Über die gegenseitigen Beziehungen verschiedener approximativ stetiger Denjoy-Perron Integrale.

Von

J. Ridder (Groningen).

In letzter Zeit sind verschiedene Integraldefinitionen gegeben worden, welche von dem unbestimmten Integral nur approximative Stetigkeit fordern, übrigens den bekannten Definitionen von Denjoy und von Perron nachgebildet sind [1]). Ziel der folgenden Seiten ist es die gegenseitigen Verhältnisse dieser Definitionen und einiger neu hinzugefügter näher zu untersuchen.

Es wird sich zeigen, daß eine erste Gruppe von einander aequivalenten Definitionen sich eng anschließt an die Definition des speziellen Denjoyschen Integrals und somit auch an die mit dieser gleichwertigen Perronschen Integraldefinition. Jedes in einem Intervall (a, b) unbestimmte Integral dieser Gruppe (wir nennen es ein α-Integral) ist wieder auf einer jeden von abzählbar vielen perfektens Mengen (E_j), welche (a, b) bis auf eine (eventuell leere) abzählbare Menge überdecken, totalstetig*. Es ist sogar stetig in allen Punkten von (a, b), *nur die Punkte einer abzählbaren Menge A ausgenommen;* in den Punkten von A wird es approximativ stetig sein.

Jede approximativ stetige Funktion, welche in den Punkten eines Intervalls (a, b), mit Ausnahme derjenigen einer abzählbaren Menge, eine endliche einseitige Ableitung hat, ist ein α-Integral.

Die Integrationsdefinitionen einer zweiten Gruppe (die β-Integrationen) sind wieder einander gleichwertig. Sie schließen sich bei

[1]) Siehe J. C. Burkill, Math. Ztschr. 34 (1931), S. 270—278; Proc. London Math. Soc. (2) 34 (1932), S. 314—322; und J. Ridder, Math. Ztschr. 37 (1933), S. 161—169; Fund. Math. 21 (1933), S. 1—10.

dem allgemeinen Denjoyschen und dem aequivalenten verallgemeinerten Perronschen Integral [2]) an. Jedes in (a, b) unbestimmte β-Integral ist, ebenso wie das unbestimmte allgemeine Denjoysche Integral, auf einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen (K_j), welche (a, b) bis auf eine abzählbare Menge überdecken, totalstetig. Aus der Definition 6 geht hervor, daß es eine überall dicht liegende Menge von Teilintervallen von (a, b) gibt, in welchen das unbestimmte β-Integral totalstetig und umsomehr stetig ist. Jedoch kann man leicht Beispiele von unbestimmten β-Integralen konstruieren, die auf einer perfekten, in (a, b) nirgends dichten Menge, *deren Maß jedoch beliebig wenig von $b - a$ abweicht,* nur approximativ stetig sein können.

Ein β-Integral ist z. B. jede in (a, b) approximativ stetige Funktion $G(x)$ mit der Eigenschaft, daß (a, b) Summe ist von abzählbar vielen perfekten Mengen (E_k) und einer abzählbaren Menge A, derartig, daß jede Funktion $G_k(x)$, welche auf dem zugehörigen E_k mit $G(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu E_k komplementären abgeschlossenen Intervallen von (a, b), in jedem Punkte von (a, b), mit Ausnahme derjenigen einer abzählbaren Menge A_k, eine endliche einseitige approximative Ableitung hat und approximativ stetig ist in (a, b).

Bei der Abfassung dieser Arbeit ist mir, außer den zitierten Publikationen von J. C. Burkill, auch die vorzügliche Monographie von S. Saks: Théorie de l'intégrale (Varsovie 1933) von großem Nutzen gewesen.

Das α-Integral.

§ 1. **Definition 1.** Eine Funktion $f(x)$, definiert für $a \leqq x \leqq b$, wird über (a, b) *α_1-integrierbar* sein, wenn die für das spezielle Denjoy-Integral existierende konstruktive Definition [3]) bei folgender Abänderung einer der angewandten Operationen ein für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetiges Integral $\int\limits_a^x f(x)\,d(x)$ liefert: es sei das α_1-Integral $\int\limits_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,d(x)$ schon konstruiert für jede Kombination α', β', welche der Bedingung $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ genügt, wobei α und β zum abgeschlossenen Intervall (a, b) gehören sollen; wenn es dann

[2]) Siehe J. Ridder, Math. Ztschr. 34 (1931), S. 234—260, insbes. S. 258—269.

[3]) Siehe z. B. E. W. Hobson, Theory of functions I, §§ 464—466.

Teilmengen E_α und E_β von (α, β) gibt, welche in α bzw. in β rechte bzw. linke Dichten 1 haben, derartig, daß für $\alpha' < \beta'$ und α' zu E_α, β' zu E_β gehörend der endliche Grenzwert

$$\lim_{\substack{\alpha' \to \alpha \\ \beta' \to \beta}} \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx$$

existiert, so wird dieser das α_1-Integral über (α, β) sein.

Definition 2. $f(x)$ wird über (a, b) *α_2-integrierbar* sein, wenn es eine für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetige Funktion $G(x)$ gibt mit den Eigenschaften: 1° $G(a) = 0$; 2° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge P, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß für jedes H_k die Funktion $G_k(x)$, welche auf H_k mit $G(x)$ zusammenfällt und sich in den zu H_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen $\tilde{\omega}_n^{(k)}$ des kleinsten, abgeschlossenen, H_k enthaltenden Intervalles u_k linear ändert, totalstetig ist in u_k, während daneben die Oszillationen von $G(x)$ in den $\tilde{\omega}_n^{(k)}$ eine konvergente Reihe bilden sollen [4]; 3° die fast überall existierende [5]) Ableitung von $G(x)$ ist fast überall in (a, b) gleich $f(x)$. $G(x)$ wird dann das bestimmte α_2-Integral von $f(x)$ über (a, x) sein $(a < x \leqq b)$.

Die Definitionen 1 und 2 sind einander aequivalent [6]).

§ 2. Definition A_1. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Dann soll eine für $a \leqq x \leqq b$ zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* $\psi_1(x)$ den folgenden Bedingungen genügen: 1° $\psi_1(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\psi_1(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (H_k), derartig, daß $\psi_1(x)$ unterhalb totalstetig* [7]) ist auf jedem H^k; 4° die [fast überall in (a, b) existierende und endliche [5])] Ableitung von $\psi_1(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\geqq f(x)$.

[4]) Es heißt $G(x)$ totalstetig* auf H_k.

[5]) Dies folgt aus Ridder, loc. cit. [2]), S. 252 (Satz XVIII).

[6]) Siehe Ridder, Fund. Math. 21 (1933), S. 1—10, speziell Fußn. 13.

[7]) D. h. die Summen von Funktionsdifferenzen: $\sum_{(J)}\{\psi_1(b_j) - \psi_1(c_j)\}$ und $\sum_{(J)}\{\psi_1(c_j) - \psi_1(a_j)\}$, wobei $a_j \leqq c_j \leqq b_j$ ist und Paare $\{a_j, b_j\}$ zu H_k gehörende Endpunkte sind von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen, haben immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe Ridder, loc. cit. [2]), S. 251.

Definition B_1. Eine für $a \leqq x \leqq b$ zu $f(x)$ adjungierte *Minorante* $\varphi_1(x)$ soll den Bedingungen genügen: 1° $\varphi_1(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\varphi_1(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_k), derartig, daß $\varphi_1(x)$ oberhalb totalstetig* [8]) ist auf jedem P_k; 4° die [fast überall in (a, b) existierende und endliche [5])] Ableitung von $\varphi_1(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\leqq f(x)$.

Satz I. *Die Differenz einer jeden Majorante $\psi_1(x)$ und einer jeden Minorante $\varphi_1(x)$, adjungiert zu der in (a, b) definierten Funktion $f(x)$, ist eine nicht abnehmende Funktion* [9]).

Definition 3. Wenn die untere Schranke aller $\psi_1(b)$-Werte (s. Def. A_1) und die obere Schranke aller $\varphi_1(b)$-Werte (s. Def. B_1) einander gleich sind, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das α_3-Integral $I_3(a, b)$* von $f(x)$ über (a, b).

Satz II. *Wenn das Integral $I_3(a, b)$ von $f(x)$ existiert, so existiert $I_3(a, x)$ für $a < x \leqq b$ und besitzt fast überall in (a, b) eine Ableitung $= f(x)$* [10]).

Es läßt sich weiter zeigen, daß *die Definitionen 2 und 3 einander aequivalent sind* [11]).

§ 3. Definition A_2. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Dann soll eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* $\psi_2(x)$ den Bedingungen genügen: 1° $\psi_2(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\psi_2(a) = 0$; 3° die untere Derivierte $\underline{D}\,\psi_2(x)$ ist $\geqq f(x)$ und $\neq -\infty$ in allen Punkten von (a, b) mit Ausnahme derjenigen einer abzählbaren Menge.

Definition B_2. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Minorante* $\varphi_2(x)$ hat die Eigenschaften: 1° sie ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$;

[8]) D. h. die Summen von Funktionsdifferenzen: $\sum_{(J)}\{\varphi_1(b_j) - \varphi_1(c_j)\}$ und $\sum_{(J)}\{\varphi_1(c_j) - \varphi_1(a_j)\}$, wobei $a_j \leqq c_j \leqq b_j$ ist und die Paare $\{a_j, b_j\}$ zu P_k gehörende Endpunkte sind von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen, haben immer einen oberen Limes $\leqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe Ridder, loc. cit. [2]), S. 251.

[9]) Dies ist ein Spezialfall von Ridder, loc. cit. [6]), S. 4 (Satz).

[10]) Der Beweis verläuft wie der eines gleichartigen Satzes loc. cit. [6]), S. 5.

[11]) Zum Beweise vergleiche man Ridder, loc. cit. [6]), S. 6—8 und loc. cit. [2]), S. 255 u. 256.

2° $\varphi_2(a)=0$; 3° es ist in allen Punkten von (a,b), mit Ausnahme derjenigen einer abzählbaren Menge, $\bar{D}\varphi_2(x)\leqq f(x)$ und $\neq+\infty$.

Satz III. *Die Majoranten $\{\psi_2(x)\}$ bilden eine Teilklasse der Majoranten $\{\psi_1(x)\}$, die Minoranten $\{\varphi_2(x)\}$ eine Teilklasse der $\{\varphi_1(x)\}$.*

Beweis[12]. $\psi_2(x)$ sei eine nach Definition A_2 in (a,b) zu $f(x)$ adjungierte Majorante und K die in der Definition zugelassene Ausnahmemenge. Zu jedem Punkte x von $(a,b)-K$ gehört eine natürliche Zahl n, derartig, daß

$$\text{(1)}\qquad \text{aus } |x-x'|\leqq\frac{1}{n} \text{ folgt } \frac{\psi_2(x)-\psi_2(x')}{x-x'}\geqq -n.$$

Bei festem n sei E_n die Menge der Punkte, für welche (1) gilt; dann wird das abgeschlossene Intervall gleich $\sum_{n=1}^{\infty}E_n+K$ sein. Zu jedem n gehören endlich viele abgeschlossene Intervalle $\left(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right)$ (wobei i eine ganze Zahl), welche Punkte von E_n enthalten; es gibt somit auch endlich viele, nicht leere Durchschnittsmengen (E_n^i) von E_n mit derartigen Intervallen. Nun wird $\psi_2(x)$ unterhalb totalstetig*[7]) sein auf der abgeschlossenen Hülle H_n^i eines jeden E_n^i; das folgt aus (1) und der approximativen Stetigkeit von $\psi_2(x)$.

Sei nämlich ξ ein linksseitiger Verdichtungspunkt einer Menge E_n^i und x ein Punkt $>\xi$ des E_n^i enthaltenden Teilintervalles von (a,b); dann wird es eine Folge von Punkten $\{x_k\}$ und eine Folge von zu E_n^i gehörenden Punkten $\{\xi_k\}$ geben, derartig, daß, wenn $\chi(x)=\psi_2(x)+nx$ ist, für die natürlichen Zahlen k:

$$x_k<\xi_k<\xi;\quad \lim x_k=\xi;\quad \lim\chi(x_k)=\chi(\xi)$$

und

$$\chi(\xi_k)-\chi(x_k)\geqq 0;\quad \chi(x)-\chi(\xi_k)\geqq 0$$

ist. Hieraus folgt:

$$\text{(2)}\qquad \chi(x)-\chi(\xi)\geqq 0.$$

In gleichartiger Weise zeigt man für die zum Teilintervall gehörende Punkte (x) mit $x<\xi$, daß

$$\text{(3)}\qquad \chi(\xi)-\chi(x)\geqq 0$$

[12]) Den Grundgedanken dieses Beweises findet man bei S. Saks, Théorie de l'intégrale (Varsovie, 1933), S. 188, 189 (Beweis des Theorems 18) und J. Ridder, C. R. Soc. Sci Varsovie 23 (1930), S. 3 (Beweis des Lemmas). Man vergleiche auch Ridder, loc. cit. [2]), S. 256 u. 257.

ist. Ist schließlich ξ ein rechtsseitiger Verdichtungspunkt von E_n^i, so folgen (2) und (3) für $x>\xi$ bzw. $x<\xi$ aus dem Vorigen durch Betrachtung der Funktion $-\chi(-x)$.

Es wird somit $\psi_2(x)$ auf H_n^i unterhalb totalstetig* sein und dadurch auch auf dem perfekten Kerne K_n^i von H_n^i; $\psi_2(x)$ genügt also den Bedingungen der Definition A_1.

Die zweite Hälfte des Satzes folgt aus der ersten durch Betrachtung von $-\varphi_2(x)$ [und $-f(x)$][13]).

Definition 4. Wenn die untere Schranke aller $\psi_2(b)$-Werte (s. Def. A_2) und die obere Schranke aller $\varphi_2(b)$-Werte (s. Def. B_2) einander gleich sind, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das α_4-Integral* $I_4(a,b)$ von $f(x)$ über (a,b).

Die Definitionen 3 und 4 sind gleichwertig.

Beweis. Aus Satz III folgt, daß jede nach Definition 4 integrierbare Funktion es auch ist nach Definition 3.

Wenn, umgekehrt, $f(x)$ über (a,b) integrierbar ist nach Definition 3, so wird sie es auch sein nach Definition 1. Bei der Konstruktion des Integrals nach letzter Definition bestimmt man eine wohlgeordnete Folge von perfekten Mengen, deren Anzahl abzählbar ist und welche u. m. folgende Eigenschaft haben. Wenn für eine dieser Mengen, P_α, die in bezug auf das Intervall (a,b) komplementäre Menge $C(P_\alpha)$ gebildet wird von den offenen Intervallen (a_j^α,b_j^α), so wird es eine auf P_α nirgends dichte, abgeschlossene Teilmenge $M_{\alpha+1}$ geben, derartig, daß jeder Punkt ξ von $P_\alpha-M_{\alpha+1}$ innerer Punkt eines abgeschlossenen Intervalls (c,d) ist, dessen Endpunkte zu P_α gehören, für das $\int_{(c,d)P_\alpha}(L)f(x)dx$ existiert, während die Oszillationen (Ω_j) der (schon nach Def. 1 gebildeten) Integrale in den Intervallen $(a_j^{(\alpha)},b_j^{(\alpha)})$ von (c,d) eine konvergente Reihe liefern; $P_{\alpha+1}$ ist der perfekte Kern von $M_{\alpha+1}$.

Wir nehmen an, daß es möglich sei, für jedes im Innern eines derartigen $(a_j^{(\alpha)},b_j^{(\alpha)})$ liegende, abgeschlossene Intervall (p,q) eine nicht negative Funktion $v^{(p,q)}(x)$ zu bestimmen mit beliebig kleiner oberer

[13]) In gleicher Weise läßt sich zeigen: wenn für die im abgeschlossenen Intervall (a,b) approximativ stetige Funktion $G(x)$ in den Punkten einer Teilmenge E $\underline{D}G(x)\neq-\infty$ $[\bar{D}G(x)\neq+\infty]$ ist, so wird E sich, ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Teilmenge, überdecken lassen von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf deren jeder $G(x)$ unterhalb totalstetig* [oberhalb totalstetig*] ist.

Schranke, welche, zu dem α_1-Integral $I_1(p, x)$ addiert, eine in (p, q) zu $f(x)$ adjungierte Majorante $\psi_4^{(p,q)}(x)$ liefert (also eine Majorante im Sinne der Def. 4). Wir wählen Punkte $\{a_{j,k}^{(\alpha)}\}$, $\{b_{j,k}^{(\alpha)}\}$ derartig, daß:

$$a_{j,0}^{(\alpha)} = b_{j,0}^{(\alpha)} = {}^1/_2\,(a_j^{(\alpha)} + b_j^{(\alpha)});$$

$$a_j^{(\alpha)} < a_{j,k+1}^{(\alpha)} < u_{j,k}^{\alpha} < b_{j,k}^{(\alpha)} < b_{j,k+1}^{(\alpha)} < b_j^{(\alpha)}\ (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_{j,k}^{(\alpha)} = a_j^{(\alpha)}, \quad \lim_{k\to\infty} b_{j,k}^{(\alpha)} = b_j^{(\alpha)}$$

ist.

In einem Intervall $(a_{j,k+1}^{(\alpha)}, a_{j,k}^{(\alpha)})$ existiert eine Funktion $v^{(a_{j,k+1}^{(\alpha)}, a_{j,k}^{(\alpha)})}(x)$, welche nicht-negativ, jedoch immer kleiner als $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ ist und welche, zu $I_1(a_{j,k+1}^{(\alpha)}, x)$ addiert, eine zu $f(x)$ adjungierte Majorante $\psi_4^{(a_{j,k+1}^{(\alpha)}, a_{j,k}^{(\alpha)})}(x)$, liefert; auch in einem Intervall $(b_{j,k}^{(\alpha)}, b_{j,k+1}^{(\alpha)})$ existiert eine nicht-negative Funktion $v^{(b_{j,k}^{(\alpha)}, b_{j,k+1}^{(\alpha)})}(x)$, kleiner als $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ und, zu $I_1(b_{j,k}^{(\alpha)}, x)$ addiert, ein $\psi_4^{(b_{j,k}^{(\alpha)}, b_{j,k+1}^{(\alpha)})}(x)$ liefernd.

Man sieht sofort, daß

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} v^{(a_{j,k+1}^{(\alpha)}, a_{j,k}^{(\alpha)})}(a_{j,k}^{(\alpha)}) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v^{(b_{j,k}^{(\alpha)}, b_{j,k+1}^{(\alpha)})}(b_{j,k+1}^{(\alpha)})$$

konvergente Reihen sind.

Wir definieren nun eine Funktion, gleich Null in $a_j^{(\alpha)}$, gleich der Summe von $I_1(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$ und der beiden Reihen (4) in $b_j^{(\alpha)}$, für $a_{j,n+1}^{(\alpha)} \leqq x < a_{j,n}^{(\alpha)}$ $(n \geqq 0)$ gleich

$$I_1(a_j^{(\alpha)}, x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^{(a_{j,k+1}^{(\alpha)}, a_{j,k}^{(\alpha)})}(a_{j,k}^{(\alpha)}) + v^{(a_{j,n+1}^{(\alpha)}, a_{j,n}^{(\alpha)})}(x)$$

und für $b_{j,n}^{(\alpha)} \leqq x < b_{j,n+1}^{(\alpha)}$ $(n \geqq 0)$ gleich

$$I_1(a_j^{(\alpha)}, x) + \sum_{k=0}^{\infty} v^{(a_{j,k+1}^{(\alpha)}, a_{j,k}^{(\alpha)})}(a_{j,k}^{(\alpha)}) + \sum_{k=0}^{n-1} v^{(b_{j,k}^{(\alpha)}, b_{j,k+1}^{(\alpha)})}(b_{j,k+1}^{(\alpha)}) +$$
$$+ v^{(b_{j,n}^{(\alpha)}, b_{j,n+1}^{(\alpha)})}(x).$$

Die auf diese Weise für $a_j^{(\alpha)} \leqq x \leqq b_j^{(\alpha)}$ definierte Funktion ist eine in $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$ zu $f(x)$ adjungierte Majorante $\psi_4^{(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})}(x)$, welche in

jedem Punkte von $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$ größer ist als-, jedoch um weniger als 2ε abweicht von $I_1(a_j^{(\alpha)}, x)$.

Eine für $c \leqq x \leqq d$ definierte Funktion $g(x)$, gleich $f(x)$ auf $(c, d) . P_\alpha$ und gleich Null in den komplementären Intervallen $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$, ist L-integrierbar. Es gibt für $c \leqq x \leqq d$ eine Majorante $\mathfrak{M}^{(\alpha; c, d)}(x)$, welche für jedes $x \int_a^x (L) g(x)\,dx$ um weniger als η übertrifft (η willkürlich positiv) und deren untere Derivierte für jedes $x \neq -\infty$ und $\geqq g(x)$ ist.

In jedem Intervall $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$ sind nach dem Vorherigen die Majoranten $\psi_4^{(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})}(x)$ so zu wählen, daß sie von $I_1(a_j^{(\alpha)}, x)$ um weniger als $\frac{\eta}{2^j}$ abweichen. Es läßt sich dann eine natürliche Zahl J angeben, derartig, daß

$$\sum_{j=J}^{\infty} \Omega(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)}) < \eta$$

sein wird; hierbei deutet $\Omega(a_j^{(\alpha)}, x)$ die Oszillation von $\psi_4^{(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})}(x)$ an im Intervall $(a_j^{(\alpha)}, x)$.

In den abgeschlossenen Intervallen $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$ definieren wir nun Funktionen $g_j^{(\alpha)}(x)$; wir nehmen für jedes $j < J$

$$g_j^{(\alpha)}(x) = \psi_4^{(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})}(x),$$

für jedes j der übrigen Intervalle

$$g_j^{(\alpha)}(x) = \Omega(a_j^{(\alpha)}, x) + \psi_4^{(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})}(x).$$

Definieren wir schließlich für $c \leqq x \leqq d$

$$\psi_4^{(c,d)}(x) = \mathfrak{M}^{(\alpha; c, d)}(x) + \sum_{(J)\ c}^{x} g_j^{(\alpha)}(b_j^{(\alpha)}) + g_j^{(\alpha)}(x),$$

wobei die Summation erstreckt wird über diejenigen abgeschlossenen Intervalle $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$, für die $b_j^{(\alpha)} < x$ ist, während $g_j^{(\alpha)}(x)$ gleich Null zu rechnen ist, wenn x nicht zu einem abgeschlossenen Intervall $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)})$ gehört. Diese Funktion ist nun wirklich eine zu $f(x)$ in (c, d) adjungierte Majorante im Sinne der Definition A_2 und es ist in (c, d)

$$0 \leqq \psi_4^{(c,d)}(x) - I_1(c, x) < 3\,\eta.$$

Man sieht nun leicht, daß es in abgeschlossenen Intervallen (p, q) deren innere Punkte zu der in bezug auf (a, b) komplementären

Menge $C(M_{\alpha+1})$ gehören, Majoranten ψ_4 gibt, welche beliebig wenig von $I_1(p, x)$ abweichen. Dasselbe gilt also auch für abgeschlossene Intervalle mit inneren Punkten, gehörend zu der in bezug auf (a, b) komplementären Menge des perfekten Kerns $P_{\alpha+1}$ von $M_{\alpha+1}$.

Es sei M_1 die Menge der Punkte von (a, b), in deren jeder Umgebung $f(x)$ nicht L-integrierbar ist. Dann lassen sich, ausgehend von den Majoranten $\mathfrak{M}$, in den abgeschlossenen, zu M_1 komplementären Intervallen (r, s) Majoranten ψ_4 konstruieren, welche beliebig wenig größer sind als $I_1(r, x)$. Derartige Majoranten existieren somit auch für die abgeschlossenen Intervalle, welche komplementär sind zu dem perfekten Kerne P_1 von M_1. Da es eine Ordnungszahl der ersten oder zweiten Zahlenkasse gibt, für die P_α leer ist, so führt das Vorhergehende, mittels transfiniter Induktion, zur Existenz von Majoranten ψ_4 für (a, b), welche beliebig wenig von $I_1(a, x)$ abweichen.

Obige Konstruktion, angewandt für die Funktion $-f(x)$, führt zu Majoranten, deren entgegengesetzte Werte in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte Minoranten liefern im Sinne der Definition B_2, welche beliebig wenig von $I_1(a, x)$ abweichen. Daher ist $f(x)$ in (a, b) auch integrierbar nach Definition 4.

§ 4. **Lemma.** *Wenn die im abgeschlossenen Intervall (a, b) approximativ stetige Funktion $F(x)$ in den Punkten von Teilmengen E und E' endliche rechte bzw. linke extreme Derivierte hat:*

$$-\infty < \underline{D}_r F(x) \leqq \overline{D}_r F(x) < +\infty,$$
$$\textit{bzw.} \quad -\infty < \underline{D}_l F(x) \leqq \overline{D}_h F(x) < +\infty,$$

so wird sich jede der Mengen E und E', ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Teilmenge, überdecken lassen von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf deren jeder $F(x)$ totalstetig[14]) ist.*

B e w e i s. Es läßt sich E betrachten als Summe von abzählbar vielen Mengen $\{E_n^i\}$, wobei i eine ganze, n eine natürliche Zahl ist, welche in abgeschlossenen Intervallen $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ enthalten sind und mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt x eines E_n^i,

$$(5) \qquad \text{aus} \quad 0 < x' - x \leqq \frac{1}{n} \quad \text{folgt} \quad |F(x') - F(x)| \leqq n(x' - x)\,^{15}).$$

[14]) D. h. $F(x)$ ist auf einer derartigen Menge sowohl unterhalb — wie oberhalb totalstetig*. Siehe [7]) und [8]).

[15]) Man vergleiche den Beweis von Satz III; auch S a k s, loc. cit. [11]), S. 189.

Es sei H_n^i die abgeschlossene Hülle von E_n^i. Ist ξ ein rechtsseitiger Verdichtungspunkt von E_n^i und x ein Punkt $> \xi$ des E_n^i enthaltenden Teilintervalles, dann wird es eine Folge von Punkten $\{x_k\}$ und eine Folge von zu E_n^i gehörenden Punkten $\{\xi_k\}$ geben, derartig, daß für die natürlichen Zahlen k:

$$\xi < \xi_k < x_k < x; \quad \lim x_k = \xi; \quad \lim F(x_k) = F(\xi)$$

und

$$|F(\xi_k) - F(x_k)| \leqq n(x_k - \xi_k); \; |F(x) - F(\xi_k)| \leqq n(x - \xi_k)$$

ist. Hieraus folgt:

$$(6) \qquad |F(x) - F(\xi)| \leqq n(x - \xi).$$

Wäre ξ ein linksseitiger Verdichtungspunkt von E_n^i gewesen, so hätte man (6) in gleichartiger Weise ableiten können. Man sieht nun leicht ein, daß $F(x)$ totalstetig* sein wird auf jedem H_n^i[16]) und dadurch auch auf seinem perfekten Kern, womit das Lemma bewiesen ist.

Aus den Definitionen A_2 und B_2 (und 4) folgt unmittelbar, daß jede im abgeschlossenen Intervall (a, b) approximativ stetige Funktion, welche in allen Punkten von (a, b), abzählbar viele ausgenommen, eine endliche Ableitung hat, *ein unbestimmtes α-Integral* ist (d. h. ein unbestimmtes Integral nach den Definitionen 1 — 4). Mit Hilfe des Lemmas kann man nunmehr zeigen den weiteren

Satz IV. *Wenn für die im abgeschlossenen Intervall (a, b) approximativ stetige Funktion $F(x)$ in allen Punkten von (a, b), vielleicht diejenigen einer abzählbaren Menge ausgenommen,*

$$\textit{entweder} \quad -\infty < \underline{D}_r F(x) \leqq \overline{D}_r F(x) < +\infty$$
$$\textit{oder} \quad -\infty < \underline{D}_l F(x) \leqq \overline{D}_l F(x) < +\infty$$

oder beides gilt, so wird $F(x)$ ein unbestimmtes α-Integral ihrer fast überall existierenden Ableitung sein.

B e w e i s. Aus dem Lemma folgt, daß $F(x)$ in (a, b) UTV*[17]) ist. Sie hat somit in fast allen Punkten von (a, b) eine endliche

[16]) Ebenso wie im Beweise von Satz III fällt hier E_n^i mit H_n^i zusammen.

[17]) Eine Funktion ist unterhalb totalstetig* im verallgemeinerten Sinne (abgekürzt: UTV*) in (a, b), wenn sich dieses Intervall in abzählbar viele Teilmengen zerlegen läßt, auf denen sie unterhalb totalstetig* sei. Siehe R i d d e r, loc. cit. [2]), S. 251.

Ableitung [5]). $F(x) - F(a)$ ist sowohl eine Majorante nach Def. A_1 wie eine Minorante nach Def. B_1 ihrer Ableitung. Aus Def. 3 folgt, daß sie dadurch ein α-Integral ihrer Ableitung sein wird.

Aus Definition 2 folgt, daß jedes unbestimmte α-Integral die Eigenschaft hat, daß sich (a, b), ausgenommen in abzählbar vielen Punkten, überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf deren jeder sie stetig ist. Nennen wir eine Funktion, welche in (a, b) diese Eigenschaft hat, *in (a, b) stetig im verallgemeinerten Sinne* (abgekürzt: SV), so können wir aussprechen den

Satz V. *Eine Funktion $F(x)$, approximativ stetig und SV im abgeschlossenen Intervall (a, b), von der bekannt ist, daß in jedem Punkte von (a, b), mit Ausnahme derjenigen einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, endlich sind entweder: 1° $\bar{D}_r F(x)$ und $\underline{D}_r F(x)$, oder: 2° $\bar{D}_l F(x)$ und $\underline{D}_l F(x)$, oder: 3° $\bar{D} F(x)$, oder: 4° $\underline{D} F(x)$, ist ein α-Integral ihrer fast überall existierenden Ableitung* [18]).

Beweis. Aus dem Lemma und Fußn. 13 folgt, daß (a, b) sich überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen (E_j), auf deren jeder $F(x)$ unterhalb totalstetig* oder oberhalb totalstetig* (oder beides) ist, und einer (ev. leeren) abzählbaren Menge. Da $F(x)$ außerdem SV ist, kann man mittels transfiniter Induktion zeigen, daß (a, b) sich zerlegen läßt in einer abzählbaren Menge und abzählbar vielen perfekten Mengen (K_j), auf denen $F(x)$ stetig und UT^* oder OT^*, also beidesmal von beschränkter Variation ist. $F(x)$ genügt weiter der Bedingung (N) von Lusin [19]). Sie muß somit auf jeder Menge K_j totalstetig* sein. Aus den Definitionen A_1, B_1 und 3 folgt nun die Behauptung des Satzes.

§ 5. **Lemma.** *Wenn $f(x)$ über (a, b) ein α-Integral hat und $\psi_2(x)$, $\varphi_2(x)$ in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte Majorante (nach Def. A_2) bzw. Minorante (nach Def. B_2) sind, für die in einem Punkte ξ gleichzeitig $\underline{D}\psi_2(\xi) \neq -\infty$ und $\bar{D}\varphi_2(\xi) \neq +\infty$ ist, so werden beide ebenso wie das α-Integral $I(a, x)$ stetig sein in ξ.*

Beweis. Aus der Bedingung $\underline{D}\psi_2(\xi) \neq -\infty$ folgt, daß $\psi_2(x)$ in ξ rechsseitig halbstetig nach unten ist. Die Differenz $\psi_2(x) - I(a, x)$ ist in (a, b) monoton nicht-abnehmend; daraus und aus ihrer approximativen Stetigkeit folgt, daß sie auch stetig sein wird in jedem Punkte von (a, b), speziell in ξ. Dadurch wird auch $I(a, x)$ in ξ rechtsseitig halbstetig nach unten sein. Durch Betrachtung der Differenz $I(a, x) - \varphi_2(x)$ läßt sich zeigen, daß $I(a, x)$ in ξ rechtsseitig halbstetig nach oben ist. Es ist $I(a, x)$ rechtsseitig stetig in ξ. In gleicher Weise zeigt man ihre linksseitige Stetigkeit, und damit auch ihre Stetigkeit in diesem Punkte. $\psi_2(x)$ und $\varphi_2(x)$ werden dadurch auch stetig sein in ξ.

[18]) Man vergleiche Saks, loc. cit. [12]), S. 190 (Th. 20).
[19]) Nach Saks, loc. cit. [12]), S. 176 (Th. 8).

Dieses Lemma ermöglicht es die Klassen der $\{\psi_2(x)\}$ und der $\{\varphi_2(x)\}$ derartig einzuschränken, daß man eine Integraldefinition erhält, welche genau ebenso weit führt wie die spezielle Denjoysche und die Perronsche Definition.

Definition A*. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Dann soll eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* $\psi^*(x)$ den Bedingungen genügen: 1° $\psi^*(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\psi^*(a) = 0$; 3° die untere Derivierte $\underline{D}\psi^*(x)$ ist $\geqq f(x)$ und $\neq -\infty$ in allen Punkten von (a, b).

Definition B*. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Minorante* $\varphi^*(x)$ hat die Eigenschaften: 1° sie ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\varphi^*(a)$; 3° in allen Punkten des abgeschlossenen Intervalls ist $\bar{D}\varphi^*(x) \leqq f(x)$ und $\neq +\infty$.

Definition 5. Wenn die untere Schranke aller $\psi^*(b)$-Werte und die obere aller $\varphi^*(b)$-Werte einander gleich sind, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das α^*-Integral* von $f(x)$ über (a, b).

Satz VI. *Definition 5 ist aequivalent mit der speziellen Denjoyschen und der Perronschen Integraldefinition.*

Beweis. Denn jede nach Perron integrierbare Funktion wird es auch sein nach Definition 5. Wenn, umgekehrt, eine Funktion nach dieser Definition integrierbar ist, so hat sie sowohl Majoranten $\{\psi^*(x)\}$ wie Minoranten $\{\varphi^*(x)\}$ und diese sind, nach obigem Lemma, in jedem Punkte stetig. Sie sind also auch Majoranten und Minoranten im Sinne Perrons; die Funktion ist nach Perron integrierbar.

Das β-Integral.

§ 6. Definition 6. Eine Funktion $f(x)$, definiert für $a \leqq x \leqq b$, wird über (a, b) *β_1-integrierbar* sein, wenn die für das allgemeine Denjoy-Integral existierende konstruktive Definition [20]) bei folgen-

[20]) Siehe A. Denjoy, Ann. Éc. Norm. (3) 34 (1917), n^os 55—57 oder Hobson, Theory of functions I, § 476.

der Abänderung einer der angewandten Operationen eine für $a \leqq x \leqq b$ **appoximativ stetiges** Integral $\int_a^x f(x)\,dx$ liefert: es sei das β_1-Integral $\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx$ schon konstruiert für **jede** Kombination α', β', welche der Bedingung $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ genügt, wobei α und β zum abgeschlossenen Intervall (a, b) gehören sollen; wenn es dann Teilmengen E_α und E_β von (α, β) gibt, welche in α bzw. in β rechte bzw. linke Dichten 1 haben, derartig, daß für $\alpha' < \beta'$ und α' zu E_α, β' zu E_β gehörend der endliche Grenzwert

$$\lim_{\substack{\alpha' \to \alpha \\ \beta' \to \beta}} \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx$$

existiert, so wird dieser Grenzwert das β_1-Integral über (α, β) sein.

Definition 7. $f(x)$ wird über (a, b) *β_2-integrierbar* sein, wenn es eine für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetige Funktion $G(x)$ gibt mit den Eigenschaften: 1° $G(a) = 0$; 2° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß für jedes H_k die Funktion $G_k(x)$, welche auf H_k mit $G(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu H_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen des kleinsten, abgeschlossenen, H enthaltenden Intervalles u_k, totalstetig ist in u_k; 3° die fast überall existierende[21]) approximative Ableitung von $G(x)$ ist fast überall in (a, b) gleich $f(x)$. $G(x)$ wird dann das bestimmte β_2-Integral von $f(x)$ über (a, x) sein $(a < x \leqq b)$.

Die Definitionen 6 *und* 7 *sind einander aequivalent*[22]).

§ 7. **Definition C_1.** $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Dann soll eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* $\psi_3(x)$ den Bedingungen genügen: 1° $\psi_3(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\psi_3(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß $\psi_3(x)$ unterhalb totalstetig[23]) ist auf jedem H_k; 4° die [fast überall in (a, b) existierende und endliche[21])] approximative Ableitung von $\psi_3(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\geqq f(x)$.

Definition D_1. Eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte *Minorante* $\varphi_3(x)$ wird den folgenden Bedingungen genügen: 1° $\varphi_3(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\varphi_3(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_k), derartig, daß $\varphi_3(x)$ oberhalb totalstetig[24]) ist auf jedem P_k; 4° die [fast überall in (a, b) existierende und endliche[21])] approximative Ableitung von $\varphi_3(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\leqq f(x)$.

Satz VII. *Die Differenz einer jeden Majorante $\psi_3(x)$ und einer jeden Minorante $\varphi_3(x)$, adjungiert zu der in (a, b) definierten Funktion $f(x)$, ist in (a, b) monoton nicht-abnehmend*[25]).

Definiton 8. Wenn die untere Schranke aller $\psi_3(b)$-Werte (s. Def. C_1) und die obere Schranke aller $\varphi_3(b)$-Werte (s. Def. D_1) einander gleich sind, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das β_3-Integral $U_3(a, b)$* von $f(x)$ über (a, b).

Satz VIII. *Wenn das Integral $U_3(a, b)$ von $f(x)$ existiert, so existiert $U_3(a, x)$ für $a < x \leqq b$ und besitzt fast überall eine approximative Ableitung $= f(x)$*[26]).

Es läßt sich zeigen, daß *die Definitionen* 7 *und* 8 *einander aequivalent sind*[27]).

§ 8. **Definition C_2.** $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* $\psi_4(x)$ soll den Bedingungen genügen: 1° sie ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\psi_4(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge A, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_k), derartig, daß jede Funktion $\psi_4^{(k)}(x)$, welche in a und b und auf der zugehörigen Menge P_k mit $\psi_4(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen

[21]) Dies folgt aus **Ridder**, loc. cit. [1]), S. 245 (Satz XI).

[22]) Siehe **Ridder**, loc. cit. [6]), S. 3.

[23]) D. h. die Summe der Funktionsdifferenzen $\sum_{(J)} \{\psi_3(b_j) - \psi_3(a_j)\}$ in den zu H_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen hat immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe **Ridder**, loc. cit. [1]), S. 244.

[24]) D. h. die Summe der Funktionsdifferenzen $\sum_{(J)} \{\varphi_3(b_j) - \varphi_3(a_j)\}$ in den zu P_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen hat immer einen oberen Limes $\leqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe **Ridder**, loc. cit. [1]), S. 244.

[25]) Siehe **Ridder**, loc. cit. [6]), S. 4 (Satz).

[26]) Siehe loc. cit. [6]), S. 5 (Satz).

[27]) Siehe loc. cit. [6]), S. 6—8.

Intervallen von (a, b), approximativ stetig ist für $a \leqq x \leqq b$ und in den Punkten von P_k, diejenigen einer abzählbaren Menge A_k ausgenommen, eine untere approximative Derivierte

$$\underline{AD}\, \psi_4^{(k)}(x) \geqq f(x) \quad \text{und} \quad \neq -\infty$$

hat.

Definition D_2. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Minorante* $\varphi_4(x)$ hat die Eigenschaften: 1° sie ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\varphi_4(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge B, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (Q_k), derartig, daß jede Funktion $\varphi_4^{(k)}(x)$, welche in a und in b und auf der zugehörigen Menge Q_k mit $\varphi_4(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu Q_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b), approximativ stetig ist für $a \leqq x \leqq b$ und in den Punkten von Q_k, diejenigen einer abzählbaren Teilmenge B_k ausgenommen, eine obere approximative Derivierte

$$\overline{AD}\, \varphi_4^{(k)}(x) \leqq f(x) \quad \text{und} \quad \neq +\infty$$

hat.

Satz IX. *Die Majoranten* $\{\psi_4(x)\}$ *bilden eine Teilklasse der Majoranten* $\{\psi_3(x)\}$; *die Minoranten* $\{\varphi_4(x)\}$ *bilden eine Teilklasse der* $\{\varphi_3(x)\}$.

Beweis. Betrachten wir eine willkürliche der Funktionen $\{\psi_4^{(k)}(x)\}$. Zu jedem Punkte x von $(a, b) - A_k$ gehört dann eine natürliche Zahl n, derartig, daß

$$(7) \qquad \frac{\psi_4^{(k)}(x) - \psi_4^{(k)}(x')}{x - x'} \geqq -n$$

gilt für die Punkte (x') einer Menge $E_x^{(k)}$, mit der Eigenschaft daß

$$(8) \qquad \text{aus } |x - x'| \leqq h \leqq \frac{1}{n} \text{ immer folgt } m\{E_x^{(k)} \cdot (x-h, x+h)\} > {}^3/_2\, h;$$

hierbei deutet $(x-h, x+h)$ das abgeschlossene Intervall mit der Mitte x und von der Länge $2h$ an. Bei festem n sei $E_n^{(k)}$ die Menge der Punkte (x), für welche die Bedingungen (7) und (8) erfüllt sind; dann wird das abgeschlossene Intervall (a, b) gleich $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(k)} + A_k$ sein. Zu jedem n gehören endlich viele, abgeschlossene Intervalle $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$

(wobei i eine ganze Zahl), welche Punkte von $E_n^{(k)}$ enthalten; es gibt somit auch endlich viele, nicht leere Durchschnittsmengen $(E_{n,i}^{(k)})$ von $E_n^{(k)}$ mit derartigen Intervallen. Nun wird $\psi_4^{(k)}(x)$ unterhalb totalstetig sein auf der abgeschlossenen Hülle $H_{n,i}^{(k)}$ eines jeden $E_{n,i}^{(k)}$.

Seien nämlich x_1 und x_2 $(> x_1)$ zwei Punkte eines $E_{n,i}^{(k)}$. Dann gilt für die Punkte (x) einer Teilmenge T_1 von (x_1, x_2) mit $m(T_1) > {}^1/_2\,(x_2 - x_1)$, daß

$$(9) \qquad \frac{\psi_4^{(k)}(x) - \psi_4^{(k)}(x_1)}{x - x_1} \geqq -n$$

und für die Punkte einer zweiten Teilmenge T_2 mit $m(T_2) > {}^1/_2\,(x_2 - x_1)$, daß

$$(10) \qquad \frac{\psi_4^{(k)}(x_2) - \psi_4^{(k)}(x)}{x_2 - x} \geqq -n$$

ist. Da $T_1 \cdot T_2$ nicht leer sein kann, gibt es somit einen Punkt x von (x_1, x_2), für den (9) und (10) gleichzeitig gelten. Daraus folgt sodann

$$\frac{\psi_4^{(k)}(x_2) - \psi_4^{(k)}(x_1)}{x_2 - x_1} \geqq -n;$$

$\psi_4^{(k)}(x)$ wird unterhalb totalstetig sein auf $E_{n,i}^{(k)}$.

Sei nun weiter ξ ein linksseitiger Verdichtungspunkt von $E_{n,i}^{(k)}$; dann wird für die Funktion $\chi^{(k,n)}(x) \equiv \psi_4^{(k)}(x) + nx$ gelten, wenn X ein zu $E_{n,i}^{(k)}$ gehörender Punkt ist, kleiner als ξ, aber übrigens willkürlich, daß

$$(11) \qquad \chi^{(k,n)}(X) \leqq \chi^{(k,n)}(\xi)$$

ist. Denn bei willkürlich positivem ε läßt sich eine positive Zahl δ finden, derartig, daß in jedem Intervall $(\xi - p, \xi)$ mit $0 < p \leqq \delta$ die Ungleichung

$$(12) \qquad |\chi^{(k,n)}(x) - \chi^{(k,n)}(\xi)| < \varepsilon$$

gilt für die Punkte (x) einer Teilmenge vom Maße $> {}^1/_2\, p$. Ist X' ein Punkt von $E_{n,i}^{(k)}$ mit $X < X' < \xi$, jedoch übrigens willkürlich, so wird für die Punkte (x) einer Teilmenge von (X', ξ) vom Maße $> {}^1/_2\,(\xi - X')$ gelten:

$$(13) \qquad \chi^{(k,n)}(x) \geqq \chi^{(k,n)}(X').$$

Ist X' außerdem so gewählt, daß $\xi - X' < \delta$ ist, so wird es einen Punkt x_1 von (X', ξ) geben, für den sowohl (12) wie (13) gilt. Daraus folgt:

$$\chi^{(k,n)}(X) \leqq \chi^{(k,n)}(X') \leqq \chi^{(k,n)}(x_1) < \chi^{(k,n)}(\xi) + \varepsilon$$

oder, da ε willkürlich ist, (11).

Es läßt sich nun auch zeigen, daß

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi \text{ auf } E_{n,i}^{(k)}}} \chi^{(k,n)}(x) = \chi^{(k,n)}(\xi) \tag{14}$$

sein muß. Sonst wäre die Differenz beider Glieder eine bestimmt positive Zahl η. Es existierte ein positives $\Delta \left(< \frac{1}{n}\right)$, derartig, daß die Punkte (x) des Intervalls $(\xi - \Delta, \xi)$ mit

$$|\chi^{(k,n)}(\xi) - \chi^{(k,n)}(x)| < \eta \tag{15}$$

eine Menge bildeten, deren Maß $> {}^3/_4\, \Delta$ wäre. Zu einem Punkte ξ'' von $E_{n,i}^{(k)}$ mit $\xi - {}^1/_8\, \Delta < \xi'' < \xi$ gäbe es im Intervall $(\xi - \Delta, \xi'')$ eine Teilmenge vom Maße $> {}^1/_2\,(\xi'' - \xi + \Delta) > {}^7/_{16}\, \Delta$, in deren Punkten (x)

$$\chi^{(k,n)}(x) \leqq \chi^{(k,n)}(\xi'') \tag{16}$$

wäre. Es ließe sich somit einen Punkt x angeben zwischen $\xi - \Delta$ und ξ'', für den sowohl (15) wie (16) gelten würde. Aber daraus und aus (11) (mit ξ'' statt X) folgte sodann:

$$0 \leqq \chi^{(k,n)}(\xi) - \chi^{(k,n)}(\xi'') < \eta,$$

was der gemachten Annahme widerspricht.

Durch Betrachtung von $-\chi^{(k,n)}(-x)$ folgt aus dem Vorigen, daß in einem rechtsseitigen Verdichtungspunkte ξ_1 von $E_{n,i}^{(k)}$

$$\chi^{(k,n)}(\xi_1) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi \text{ auf } E_{n,i}^{(k)}}} \chi^{(k,n)}(x) \tag{17}$$

ist.

$\psi_4^{(k)}(x)$ ist unterhalb totalstetig auf $E_{n,i}^{(k)}$; auf Grund von (14) und (17) wird sie es darum auch sein auf $H_{n,i}^{(k)}$ und dadurch wieder auf dem perfekten Kerne von $H_{n,i}^{(k)} \cdot P_k$ (siehe die Def. C_2). Da k, n und i willkürlich gewählt waren, genügt $\psi_4(x)$ den Bedingungen der Definition C_1.

Die zweite Hälfte des Satzes folgt aus der ersten durch Betrachtung von $-\varphi_4(x)$ [und $-f(x)$] [28]).

Definition 9. Wenn die untere Schranke aller $\psi_4(b)$-Werte (s. Def. C_2) und die obere Schranke aller $\varphi_4(b)$-Werte (s. Def. D_2) einander gleich sind, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das β_4-Integral* $U_4(a, b)$ von $f(x)$ über (a, b).

§ 9. **Definition C_3.** $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* $\psi_5(x)$ soll den Bedingungen genügen: 1⁰ sie ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2⁰ $\psi_5(a) = 0$; 3⁰ es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge A, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_k), derartig, daß jede Funktion $\psi_5^{(k)}(x)$, welche in a und b und auf der zugehörigen Menge P_k mit $\psi_5(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b), approximativ stetig ist für $a \leqq x \leqq b$ und in den Punkten von P_k, diejenigen einer abzählbaren Teilmenge A_k ausgenommen, eine untere Derivierte

$$\underline{D}\, \psi_5^{(k)}(x) \geqq f(x) \quad \text{und} \quad \neq -\infty$$

hat [29]).

(**Definition D_3**). Die Definition einer *Minorante* $\varphi_5(x)$ erhält man dadurch, daß man in Definition D_2 φ_5 statt φ_4, $\varphi_5^{(k)}$ statt $\varphi_4^{(k)}$ und $\bar{D}\, \varphi_5^{(k)}(x)$ statt $\overline{AD}\, \varphi_4^{(k)}(x)$ liest [29]).

Definition 10. Wenn die untere Schranke aller $\psi_5(b)$-Werte (s. Def. C_3) und die obere Schranke aller $\varphi_5(b)$-Werte (s. Def. D_3) einander gleich sind, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das β_5-Integral* $U_5(a, b)$ von $f(x)$ über (a, b).

Die Definitionen 8, 9 *und* 10 *sind einander aequivalent.*

Beweis. Aus den C- und D-Definitionen und Satz IX geht hervor, daß es genügt dies für die Definitionen 8 und 10 zu zeigen.

[28]) In gleicher Weise läßt sich zeigen: wenn für die im abgeschlossenen Intervall (a, b) approximativ stetige Funktion $G(x)$ in den Punkten einer Teilmenge E $\underline{AD}\, G(x) \neq -\infty$ $[\overline{AD}\, G(x) \neq +\infty]$ ist, so wird E sich, ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken lassen von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf deren jeder $G(x)$ unterhalb totalstetig [oberhalb totalstetig] ist.

[29]) In der Bedingung 3⁰ „stetig" lesend statt „approximativ stetig" bleibt die hier folgende Definition 10 doch gleichwertig an die Definitionen 8 und 9.

Aus Satz IX und den Definitionen C_2 und C_3, D_2 und D_3 folgt, daß jede nach Definition 10 integrierbare Funktion es auch ist nach Definition 8.

Wenn, umgekehrt, $f(x)$ über (a,b) integrierbar ist nach Definition 8, so wird sie es auch sein nach Definition 7. (a, b) läßt sich somit, ausgenommen in den Punkten einer höchstens abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), auf deren jeder die nach Definition 7 zugehörige Funktion $G_k(x)$ totalstetig ist. Da $G_k(x)$ fast überall in (a, b) eine Ableitung, $G(x)$ fast überall auf H_k eine mit dieser Ableitung zusammenfallende approximative Ableitung hat, welche außerdem fast überall gleich $f(x)$ ist, wird sich $G_k(x)$ auffassen lassen als das Lebesguesche Integral über (a, x) einer Funktion $g_k(x)$, welche in den Punkten von H_k mit $f(x)$ zusammenfällt und in den komplementären Intervallen von H_k gleich $G'_k(x)$ ist. Zu jeder Menge H_k nehme man ein positives ε_k an, derartig, daß $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_k+\ldots=\varepsilon$ sei, wobei ε vorher willkürlich klein gewählt sei. Es gibt nun zu jeder Funktion $G_k(x)$ eine in (a, b) nicht-abnehmende, stetige Funktion $\chi_k(x)$ mit $\chi_k(a)=0$ und $\chi_k(b)<\varepsilon_k$, welche, zu $G_k(x)$ addiert, eine Majorante von $G_k(x)=\int\limits_a^x(L)\ g_k(x)\,dx$ liefert, deren untere Derivierte in jedem Punkte von $(a, b)\geqq g_k(x)$ und $\neq-\infty$ ist. Bei genauer Betrachtung sieht man dennoch leicht, daß $G(x)+\sum\limits_{(k)}\chi_k(x)$ eine Majorante $\psi_5(x)$ (nach Def. C_3) von $f(x)$ sein wird, welche in (a, b) um weniger als ε von $G(x)$ abweicht.

In analoger Weise läßt sich eine Minorante $\varphi_5(x)$ (nach Def. D_3) von $f(x)$ angeben, welche in (a, b) um weniger als ε von $G(x)$ abweicht.

Da ε willkürlich ist, wird $f(x)$ über (a, b) integrierbar sein nach Definition 10 [30]).

§ 10. Wenn man in die Definitionen C_2 und D_2 nur eine Menge P_k bzw. nur eine Menge Q_k zuläßt, zusammenfallend mit dem abgeschlossenen Intervall (a, b), so liefert Definition 9 ein von Burkill [31]) behandeltes, approximativ stetiges Integral. *Jede approximativ stetige Funktion, welche in allen Punkten von (a, b), eine abzählbare Teilmenge ausgenommen, eine endliche approximative Ableitung hat, ist schon ein unbestimmtes Integral nach der „abgeänderten“ Definition 9.*

[30]) Aus der in Fußn. 29 gemachten Bemerkung folgt leicht, daß die in Math. Ztschr. 37 (1933), S. 161—169 von uns behandelte Integraldefinition auch ebenso weit führt wie die Definitionen 8, 9 und 10.

[31]) Siehe Burkill, Math. Ztschr. 34 (1931), S. 270—278; nur werden bei Burkill keine abzählbaren Ausnahmemengen zugelassen für die in den Definitionen C_2 und D_2 genannten Ungleichungen. — Aus Definition 4 folgt, daß jedes α-Integral auch ein Integral ist nach der „abgeänderten“ Definition 9.

§ 11. **Lemma.** *Wenn die im abgeschlossenen Intervall (a, b) approximativ stetige Funktion $F(x)$ in den Punkten von Teilmengen E und E' endliche rechte bzw. linke extreme approximative Derivierte hat:*

$$-\infty<\underline{AD}_r\,F(x)\leqq\overline{AD}_r\,F(x)<+\infty,$$

$$\text{bzw.}\quad -\infty<\underline{AD}_l\,F(x)\leqq\overline{AD}_l\,F(x)<+\infty,$$

so wird sich jede der Mengen E und E', ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Teilmenge, überdecken lassen von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf deren jeder $F(x)$ totalstetig [32]) ist.

Beweis. Es läßt sich E betrachten als Summe von abzählbar vielen Mengen $\{E_{n,i}\}$, wobei i eine ganze, n eine natürliche Zahl ist, welche in abgeschlossenen Intervallen $\left(\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n}\right)$ enthalten sind und mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt x eines $E_{n,i}$

$$(18)\qquad |F(x')-F(x)|\leqq n(x'-x)$$

gilt für die Punkte (x') einer Menge E_x, für die

$$(19)\quad \text{aus } 0<x'-x\leqq h\leqq\frac{1}{n} \text{ immer folgt } m\{E_x\cdot(x, x+h)\}>{}^3/_4 h \text{ [33])}.$$

Seien x_1 und $x_2\,(>x_1)$ zwei willkürlich gewählte Punkte eines $E_{n,i}$. Dann gilt, wenn $x_3-x_2=x_2-x_1$ ist, für die Punkte (x) einer Teilmenge T_1 von (x_1, x_3) mit $m(T_1)>{}^3/_4(x_3-x_1)$, daß

$$(20)\qquad |F(x)-F(x_1)|\leqq n(x-x_1)$$

und für die Punkte einer Teilmenge T_2 von (x_2, x_3) mit $m(T_2)>{}^3/_4\,(x_3-x_2)$, daß

$$(21)\qquad |F(x)-F(x_2)|\leqq n(x-x_2)$$

ist. Aus $m\{T_1\cdot(x_2, x_3)\}>{}^3/_4\,(x_3-x_1)-(x_2-x_1)={}^1/_2\,(x_3-x_2)$

[32]) D. h. $F(x)$ ist auf einer derartigen Menge sowohl unterhalb wie oberhalb totalstetig. Siehe [23]) und [24]).

[33]) Man vergleiche den Beweis von Satz IX; auch Saks, loc. cit. [12]), S. 192 u. 193.

und $m(T_2) > {}^3/_4 (x_3 - x_2)$ folgt, daß es in (x_2, x_3) Punkte (x) gibt, für die sowohl (20) wie (21) gelten. Das liefert dann:

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leqq 3n(x_2 - x_1);$$

$F(x)$ wird totalstetig sein auf jeder Menge $E_{n,l}$.

ξ sei ein rechtsseitiger Verdichtungspunkt von $E_{n,l}$ und x ein willkürlicher, zu $E_{n,l}$ gehörender Punkt. Bei willkürlich positivem ε gibt es ein positives $\delta\left(<\frac{1}{n}\right)$, derartig, daß in jedem Intervall $(\xi, \xi+h)$ mit $0 < h \leqq \delta$ die Menge der Punkte mit

$$|F(x) - F(\xi)| < \varepsilon$$

ein Maß hat $> {}^3/_4 h$. Wenn $\{h_k\}$ eine nach Null konvergierende Folge von positiven Zahlen ist, alle kleiner als δ, so gibt es zu jedem k im Intervall $(\xi, \xi + {}^1/_4 h_k)$ einen zu $E_{n,l}$ gehörenden Punkt ξ_k. Im Intervall $(\xi_k, \xi + h_k)$ hat die Menge der Punkte (x), für die

$$|F(x) - F(\xi_k)| \leqq n(x - \xi_k)$$

ist, ein Maß $> {}^3/_4 (\xi + h_k - \xi_k) > {}^9/_{16} h_k$ und die Menge der Punkte $(\bar{x})$ mit

$$|F(\bar{x}) - F(\xi)| < \varepsilon$$

ein Maß $> {}^1/_2 h_k$. Beide Mengen haben also Punkte gemeinsam; es sei x_k einer dieser Punkte. Man hat also für die natürlichen Zahlen k:

$$\xi < \xi_k < x_k < \xi + h_k; \quad \lim_{k\to\infty} h_k = 0$$

und

$$|F(x_k) - F(\xi_k)| \leqq n(x_k - \xi_k); \quad |F(x_k) - F(\xi)| < \varepsilon;$$
$$|F(x) - F(\xi_k)| \leqq 3n|x - \xi_k|.$$

Daraus folgt:

$$|F(x) - F(\xi)| < 3n|x - \xi| + \varepsilon.$$

Da ε willkürlich ist, hat man auch:

$$|F(x) - F(\xi)| \leqq 3n|x - \xi|. \tag{22}$$

Wäre ξ linksseitiger Verdichtungspunkt von $E_{n,l}$ gewesen, so hätte sich die Ungleichung (22) in sogar einfacher Weise ableiten lassen. $F(x)$ wird totalstetig sein auf der abgeschlossenen Hülle $H_{n,l}$ eines jeden $E_{n,l}$; sie wird somit auch totalstetig sein auf dem perfekten Kerne eines jeden $H_{n,l}$. Das Lemma ist damit bewiesen.

Nennen wir jedes nach einer der Definitionen 6—10 gebildete Integral *ein β-Integral*, so haben wir den

Satz X. *Wenn zu der für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetigen Funktion $F(x)$ eine Überdeckung von (a, b) gehört durch eine abzählbare Menge A und abzählbar viele perfekte Mengen (E_k), deren jede die Eigenschaft hat, daß die Funktion $F_k(x)$, welche in a und b und auf der betrachteten Menge E_k mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu E_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b), approximativ stetig ist für $a \leqq x \leqq b$ und in jedem Punkte von E_k, mit Ausnahme derjenigen einer abzählbaren Menge A_k, entweder*

$$-\infty < \underline{AD}_r F_k(x) \leqq \overline{AD}_r F_k(x) < +\infty$$

oder $$-\infty < \underline{AD}_l F_k(x) \leqq \overline{AD}_l F_k(x) < +\infty$$

oder beides gilt,

so wird $F(x)$ ein unbestimmtes β-Integral ihrer fast überall existierenden, approximativen Ableitung sein.

Beweis. Aus dem obigen Lemma folgt, daß $F(x)$ in (a, b) UTV[34]) ist. Sie hat somit in fast allen Punkten von (a, b) eine endliche approximative Ableitung [21]). $F(x) - F(a)$ ist sowohl eine Majorante nach Definition C_1 wie eine Minorante nach Definition D_1 ihrer approximativen Ableitung. Aus Definition 8 folgt, daß sie dadurch ein β-Integral ihrer approximativen Ableitung sein wird [35]).

Speziell folgt aus diesem Satz der am Ende der Einleitung genannte Satz; auch *daß jede für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetige Funktion, welche in allen Punkten von (a, b), abzählbar viele ausgenommen, eine endliche einseitige approximative Ableitung hat, ein β-Integral sein muß.*

§ 12. Aus Definition 7 folgt, daß auch das unbestimmte β-Integral in (a, b) *stetig* ist *im verallgemeinerten Sinne* (siehe § 4).

Lemma. *Wenn die Funktion $F(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) SV ist und wenn dann in den Punkten von Teilmengen E_1 und E_2 von (a, b)*

[34]) Eine Funktion ist unterhalb totalstetig im verallgemeinerten Sinne (abgekürzt: UTV) in (a, b), wenn (a, b) sich in abzählbar viele meßbare Teilmengen zerlegen läßt, auf denen sie unterhalb totalstetig ist. Siehe Ridder, loc. cit. [2]), S. 244.

[35]) Wir bemerken nebenbei, daß der Satz X sich auch mit Hilfe von Definition 7 ableiten läßt, ebenso wie der analoge Satz IV mit Hilfe von Definition 2.

entweder $\underline{D}_l F(x) \neq -\infty$, *oder* $\underline{D}_r F(x) \neq -\infty$, *oder beides*,

bzw. entweder $\overline{D}_l F(x) \neq +\infty$, *oder* $\overline{D}_r F(x) \neq +\infty$, *oder beides*

gilt, so werden E_1 *und* E_2 *sich, ausgenommen in den Punkten von (ev. leeren) abzählbaren Teilmengen* A_1 *bzw.* A_2, *überdecken lassen von abzählbar vielen perfekten Mengen, auf deren jeder* $F(x)$ *unterhalb totalstetig bzw. oberhalb totalstetig ist.*

Beweis. Da $F(x)$ in (a, b) SV ist, gibt es abzählbar viele perfekte Teilmengen (N_j), auf deren jeder $F(x)$ stetig ist und welche (a, b), ausgenommen in abzählbar vielen Punkten, überdecken. Betrachten wir eine willkürlich ausgewählte Menge N_j; die Funktion $F_j(x)$, welche auf N_j mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu N_j komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (a, b), ist stetig für $a \leq x \leq b$ und man hat auf $(E_1 \cdot N_j)$

$$\text{entweder} \quad \underline{D}_l F_j(x) \neq -\infty \quad \text{oder} \quad \underline{D}_r F_j(x) \neq -\infty$$

und auf $(E_2 \cdot N_j)$

$$\text{entweder} \quad \overline{D}_l F_j(x) \neq +\infty \quad \text{oder} \quad \overline{D}_r F_j(x) \neq +\infty.$$

Betrachten wir die Teilmenge P_j von $(E_1 \cdot N_j)$, in deren Punkten $\underline{D}_r F_j(x) \neq -\infty$ ist. P_j ist Summe von abzählbar vielen Mengen $\{P_j^{(n,i)}\}$, wobei i eine ganze, n eine natürliche Zahl ist, welche in abgeschlossenen Intervallen $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ enthalten sind und mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt x eines $P_j^{(n,i)}$

$$\text{aus} \quad 0 < x' - x \leq \frac{1}{n} \quad \text{folgt} \quad F_j(x') - F_j(x) \geq -n(x' - x);$$

$F_j(x)$ ist somit auf einer jeden der Mengen $\{P_j^{(n,i)}\}$ unterhalb totalstetig; sie wird es auch sein auf der zu N_j gehörenden abgeschlossenen Hülle von $P_j^{(n,i)}$ und dadurch auf dem perfekten Kerne $K_j^{(n,i)}$ dieser Hülle. Da $F_j(x)$ auf $K_j^{(n,i)}$ mit $F(x)$ zusammenfällt, ist auch $F(x)$ unterhalb totalstetig auf $K_j^{(n,i)}$. Es läßt sich jede Menge P_j überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen, auf deren jeder $F(x)$ totalstetig ist, und eine (ev. leere) abzählbare Teilmenge. Daraus folgt leicht, daß dasselbe auch gilt für die Menge aller Punkte von E_1, in welchen $\underline{D}_r F(x) \neq -\infty$ ist.

Der weitere Teil des Beweises ist evident.

Satz XI. *Die Funktion* $F(x)$, *im abgeschlossenen Intervall* (a, b) *approximativ stetig und* SV, *wird ein unbestimmtes* β*-Integral ihrer sodann fast überall existierenden approximativen Ableitung sein, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:*

1° *es gibt abzählbar viele perfekte Teilmengen* (P_k), *deren jede die Eigenschaft hat, daß die Funktion* $F_k(x)$, *welche in* a *und* b *und auf der betrachteten Menge* P_k *mit* $F(x)$ *zusammenfällt und sich linear ändert in den zu* P_k *komplementären, abgeschlossenen Intervallen von* (a, b), *approximativ stetig ist für* $a \leq x \leq b$, *und in jedem Punkte einer Teilmenge* p_k *von* P_k *gilt entweder*

$$-\infty < \underline{AD}_l F_k(x) \leq \overline{AD}_l F_k(x) < +\infty$$

$$\text{oder} \quad -\infty < \underline{AD}_r F_k(x) \leq \overline{AD}_r F_k(x) < +\infty$$

oder beides;

2° *es gibt abzählbar viele perfekte Teilmengen* (Q_j), *deren jede die Eigenschaft hat, daß die Funktion* $F_j(x)$, *in derselben Weise zu* $F(x)$ *und* Q_j *konstruiert wie* $F_k(x)$ *zu* $F(x)$ *und* P_k, *approximativ stetig ist für* $a \leq x \leq b$, *und in jedem Punkte einer Teilmenge* q_j *von* Q_j *gilt entweder*

$$\underline{AD}\, F_j(x) \neq \pm\infty \quad \text{oder} \quad \overline{AD}\, F_j(x) \neq \pm\infty$$

oder beides;

3° *es gibt abzählbar viele perfekte Teilmengen* (R_m), *deren jede die Eigenschaft hat, daß die (wie* $F_k(x)$ *und* $F_j(x)$ *konstruierte) Funktion* $F_m(x)$ *in jedem Punkte einer Teilmenge* r_m *von* R_m *mindestens einer der Bedingungen:*

$$\underline{D}_l F_m(x) \neq \pm\infty; \quad \underline{D}_r F_m(x) \neq \pm\infty;$$

$$\overline{D}_l F_m(x) \neq \pm\infty; \quad \overline{D}_r F_m(x) \neq \pm\infty$$

genügt;

4° *das abgeschlossene Intervall* (a, b) *ist Summe der Mengen* (p_k), (q_j), (r_m) *und einer (ev. leeren) abzählbaren Teilmenge* [36]).

[36]) Wenn man $F(x)$ stetig annimmt in (a, b), so sind die Bedingungen über approximative Stetigkeit und über Stetigkeit im verallgemeinerten Sinne schon dadurch erfüllt; $F(x)$ ist dann nicht nur ein β-Integral, sondern schon ein allgemeines Denjoysches Integral. Man vergleiche damit Saks, loc. cit. [13]), S. 194 (Th. 23) und Ridder, Nieuw Archief (2) 17 : 2 (1932), S. 169 (Th. 1).

Beweis. Aus dem Lemma von § 11, Fußn. 28 und dem Lemma dieses § folgt, daß (a, b) sich überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen (E_j), auf deren jeder $F(x)$ unterhalb totalstetig oder oberhalb totalstetig (oder beides) ist, und einer (ev. leeren) abzählbaren Menge. Da $F(x)$ außerdem SV ist in (a, b), kann man mittels transfiniter Induktion zeigen, daß (a, b) sich zerlegen läßt in einer abzählbaren Menge A und abzählbar vielen perfekten Mengen (K_j), auf denen $F(x)$ stetig und UT oder OT, also beidesmal von beschränkter Variation ist. $F(x)$ genügt weiter der Bedingung (N) von Lusin [37]. Sie muß somit auf jeder Menge K_j totalstetig sein. Aus den Definitionen C_1, D_1 und 8 folgt die Behauptung des Satzes.

§ 13. In diesem Paragraphen wollen wir schließlich eine Verallgemeinerung behandeln einer von Khintchine herrührenden Integraldefinition, welche weiter reicht als die spezielle Denjoysche, jedoch weniger weit als die allgemeine Denjoysche Definition [38].

Definition 11. Ein für $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $f(x)$ wird über (a, b) *β_1^0-integrierbar* sein, wenn es eine für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetige Funktion $G(x)$ gibt mit den Eigenschaften: 1° $G(a) = 0$; 2° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (H_k), derartig, daß für jedes H_k die Funktion $G_k(x)$, welche auf H_k mit $G(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu H_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen des kleinsten, abgeschlossenen, H_k enthaltenden Intervalles u_k, totalstetig ist in u_k; 3° es soll die Ableitung $G'(x)$ fast überall in (a, b) existieren und gleich $f(x)$ sein. $G(x)$ wird dann das bestimmte β_1^0-Integral von $f(x)$ über (a, x) sein $(a < x \leqq b)$.

Definition C^0. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* $\psi^0(x)$ soll den Bedingungen genügen: 1° $\psi^0(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\psi^0(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen vielleicht in abzählbar vielen Punkten, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (H_k), derartig, daß $\psi^0(x)$ unterhalb totalstetig ist auf jedem H_k; 4° die untere Derivierte von $\psi^0(x)$ ist in fast allen Punkten von $(a, b) \geqq f(x)$.

[37]) Siehe Saks, loc. cit. [12]), S. 176 (Th. 8) u. S. 187 (Th. 17).

[38]) Man siehe A. Khintchine, Comptes Rendus Ac. Sci Paris 162 (1916), S. 287—291 und Ridder, loc. cit. [2]), S. 247—251; wir nannten ein derartiges Integral ein Denjoy-Khintchinesches Integral.

Definition D^0. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte *Minorante* $\varphi^0(x)$ soll den Bedingungen genügen: 1° $\varphi^0(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\varphi^0(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen vielleicht in abzählbar vielen Punkten, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_k), derartig, daß $\varphi^0(x)$ oberhalb totalstetig ist auf jedem P_k; 4° die obere Derivierte von $\varphi^0(x)$ ist in fast allen Punkten von $(a, b) \leqq f(x)$.

Satz XII. *Die in den Definitionen C^0 und D^0 eingeführten Majoranten und Minoranten besitzen fast überall eine endliche Ableitung, wenn ihre Klassen gleichzeitig existieren.*

Das folgt aus den Bedingungen 4° in den beiden Definitionen auf Grund des Denjoy-Saksschen Satzes [39]) über die extremen Derivierten endlichwertiger Funktionen [40]).

Aus Satz XII folgt, daß die Majoranten $\{\psi^0(x)\}$ und die Minoranten $\{\varphi^0(x)\}$ den Bedingungen der Definitionen C_1 bzw. D_1 genügen und daß somit für sie Satz VII gültig bleibt.

Definition 12. Wenn die untere Schranke aller $\psi^0(b)$-Werte und die obere Schranke aller $\varphi^0(b)$-Werte einander gleich sind, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das β_2^0-Integral* $U_2^0(a, b)$ von $f(x)$ über (a, b).

Die Definitionen 11 *und* 12 *sind einander aequivalent.*

Beweis. Wenn $f(x)$ ein β_1^0-Integral $G(x)$ hat in (a, b), so ist $G(x)$ sowohl eine Majorante nach Definition C^0 wie eine Minorante nach Definition D^0. $f(x)$ ist somit auch β_2^0-integrierbar und beide Integrale haben denselben Wert.

Sei nun, umgekehrt, $f(x)$ β_2^0-integrierbar. Dann läßt sich zeigen daß das β_2^0-Integral $U_2^0(a, x)$ fast überall in (a, b) eine Ableitung hat Wenn $\psi^0(x)$ eine Majorante nach Definition C^0 und $\varphi^0(x)$ eine Minorante nach Definition D^0 ist, so gibt es einen maßgleichen Kern K von (a, b) in dessen Punkten jede dieser Fuktionen eine endliche Ableitung hat (Satz XII). In einem willkürlichen Punkte ξ von K wird für jedes $x > \xi$:

$$\psi^0(x) - U_2^0(a,x) \geqq \psi^0(\xi) - U_2^0(a,\xi) \text{ und } U_2^0(a\, x) - \varphi^0(x) \geqq U_2^0(a,\xi) - \varphi^0(\xi)$$

oder

$$\psi^0(x) - \psi^0(\xi) \geqq U_2^0(a, x) - U_2^0(a, \xi) \geqq \varphi^0(x) - \varphi^0(\xi)$$

[39]) Siehe z. B. Saks, Fund. Math. 5 (1924), S. 98 oder Ridder, loc. cit. [11]) erstes Zitat, S. 1.

[40]) Man vergleiche Ridder, loc. cit. [2]), S. 247 Satz (XIII).

sein. Aus diesen Ungleichungen und den damit übereinstimmenden für den Fall $x < \xi$ folgt, daß die vier extremen Derivierten von $U_2^0(a, x)$ in ξ zwischen den Ableitungen von $\psi^0(x)$ und $\varphi^0(x)$ liegen. Also wird nach dem Denjoy-Saksschen Satze [39]) eine endliche Ableitung von $U_2^0(a, x)$ existieren in fast allen Punkten von K und von (a, b).

Aus den Definitionen C^0, D^0, C_1 und D_1 folgt, daß $f(x)$ auch integrierbar ist nach Definition 8 und der damit aequivalenten Definition 7. Daraus und aus der Existenz der Ableitung von $U_2^0(a, x)$ in fast allen Punkten von (a, b) folgt, daß $U_2^0(a, x)$ auch ein β_1^0-Integral (nach Def. 11) ist. —

Nennen wir die nach den Definitionen 11 und 12 gebildete Integrale *β^0-Integrale*, so folgt aus der Existenz einer endlichen Ableitung in fast allen Punkten von (a, b) daß das β^0-Integral $U^0(a, x)$ in einem maßgleichen Kerne von (a, b) stetig sein muß.

§ 14. Zusammenfassung. In (a, b) ist das α^*-Integral (§ 5) stetig in allen Punkten, das α-Integral (§§ 1—3) bis auf die Punkte einer höchstens abzählbar unendlichen Menge, das β^0-Integral (§ 13) bis auf eine Menge vom Maße Null, das abgeänderte Burkillsche Integral (§ 10) und das β-Integral (§§ 6—9) bis auf Mengen, deren Maß beliebig dicht zu $b - a$ nähern kann. Bei allen Integralen liegen die Stetigkeitspunkte überall dicht in (a, b).

Der Umfang der Definitionen ist ganz verschieden; man hat:

1° α^*-Integration $\subset \alpha$-Int $\subset \beta^0$-Int. $\subset \beta$-Int.; und

2° α^*-Integration $\subset \alpha$-Int. $\subset$ (abgeänderte) Burkill-Int. $\subseteq \beta$-Int.

Daneben ist:

α^*-Integration $\equiv$ spezielle Denjoy-Int. $\equiv$ Perron-Int.;
Denjoy-Khintchine-Int. $\subset \beta^0$-Int.; allgemeine Denjoy-Int. $\subset \beta$-Int. [41]).

[41]) Zusatz bei der Korrektur. Wenn man in den Definitionen der §§ 6—9 überall statt „approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$" liest „in jedem Punkte x von (a, b) stetig auf einer Menge E_x mit unterer innerer Dichte $\geqq \tau$ in diesem Punkte ($\tau > 1/2$ und unveränderlich)" und in Def. 6 die Mengen E_α, E_β in α bzw. β untere rechte bzw. untere linke Dichte $\geqq \tau$ haben (wieder für dasselbe τ), so bleiben die in dieser Weise verallgemeinerten Definitionen 6—10 einander gleichwertig. Sie umfassen dann eine neuerdings von S. Izumi in den Proc. Imp. Ac. Japan **9** (1933), S. 570—573 mitgeteilte Integraldefinition; zum Beweise hat man nur die Betrachtungen der Seiten 150—153 in leicht ersichtlicher Weise abzuändern.

22. VIII. 1933.

Über die T- und N-Bedingungen und die approximativ stetigen Denjoy-Perron Integrale.

Von

J. Ridder (Groningen).

In einer vorigen Arbeit [1]) (Ridder 5) haben wir u. a. zwei Integralbegriffe, das α- und das β-Integral, behandelt, welche zu betrachten sind als Verallgemeinerungen des speziellen bzw. des allgemeinen Denjoyschen Integrals; wir untersuchten daselbst ihre gegenseitigen Verhältnisse und ihre Verhältnisse zu anderen Integralbegriffen und gaben weite Klassen von Funktionen an, welche Integrale in dem einen oder dem anderen Sinne sind. Außerdem hatten wir schon früher [2]) die elementarsten Eigenschaften jener Integrale besprochen. Es ist unsere Absicht in den folgenden Seiten einige weniger elementaren Eigenschaften der beiden Denjoyschen Integrale

[1]) Der Kürze halber fügen wir die hauptsächlichsten der in den folgenden Seiten zitierten Arbeiten hier zusammen:

J. Ridder: 1. *Über den Perronschen Integralbegriff und seine Beziehung zu den R_-, L_-, und D_- Integralen*, Math. Ztschr. **34** (1931), 234—269.
2. *Der Perronsche Integralbegriff*, Math. Ztschr. **37** (1933), 161—169.
3. *Über approximativ stetige Denjoy-Integrale*, Fund. Math. **21** (1933), 1—10.
4. *Über das allgemeine Denjoysche Integral*, Fund. Math. **21** (1933), 11—19.
5. *Über die gegenseitigen Beziehungen verschiedener approximativ stetiger Denjoy-Perron Integrale.*

S. Saks: 1. *Sur les fonctions continues.* Fund. Math. **17** (1931), 124—151.
2. *Théorie de l'intégralle* (monographie, Warszawa 1933).

[2]) Siehe Ridder, **2** und **3**.