_k' - F(a_k)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |F_1(a_k) - F_1(b_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - \mu_k],$$

wobei μ_k die untere und μ_k' die obere Schranke von $F(x)$ im abgeschlossenen Intervall i_k sein soll. Die Endlichkeit der ersten und der dritten Summe hinter dem Ungleichheitszeichen folgt aus (2), die der zweiten Summe daraus daß $F_1(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation ist. $F(x)$ ist somit von beschränkter Variation* auf E.

§ 4. **Definition** A_1 [15]. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Dann hat eine *zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte (α)-Majorante $\psi_1(x)$* die Eigenschaften: 1^0 $\psi_1(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2^0 $\psi_1(a) = 0$; 3^0 es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß $\psi_1(x)$ unterhalb totalstetig* ist auf jedem H_k; 4^0 die [fast überall in (a, b) existierende und endliche] Ableitung von $\psi_1(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\geqq f(x)$.

Lemma *A. Eine Funktion $F(x)$, welche in (a, b):*

1^0 *approximativ stetig und SV ist;*

2^0 *die Eigenschaften (T_2) und $(N^{+\infty})$ hat;*

und zu der:

3^0 *sich eine in (a, b) eindeutige Funktion $f(x)$ finden läßt, gleich der Ableitung von $F(x)$ fast überall wo diese existiert und im Besitze einer α-Majorante $\psi_1(x)$ (im Sinne der Definition A_1) in (a, b);*

ist in (a, b) BVV.*

[15]) Siehe Ridder, 5.

Außerdem wird für $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$:

(4) $$F(\beta) - F(\alpha) \leqq \psi_1(\beta) - \psi_1(\alpha)$$

sein.

Beweis. Wenn (4) nicht für jedes Punktepaar α, β von (a, b) gültig wäre, so bildeten die Punkte, in deren jeder Umgebung Punkte α, β lägen mit

$$F(\beta) - F(\alpha) > \psi_1(\beta) - \psi_1(\alpha) \quad \text{und} \quad \alpha < \beta$$

eine nicht-leere, abgeschlossene Menge K. Da K wegen der approximativen Stetigkeit von $F(x)$ und $\psi_1(x)$ keinen isolierten Punkt enthalten kann, wäre sie perfekt.

In den zu K komplementären Intervallen würde zwischen den Endpunkten eines jeden Teilintervalles (4) gelten müssen. Es existierte ein Stück $\tilde\omega$ von K, auf dem überall dicht lägen eine der perfekten Mengen, auf welchen $F(x)$ stetig ist, und eine perfekte Menge, auf welcher $\psi_1(x)$ unterhalb totalstetig* ist. In einem Punkte ξ von $\tilde\omega$, der auf beiden Seiten Grenzpunkt von $\tilde\omega$ ist, betrachten wir den unteren und den oberen Limes von $\psi_1(x)$ in bezug auf (a, b); in einem Punkte ξ_1 von $\tilde\omega$, der nur linker [oder nur rechter] Grenzpunkt von $\tilde\omega$ ist, betrachten wir den unteren und den oberen Limes von $\psi_1(x)$ in bezug auf die Punkte von (a, b), welche $\leqq \xi_1$ [bzw. $\geqq \xi_1$] sind. Die auf diese Weise auf $\tilde\omega$ definierten unteren und oberen Limesfunktionen könnten nur in endlich vielen Punkten von $\tilde\omega$ unendlich sein. Sonst hätten diese Punkte mindestens einen (zu $\tilde\omega$ gehörenden) Verdichtungspunkt X und es wäre möglich bei willkürlich positivem A eine Folge von Intervallen (α_k, β_k) zu konstruieren, deren Endpunkte zu $\tilde\omega$ gehörten und deren jedes einen Punkt γ_k enthielte, derart daß entweder $\psi_1(\gamma_k) - \psi_1(\alpha_k)$ oder $\psi_1(\beta_k) - \psi_1(\gamma_k)$ (oder beide) $< -A$ wäre. Die Majorante $\psi_1(x)$ könnte somit nicht unterhalb totalstetig* sein auf $\tilde\omega$.

Es müßte also ein Stück $\tilde\omega_1$ (mit den Endpunkten c_1 und d_1) von $\tilde\omega$ geben, derart daß $\psi_1(x)$ beschränkt wäre in dem Intervall (c_1, d_1). Anwendung des Lemmas 3 in diesem Intervall führte zu einem Widerspruch.

Auf dieselbe Weise wie zu der Menge K läßt sich nun zu jeder perfekten Teilmenge E von (a, b) ein Stück $\tilde\omega_1$ finden, derart daß die Bedingungen des Lemmas 3 auf $\tilde\omega_1$ für die Funktionen $F(x)$, $\psi_1(x)$ erfüllt sind. Daraus folgt dann, daß $F(x)$ BV^* ist auf $\tilde\omega_1$.

Mittels transfiniter Induktion zeigt man nun leicht, daß $F(x)$ in (a, b) BVV^* ist.

Definition A_2 [15]). $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Eine *zu* $f(x)$ *in* (a, b) *adjuugierte* (α)*-Majorante* $\psi_2(x)$ hat die Eigenschaften: 1^0 sie ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2^0 $\psi_2(a) = 0$; 3^0 die untere Derivierte $\underline{D}\,\psi_2(x)$ ist $\geqq f(x)$ und $\neq -\infty$ in allen Punkten von (a, b), abzählbar viele angenommen.

Da die Majoranten $\{\psi_2(x)\}$ eine Teilklasse der $\{\psi_1(x)\}$ bilden, hat man:

(**Lemma** A^*). *Das Lemma A bleibt gültig, wenn man anstatt einer* α*-Majorante* $\psi_1(x)$ *nach Definitionen* A_1 *eine* α*-Majorante* $\psi_2(x)$ *nach Definition* A_2 *benutzt.*

Satz IV. *Damit eine für* $a \leqq x \leqq b$ *approximativ stetige Funktion* $F(x)$ *ein unbestimmtes* α*-Integral sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie in* (a, b) SV *ist und den Bedingungen* (T_2) *und* (N^∞) *genügt und daß es in* (a, b) *eine eindeutige Funktion gibt, welche fast überall mit der Ableitung von* $F(x)$ *zusammenfällt wo diese existiert und zu der in* (a, b) *eine* α*-Majorante* $\psi_1(x)$ *nach Def.* A_1 [oder eine α-Majorante $\psi_2(x)$ nach Def. A_2] *adjungiert ist.*

Beweis. Jedes unbestimmte α-Integral $F(x)$ ist totalstetig auf einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen (E_k), welche (a, b), ausgenommen in höchstens abzählbar unendlich vielen Punkten, überdecken [10]); auf jeder Menge E_k, und dadurch ebenfalls in (a, b), hat $F(x)$ die Eigenschaft (N); sie wird somit in (a, b) auch die Eigenschaften (T_2) [16]) und (N^∞) haben. Weiter ist $F(x)$ in (a, b) SV. Außerdem hat sie fast überall eine Ableitung. Jede Funktion, welche mit der Ableitung zusammenfällt wo diese existiert, hat sowohl eine α-Majorante im Sinne der Definition A_1 wie auch eine α-Majorante im Sinne der Definition A_2 [17]).

Die Bedingungen sind notwendig.

Wenn, umgekehrt, $F(x)$ die genannten Bedingungen erfüllt, so ist sie nach Lemma $A\,[A^*]\,BVV^*$ in (a, b). Nach Satz III ist sie nun auch ein unbestimmtes α-Integral [18]).

[16]) Siehe z. B. Saks, **2**, 183, 184.

[17]) Siehe Ridder, **5** (Satz II und die Def. 3, 4).

[18]) Es läßt sich zeigen, *daß die in* (a, b) *approximativ stetigen Funktionen* BVV^* *und mit der Eigenschaft* $(N^{-\infty})$ *identisch sind mit der Klasse der approximativ stetigen Funktionen, welche in* (a, b) SV *sind und daneben die Eigen-*

§ 5. **Lemma 4.** $F(x)$ *sei in* (a, b) *approximativ stetig und* SV. *Wenn es dann eine über* (a, b) α*-integrierbare Funktion* $g(x)$ *gibt mit der Eigenschaft daß für die untere rechte Derivierte,* $\underline{D}_r F(x)$, *von* $F(x)$ *in den Punkten von* (a, b), *vielleicht abzählbar viele ausgenommen, gilt:*

$$\underline{D}_r\, F(x) \leqq g(x); \quad \text{und} \quad \underline{D}_r\, F(x) \neq +\infty,$$

so wird für $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$:

$$F(x_2) - F(x_1) \leqq {}_{(\alpha)}\!\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx \tag{5}$$

sein; hierbei deutet ${}_{(\alpha)}\!\int$ *das* α*-Integral an.*

Beweis. Es sei $\psi_2(x)$ eine in (a, b) zu $g(x)$ adjungierte α-Majorante gemäß Definition A_2; nach Fußn. 18 wird sie in (a, b) SV sein. Die Menge K der Punkte, in deren jeder Umgebung Punktepaare (x_1, x_2) von (a, b) liegen mit

$$F(x_2) - F(x_1) > \psi_2(x_2) - \psi_2(x_1) \quad \text{und} \quad x_1 < x_2 \tag{6}$$

ist abgeschlossen und kann, wegen der approximativen Stetigkeit von $F(x)$ und von $\psi_2(x)$, keinen isolierten Punkt enthalten; sie ist somit perfekt. Zwischen je zwei Punkten $x_1 < x_2$ eines zu K komplementären Intervalls wird

$$F(x_2) - F(x_1) \leqq \psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)$$

sein. Wäre K nicht leer, so existierte ein Stück $\tilde{\omega}$ von K, auf dem überall dicht liegen würden eine der perfekten Mengen, auf wel-

schaft haben, daß es zu jeder derartigen Funktion eine Überdeckung von (a, b) *durch eine abzählbare Menge M und abzählbar viele perfekte Mengen* (E_j) *gibt, derart daß die Funktion auf jeder Menge* E_j UT^* *ist.* (Der Beweis verläuft wie der des Lemmas C in Ridder, **4**, 18 u. 19; man siehe dabei auch die oben im Texte gegebenen Beweise von Satz III und Lemma 3). Da jedes α-Integral über (a, x) in (a, b) SV ist und die Differenz zwischen ihr und einer willkürlich gewählten α-Majorante, nach Definition A_1, wie auch die Differenz zwischen ihr und einer willkürlich gewählten α-Minorante, nach Definition B_1 in Ridder **5**, in (a, b) monoton und approximativ stetig, somit auch stetig ist, so werden derartige Majoranten und Minoranten jedenfalls dann in (a, b) SV sein, wenn sie zu einer über (a, b) α-integrierbaren Funktion gehören. Daraus folgt, daß der Umfang der Integraldefinition 3, loc. cit., sich nicht ändert, wenn man in den Definitionen A_1 und B_1 die Bedingungen 3^0 ändert in: $\psi_1(x)$ bzw. $\varphi_1(x)$ sollen BVV^* sein und die Eigenschaft $(N^{-\infty})$ bzw. $(N^{+\infty})$ haben.

chen $F(x)$ und eine der perfekten Mengen, auf welchen $\psi_2(x)$ stetig ist.

Aus den Bedingungen des Lemmas und aus der Definition A_2 geht hervor, daß in den Punkten von (a, b), abzählbar viele ausgenommen,

$$(7) \qquad \underline{D}_r [F(x) - F(a) - \psi_2(x)] \leqq \underline{D}_r F(x) - \underline{D}_r \psi_2(x) \leqq 0$$

ist. Die Funktion $\omega(x)$, welche in den Punkten von $\tilde{\omega}$ gleich $F(x) - F(a) - \psi_2(x)$ wäre und sich linear änderte in den zu $\tilde{\omega}$ komplementären abgeschlossenen Intervallen von (a, b), wäre in diesen Intervallen nicht-zunehmend. Daraus und aus (7) folgte für alle Punkte von (a, b), eine abzählbare Menge ausgenommen:

$$\underline{D}_r \, \omega(x) \leqq 0.$$

Da $\omega(x)$ in (a, b) außerdem stetig ist, müßte sie daselbst nicht-zunehmend sein. Aber dadurch hätte man zwischen je zwei Punkten $x_1 < x_2$ von $\tilde{\omega}$:

$$\omega(x_2) - \omega(x_1) = [F(x_2) - F(x_1)] - [\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)] \leqq 0$$

im Widerspruch mit (6). K ist somit leer. Da $\psi_2(x)$ willkürlich gewählt war, folgt daraus (5).

Satz V. *Wenn die in (a, b) approximativ stetige Funkteon $F(x)$ daneben in (a, b) SV ist und wenn es eine über (a, b) α-integrierbare Funktion $g(x)$ gibt, welche in jedem Punkte von (a, b), eine abzählbare Menge ausgenommen, endlich ist und gleich einer mittleren oder extremen rechten Derivierten von $F(x)$, so wird*

$$F(b) - F(a) = {}_{(\alpha)}\!\!\int_a^b g(x)\, dx$$

sein.

Ist $g(x)$ sogar integrierbar nach Lebesgue, so wird $F(x)$ in (a, b) totalstetig sein [19]).

[19]) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Sätzen von Lebesgue: Leçons sur l'intégration, 2. Ed. (1928), 176 (note) und von Saks: **2**, 139, 140 (Th. 19); man vergleiche auch Ridder, Nieuw Archief (Amsterdam) (2) **17** (1932), 171 u. 172 (Satz III), wo die konstruktive Definition des allgemeinen Denjoyschen Integrals angewandt wird.

Der Beweis folgt durch Anwendung des Lemmas 4 auf $F(x)$, $g(x)$ und auf $-F(x)$, $-g(x)$.

Korollar. *Wenn die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ in (a, b) approximativ stetig und SV sind, und ihre oberen rechten Derivierten sind in jedem Punkte von (a, b), abzählbar viele ausgenommen, endlich und in fast jedem Punkte einander gleich, so können $F(x)$ und $G(x)$ sich in (a, b) nur durch eine additive Konstante voneinander unterscheiden.*

Zum Beweise wende man Lemma 4 auf $F(x) - G(x)$ und $G(x) - F(x)$ an.

III. Eigenschaften beim β-Integral.

§ 6. **Definition 10.** Eine Funktion $F(x)$ hat in (a, b) die Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$ *(die Eigenschaft $N^{+\infty}$ im geänderten Sinne)*, wenn (a, b) sich, ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_j), derartig, daß: 1⁰ zu jedem P_j die Menge der Funktionswerte in denjenigen Punkten von P_j, wo $F(x)$ „in bezug auf dieses P_j" eine positiv unendliche Ableitung hat, eine Nullmenge (auf der y-Achse) ist, 2⁰ auf jeder perfekten Teilmenge T_j eines P_j $F(x)$ der analogen Bedingung genügt.

Definition 11. Die Funktion $F(x)$ hat in (a, b) die Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$, wenn $-F(x)$ die Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$ hat.

Definition 12. Genügt $F(x)$ in (a, b) den beiden Bedingungen $(N_g^{+\infty})$ und $(N_g^{-\infty})$, so hat sie die Eigenschaft (N_g^{∞}) in (a, b).

Definition 13. E sei eine Teilmenge des abgeschlossenen Intervalls (a, b). Eine in den Punkten von (a, b) definierte Funktion $F(x)$ heiße *von beschränkter Variation* (abgekürzt: BV) *auf* E, wenn sich eine positive Zahl N finden läßt, derart daß für jedes System von nicht übereinander greifenden Intervallen (a_k, b_k), deren Endpunkte zu E gehören sollen,

$$\sum_{(k)} |F(b_k) - F(a_k)| \leqq N$$

ist.

Definition 14. Eine für $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $F(x)$ ist *in (a, b) von beschränkter Variation im verallgemeinerten Sinne* (abgekürzt: BVV), wenn (a, b) sich, ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf denen $F(x)$ von beschränkter Variation sei.

Satz VI. *Damit eine in (a, b) approximativ stetige Funktion BVV ein unbestimmtes β-Integral* [20] *sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie in (a, b) SV ist und die Eigenschaft (N_g^∞) hat.*

Beweis. Jedes unbestimmte β-Integral ist totalstetig auf einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen, welche sämtlich (a, b) überdecken, ausgenommen vielleicht in höchstens abzählbar unendlich vielen Punkten [21]; daraus folgt, daß sie in (a, b) die Eigenschaft (N_g^∞) hat und SV ist. Die Bedingungen sind notwendig.

Sie sind auch hinreicheud. Denn aus den Definitionen 12, 7 und 14 folgt, daß sich zu einer für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetigen Funktion $F(x)$, welche in (a, b) auch BVV und SV ist und die Eigenschaft (N_g^∞) hat, eine Überdeckung von (a, b) durch abzählbar viele perfekte Mengen (K_j) und eine abzählbare Menge M finden läßt, derart daß zu jedem K_j die Funktion $F_j(x)$, welche auf K_j mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu K_j komplementären Intervallen von (a, b), die Eigenschaft (N^∞) hat und stetig und von beschränkter Variation ist in (a, b). Nach dem ersten Korollar von § 1 wird $F_j(x)$ dadurch totalstetig sein in (a, b). Daraus ergibt sich dann weiter, daß $F(x)$ ein unbestimmtes β-Integral ist [21].

§ 7. **Definition** C_1 [15]. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Dann hat eine *zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte (β)-Majorante $\psi_3(x)$* die Eigenschaften: 1^0 $\psi_3(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2^0 $\psi_3(a) = 0$; 3^0 es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß $\psi_3(x)$ unterhalb totalstetig ist auf jedem H_k; 4^0 die [fast überall in (a, b) existierende und endliche] approximative Ableitung von $\psi_3(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\geqq f(x)$.

Lemma *B. Eine Funktion $F(x)$, welche in (a, b):*

1^0 *approximativ stetig und SV ist;*

2^0 *die Eigenschaften (T_2) und $(N_g^{+\infty})$ hat;*

und zu der:

[20]) Siehe die Definitionen 6—10 in Ridder, **5**.

[21]) Siehe Ridder, **5** (Definition 7).

3^0 *sich eine in (a, b) eindeutige Funktion $f(x)$ finden läßt, gleich der approximativen Ableitung von $F(x)$ fast überall wo diese existiert und im Besitze einer β-Majorante $\psi_3(x)$ (im Sinne der Definition C_1) in (a, b);*

ist in (a, b) BVV.

Außerdem wird für $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$:

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqq \psi_3(\beta) - \psi_3(\alpha) \tag{8}$$

sein.

Beweis. Wenn (8) nicht für jedes Punktepaar α, β gültig wäre, so bildeten die Punkte, in deren jeder Umgebung Punkte α, β lägen mit

$$F(\beta) - F(\alpha) > \psi_3(\beta) - \psi_3(\alpha) \quad \text{und} \quad \alpha < \beta \tag{9}$$

eine nicht leere, perfekte Menge K.

Zwischen den Endpunkten eines jeden Teilintervalles von zu K komplementären Intervallen würde (8) gelten müssen. Es existierte ein Stück $\tilde\omega$ von K, auf dem überall dicht lägen eine der perfekten Mengen, auf welchen $F(x)$ stetig ist, eine der perfekten Mengen, auftretend in die Definition der Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$ für $F(x)$, und eine perfekte Menge, auf welcher $\psi_3(x)$ unterhalb totalstetig ist.

Für die Funktionen $F^*(x)$, $\psi_3^*(x)$, welche auf $\tilde\omega$ und in c_1 und d_1 mit $F(x)$ bzw. mit $\psi_3(x)$ zusammenfielen und sich linear änderten in den zu $\tilde\omega$ komplementären Intervallen von (c_1, d_1), würde, wie aus der Bedingung 3^0 folgt, in fast allen Punkten, in welchen $\dfrac{dF^*(x)}{dx}$ existiert,

$$\frac{dF^*(x)}{dx} \leqq \frac{d\psi_3^*(x)}{dx}$$ [22])

sein. Anwendung des Lemmas 3 auf $F^*(x)$ und $\psi_3^*(x)$ im Intervall (c_1, d_1) zeigte sodann, daß zwischen je zwei Punkten α, β (mit $\alpha < \beta$) von $\tilde\omega_1$ (8) gelten müßte im Widerspruch mit (9). Die Menge K kann somit nur leer sein.

Ebenso wie zu K läßt sich zu jeder perfekten Teilmenge von (a, b) ein Stück $\tilde\omega_1$ (mit den Endpunkten c_1 und d_1) finden, derart daß die Bedingungen des Lemmas 3 für die zugehörigen Funktio-

[22]) Die Existenz dieser Ableitung in fast allen Punkten von $\tilde\omega_1$ folgt daraus, daß $\psi_3(x)$ unterhalb totalstetig, somit auch von beschränkter Variation ist auf $\tilde\omega_1$. Vgl. Fußn. 13.

nen $F^*(x)$, $\psi_3^*(x)$ im Intervall (c_1, d_1) erfüllt sind. Daraus folgt, daß $F(x)$ BV ist auf $\tilde{\omega}_1$. Transfinite Induktion zeigt, daß $F(x)$ in (a, b) BVV ist.

Definition C_2 [15]. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Eine *zu* $f(x)$ *in* (a, b) *adjungierte* (β)*-Majorante* $\psi_4(x)$ hat die Eigenschaften: 1^0 sie ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2^0 $\psi_4(a) = 0$; 3^0 es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_k), derartig, daß jede Funktion $\psi_4^{(k)}(x)$, welche auf der zugehörigen Menge P_k mit $\psi_4(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b), approximativ stetig ist für $a \leqq x \leqq b$ und in den Punkten von P_k, diejenigen einer abzählbaren Teilmenge A_k ausgenommen, eine untere approximative Ableitung

$$\underline{AD}\,\psi_4^{(k)}(x) \geqq f(x) \quad \text{und} \quad \neq -\infty$$

hat.

Da die Majoranten $\{\psi_4(x)\}$ eine Teilklasse der $\{\psi_3(x)\}$ bilden, hat man:

(Lemma B^*). *Das Lemma B bleibt gültig, wenn man anstatt einer* β*-Majorante* $\psi_3(x)$ *nach Definition* C_1 *eine* β*-Majorante* $\psi_4(x)$ *nach Definition* C_2 *benutzt.*

Satz VII. *Damit eine für* $a \leqq x \leqq b$ *approximativ stetige Funktion* $F(x)$ *ein unbestimmtes* β*-Integral sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie in* (a, b) SV *ist und den Bedingungen* (T_2) *und* (N_g^∞) *genügt und daß es in* (a, b) *eine eindeutige Funktion gibt, welche fast überall mit der approximativen Ableitung von* $F(x)$ *zusammenfällt wo diese existiert und zu der in* (a, b) *eine* β*-Majorante* $\psi_3(x)$ *nach Def.* C_1 [oder eine β-Majorante $\psi_4(x)$ nach Def C_2] *adjungiert ist.*

Beweis. Jedes unbestimmte β-Integral ist totalstetig auf einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen (E_k), welche (a, b), ausgenommen in abzählbar vielen Punkten, überdecken [21]; auf jeder Menge E_k hat $F(x)$ die Eigenschaft (N). Sie wird nun in (a, b) SV sein und die Eigenschaften (T_2) [16] und (N_g^∞) haben.

Weiter hat sie fast überall eine approximative Ableitung. Jede Funktion, welche mit der approximativen Ableitung zusammenfällt wo diese existiert, hat sowohl eine β-Majorante im Sinne der Definition C_1 wie im Sinne der Definition C_2 [23].

[23]) Siehe Ridder, **5** (Satz VIII und die Def. 8, 9).

Die Bedingungen sind notwendig.

Wenn, umgekehrt, $F(x)$ die genannten Bedingungen erfüllt, so ist sie nach Lemma $B\,[B^*]$ BVV in (a, b). Nach Satz VI ist sie sogar ein unbestimmtes β-Integral [24].

§ 8. **Satz VIII.** *Wenn eine Funktion* $F(x)$ *in* (a, b) *approximativ stetig und* SV *ist und in jedem Punkte* ξ *von* (a, b), *mit Ausnahme einer abzählbaren Menge, eine endliche Ableitung hat in bezug auf eine* ξ *enthaltende, meßbare Teilmenge* E_ξ *von* (a, b), *welche in* ξ *eine positive obere Dichte hat, und wenn die von diesen Ableitungen gebildete Funktion* $h(x)$ *über* (a, b) β*-integrierbar ist, so wird*

$$F(b) - F(a) = {}_{(\beta)}\!\!\int_a^b h(x)\, dx$$

sein; hierbei deutet ${}_{(\beta)}\!\int$ *das* β*-Integral an* [25].

Beweis. Aus einem Satze von Saks [26] folgt, daß $F(x)$ in (a, b) die Eigenschaft (N) hat; somit auch die Eigenschaften (T_2) [16] und (N_g^∞). Dadurch folgt Satz VIII unmittelbar aus dem vorigen Satze.

[24]) Es läßt sich zeigen, *daß die in* (a, b) *approximativ stetigen Funktionen, welche daneben in* (a, b) SV *und* BVV *sind und die Eigenschaft* $(N_g^{-\infty})$ *haben, identisch sind mit den approximativ stetigen Funktionen, welche in* (a, b) SV *sind und dabei die Eigenschaft haben, daß es zu jeder derartigen Funktion eine Überdeckung von* (a, b) *durch eine abzählbare Menge* M *und abzählbar viele perfekte Mengen* (E_j) *gibt, derart daß die Funktion auf jeder Menge* E_j UT *ist.* (Der Beweis verläuft wie der des Lemmas C in Ridder, **4**, 18 u. 19). Da jedes β-Integral über (a, x) in (a, b) SV ist und die Differenz zwischen ihr und einer β-Majorante, nach Definition C_1, wie auch die Differenz zwischen ihr und einer β-Minorante, nach Definition D_1 in Ridder, **5**, in (a, b) monoton und approximativ stetig, somit auch stetig ist, so werden derartige Majoranten und Minoranten immer SV in (a, b) sein, wenn sie zu einer über (a, b) β-integrierbaren Funktion gehören. Daraus folgt, daß der Umfang der Integraldefinition 8, loc. cit., sich nicht ändert, wenn man in den Definitionen C_1 und D_1 die Bedingungen 3^0 ändert in: $\psi_3(x)$ bzw. $\varphi_3(x)$ sollen in (a, b) SV und BVV sein und die Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$ bzw. $(N_g^{+\infty})$ haben.

[25]) Für den Fall, daß $h(x)$ ein allgemeines D-Integral hat und $F(x)$ stetig ist, wurde der Satz schon von Saks bewiesen; siehe Atti Congr. Math. Bologna (1928), 254 (Th. 4).

[26]) Siehe Saks, **2**, 187 (Th. 16).

9. XII. 1933.