

Wir definieren also — für beliebiges μ und $\lambda < \mu$ — eine Lipschitzsche Transformation f , die den folgenden Bedingungen genügt:

(β_1) Das Mass der Zusammenziehung von f ist genau gleich $\frac{1}{\mu}$;

(β_2) Das Mass der Konzentration von f ist genau gleich $\frac{1}{\lambda}$;

(β_3) Die Transformation ist im ganzen Raume definiert.

Die Beispiele sind ebenso auf der Geraden konstruiert.

Im Falle $\lambda \leq 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } x \leq 0 : f(x) = a \\ \text{„ } 0 \leq x \leq 1 : f(x) = a + \mu \cdot x \\ \text{„ } x \geq 1 : f(x) = a + \mu \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wobei: } a = \frac{\mu \cdot (1 - \lambda)}{\lambda} > 0 \\ \left(\text{d. h. } \lambda = \frac{\mu}{a + \mu} \right. \\ \left. \text{und: } a + \mu = \frac{\mu}{\lambda} > 1 \right) \end{array}$$

Für $\lambda < 1$ ist $x_1 = a + \mu$ der einzige Konzentrationspunkt, und es gilt

$$\lambda_0\{f\} = \lambda_0(x_1) = \frac{\mu}{a + \mu} = \lambda.$$

Für $\lambda = 1$ sind $x_1 = 0$ und $x_2 = a + \mu$ die zwei einzigen Konzentrationspunkte, und es gilt: $\lambda_0(x_1) = \mu$; $\lambda_0(x_2) = \lambda$.

Es gilt also: $\lambda_0\{f\} = \lambda$.

Im Falle $1 < \lambda < \mu$

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } x \leq p : f(x) = p \\ \text{„ } p \leq x \leq 0 : f(x) = x \\ \text{„ } 0 \leq x \leq 1 : f(x) = \mu \cdot x \\ \text{„ } 1 \leq x \leq q : f(x) = q + \mu \cdot (q - x) \\ \text{„ } x \geq q : f(x) = q \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wobei: } p = -\frac{\mu - \lambda}{\lambda - 1} < 0 \\ q = \frac{2\mu}{\mu + 1} \\ \left(\text{d. h. } \lambda = \frac{\mu - p}{1 - p}; q + \mu \cdot (q - 1) = \mu \right) \end{array}$$

Es gibt 2 Konzentrationspunkte: $x_1 = p$ und $x_2 = q$, wobei:

$$\lambda_0(x_1) = \lambda \text{ und } \lambda_0(x_2) = \mu; \text{ also } \lambda_0\{f\} = \lambda.$$

39. Die Hauptsätze I^b und II (§ 22) gestatten auch analoge „Lipschitzsche“ Verallgemeinerungen, nachdem man die Begriffe der μ -Zerstreuung und des λ -Konzentrationspunktes eingeführt hat.

Über die Grenzwerte des logarithmischen Potentials der Doppelbelegung.

Von

W. Nikliborc und W. Stożek (Lwów).

Einleitung.

Eine lange Reihe von Arbeiten, die dem Verhalten des Potentials der Doppelbelegung gewidmet wurde, erzielt die Aufstellung der entsprechenden Formeln und Sätze unter immer geringeren Voraussetzungen sowohl in bezug auf die Kurve, wie auch auf die Dichte. Da ein genauer Bericht über den Stand dieser Untersuchungen in dem Lichtenstein'schen Enzyklopädie — Artikel über Potentialtheorie vorliegt und spätere Arbeiten den hier behandelten Gegenstand nicht berühren, so können wir auf die Besprechung der diesbezüglichen Literatur verzichten.

In der vorliegenden Abhandlung handelt es sich um die möglichst weitgehende Verallgemeinerung der klassischen, das Verhalten des Potentials der Doppelbelegungen charakterisierenden Formeln

$$(A) \quad \begin{aligned} W_+(0) &= W(0) + \pi \cdot f(0) \\ W_-(0) &= W(0) + \pi \cdot f(0). \end{aligned}$$

Die Verfasser gehen von folgenden Voraussetzungen aus: Über die Kurve wird meistens angenommen, daß sie eine stetige Normale besitzt, deren Richtungscosinuse im betrachteten Punkte der Hölder'schen Bedingung genügen. Die Dichte wird als meßbar und mit gewisser Potenz im Lebesgue'schen Sinne integrierbar vorausgesetzt. Genügen die Richtungscosinuse der Normalen der Lipschitz'schen Bedingung, so genügt es, die Dichte als meßbar und integrierbar anzunehmen.

Im § 1 wird eine für das Folgende überaus nützliche, analytische Darstellung der Kurve untersucht. Es zeigt sich für die Potentialtheorie zweckmäßig, die Gleichung der Kurve in der Form $\Theta = \Theta(r)$ zu schreiben. In § 2. werden Abschätzungen gewisser, in der Folge oft vorkommender Integrale, vorgenommen. Der § 3. behandelt das Integral $\int_C \frac{|\cos(r_{PM}, n_M)|}{r_{PM}} ds_M$. Wie überall in der Arbeit, wird ein offener Bogen C betrachtet, und das Verhalten des Potentials im Randpunkte desselben untersucht. Es zeigt sich, daß das Integral $\int_C \frac{|\cos(r_{PM}, n_M)|}{r_{PM}} ds_M$ in einem abgeschlossenen, die Halbtangente zu dem Bogen C nichtenthaltenden, Winkel beschränkt ist. Es muß betont werden, daß die Kurve C dabei keineswegs der Klasse Ah angenommen werden muß, sondern daß es genügt, die Höldersche Bedingung für die Richtungscosinuse der Normalen lediglich in dem betrachteten Eckpunkte voranzusetzen.

Die Untersuchung des Verhaltens des Potentials geschieht auf folgendem Wege: Man betrachtet das von einer geeigneten, auf der Halbtangente zum Bogen C , ausgebreiteten Dichte, herrührende Potential und nachher die Differenz der beiden Potentiale. Im § 4. wird ein Satz bewiesen, der die Untersuchung des Potentials der Doppelbelegung, auf das Potential der auf einer Geraden ausgebreiteten Belegung, zurückzuführen gestattet.

Die §§ 5. und 6. enthalten die Untersuchungen über das Potential der Doppelbelegung einer Geraden. Es werden Ungleichheiten für $\lim W(P)$ und $\underline{\lim} W(P)$ aufgestellt, welche eine weitgehende Verallgemeinerung der klassischen Formeln darstellen. Es handelt sich hierbei immer um das Verhalten in der Nähe des Eckpunktes einer geradlinigen Strecke.

Im § 7 werden die vorher gewonnenen Ergebnisse auf den Fall des Eckpunktes einer Kurve übertragen. In den Formeln (I) und (II) sind die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit enthalten. Es wird nachher der Fall eines regulären Punktes der Kurve betrachtet und die diesbezüglichen Formeln (III) aufgestellt. Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die tangentiale Annäherung des Punktes an die Kurve in dieser Arbeit nicht untersucht wird. Es wird noch in diesem Abschnitte das Verhalten des Potentials in einem, den Bogen C in zwei Teile trennenden, Punkte untersucht.

Im § 8 wird das Hauptergebnis abgeleitet: Setzt man die Kurve C als von der Klasse Ah voraus, so stellt es sich heraus, daß die klassischen Formeln (A) fast überall auf der Kurve C gelten. Dieses Resultat kann man natürlich aus der Fatouschen Arbeit unter der Anwendung der konformen Abbildung ableiten, doch sind die Ergebnisse der Verfasser allgemeiner, indem Ungleichheiten aufgestellt werden, die sich fast überall auf (A) reduzieren.

Der § 9 enthält ein Beispiel, daß die gewonnenen Ergebnisse sich in gewisser Richtung nicht mehr verallgemeinern lassen.

Die gewonnenen Ergebnisse gestatten, wie es in einer darauffolgenden Arbeit dargetan wird, die Hauptsätze der Fatouschen Arbeit über das Poissonsche Integral, als Sonderfälle unserer allgemeinen Resultate abzuleiten, wobei sich noch manche Verallgemeinerungen ergeben. Auch das Dirichletsche Problem läßt sich mittels der Integralgleichungen unter allgemeinen Voraussetzungen über die Dichte lösen. Wichtig erscheint dabei der Umstand, daß die von uns benutzte Methode und Ergebnisse sich ohne größere Schwierigkeiten auf den Raum übertragen lassen, wodurch das nur für die Ebene gültige Verfahren der konformen Abbildung vermieden wird. Auch das Verhalten des Potentials bei der tangentialen Annäherung und das Verhalten desselben auf der Kurve selbst wird a. a. O. dargestellt.

In methodischer Hinsicht sei noch Folgendes bemerkt: Die im Texte vorkommenden Konstanten werden fortlaufend numeriert und mit A_n bezeichnet. Der Lebesguesche Satz über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen wird öfters benutzt¹⁾.

§ 1. Geometrische Hilfssätze.

Es sei $f(\xi)$ eine im Intervalle $[0, a]$ stetige und stetig differenzierbare Funktion. Es sei noch

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Bezeichnet man mit (r, Θ) die Polarkoordinaten eines Punktes der Ebene, so gilt

¹⁾ Dieser Arbeit wurde die Note der Verfasser „Sur les potentiels logarithmiques des doubles couches“ C. R. 1933, T. 197, p. 808 vorausgeschickt.

Satz: „Die Kurve

$$(1) \quad \eta = f(\xi)$$

läßt sich in einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunktes durch eine Gleichung

$$(2) \quad \theta = \theta(r)$$

darstellen, wobei die Funktion $\theta(r)$ folgende Eigenschaften besitzt:

1° $\theta(r)$ ist in einem hinreichend kleinen Intervalle $[0, R]$ stetig und besitzt für $r > 0$ stetige Ableitung erster Ordnung;

$$2^\circ \quad \theta(0) = 0$$

$$3^\circ \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \theta'(r) = 0^u.$$

Beweis. Der Abstand des Punktes $\{\xi, f(\xi)\}$ ist eine für hinreichend kleine ξ wachsende Funktion; hieraus folgt, daß für hinreichend kleine r jeder Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

mit der Kurve (1) genau einen Punkt gemeinsam besitzt. Schreibt man die Gleichung der Kurve (1) in Polarkoordinaten, so ist

$$(3) \quad r \sin \theta - f(r \cos \theta) = 0.$$

Aus dem oben Gesagten folgt, für hinreichend kleine r , die Existenz genau einer der Gleichung (3) und den Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

genügenden Zahl θ .

Wir können also tatsächlich die Kurve (1) durch eine Gleichung (2) darstellen, sobald wir uns nur auf hinreichend kleine Werte von r beschränken. Setzt man $\theta(0) = 0$, so wird $\theta(r)$ wegen $\lim \theta(r) = 0$ auch für $\theta = 0$ stetig. Ist $\theta \neq 0$, so gilt

$$\theta'(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{f' \cdot \cos \theta - \sin \theta}{f' \cdot \sin \theta + \cos \theta},$$

woraus der letzte Teil unserer Behauptung ohne Weiteres folgt.

Die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes ist richtig, d. h. es gilt der

Satz: „Genügt die Funktion $\theta(r)$ den im vorigen Satze aufgezählten Bedingungen, so läßt sich die Kurve (2) in einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunktes durch eine Gleichung (1) darstellen. $f(\xi)$ wird dabei in einem Intervalle $[0, a]$ stetig und stetig differentierbar, wobei noch $f(0) = f'(0) = 0$ gilt“.

Beweis: Aus

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi &= r \cos \theta(r) \\ \eta &= r \sin \theta(r) \end{aligned}$$

folgt, daß, für hinreichend kleine r , ξ wachsend ist, so daß man die erste der Gleichungen (4) umkehren kann. Es ist also

$$\eta = r(\xi) \cos \theta[r(\xi)] = f(\xi).$$

Wie man leicht sieht, besitzt die Funktion $f(\xi)$ sämtliche oben angegebene Eigenschaften.

Zusatz „Genügt noch die Ableitung $f'(\xi)$ der Hölderschen Bedingung

$$(5) \quad |f'(\xi)| \leq A_1 \cdot \xi^\lambda \quad (0 < \lambda \leq 1),$$

so gilt

$$(6) \quad |\theta(r)| \leq A_2 \cdot r^2$$

$$(7) \quad |\theta'(r)| \leq \frac{A_3}{r^{1-\lambda}}.$$

Umgekehrt: Aus (6) und (7) folgt (5)^u.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Formel für $\theta'(r)$.

Bemerkung 1: Für $\lambda = 1$, also gewiß dann, wenn die Kurve (1) im Nullpunkte eine endliche Krümmung besitzt, ist $\theta'(r)$ beschränkt.

Bemerkung 2: Es sei hier noch ausdrücklich betont, daß wir oben keineswegs vorausgesetzt haben, daß die Kurve (1) von der Klasse Ah^1 ist, sondern lediglich, daß sie der Hölderschen Bedingung für $f'(\xi)$ im Nullpunkte genügt.

^u) Vgl. Lichtenstein. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. II. C. 3. S. 185
Fundamenta Mathematicae T. XXII.

§ 2. Abschätzungen gewisser Hilfsintegrale.

Es sei C eine durch die Gleichung (1) erklärte Kurve; wir setzen, wie früher, voraus, daß $f(\xi)$ in $[0, a]$ stetig und mit stetiger erster Ableitung versehen ist. Der Einfachheit halber setzen wir noch voraus

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

und berechnen mit Ω einen beliebigen, die positive ξ -Achse nicht enthaltenden abgeschlossenen Winkel, dessen Spitze sich im Punkte 0 befindet.

Bezeichnet man mit P einen beliebigen Punkt der Ebene und mit C' einen derart kleinen Bogen der Kurve C , welcher mit Ω nur den Nullpunkt gemeinsam hat, so gilt der

Satz: „Die Ausdrücke

$$\frac{r_{OP}}{r_{MP}}, \frac{r_{MO}}{r_{MP}}$$

sind für alle Lagen von P in Ω , und von M auf C' , beschränkt“.

Beweis:

$$\frac{r_{OP}^2}{r_{PM}^2} = \frac{r_{OP}^2}{r_{OM}^2 - 2r_{OP}r_{OM}\cos\psi + r_{OM}^2}$$

wobei ψ den Winkel zwischen r_{OP} und r_{OM} bedeutet.

Unseren Voraussetzungen zufolge ist

$$\cos\psi \leq q < 1$$

woraus

$$(8) \quad \frac{r_{OP}^2}{r_{PM}^2} \leq \frac{r_{OP}^2}{r_{OM}^2 - 2r_{OP}r_{OM} \cdot q + r_{OP}^2} \leq \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$(9) \quad \frac{r_{OM}^2}{r_{PM}^2} \leq \frac{r_{OM}^2}{r_{OM}^2 - 2r_{OP}r_{OM} \cdot q + r_{OP}^2} \leq \frac{1}{(1-q)^2}$$

folgt. W. z. b. w.

Bezeichnet man jetzt mit R eine beliebige positive, hinreichend kleine Zahl und mit μ eine beliebige, der Ungleichung

$$0 < \mu \leq 2$$

genügende Zahl, so gilt der

Satz: „Die Integrale

$$(10) \quad I_1 = |x| \cdot \int_0^R \frac{r_{OM}^\mu dr_{OM}}{r_{PM}^2}, \quad I_2 = |y| \cdot \int_0^R \frac{dr_{OM}}{r_{PM}^2}$$

$$I_3 = \int_0^R \frac{r_{OM}^{2-\mu}}{r_{PM}^2} dr_{OM}, \quad I_4 = |y| \cdot \int_0^R \frac{r_{OM}^\mu}{r_{PM}^2} dr_{OM}$$

sind für alle Lagen von P in Ω beschränkt“.

Beweis: Es ist wegen (8) und (9)

$$\frac{|x| \cdot r_{MO}^\mu}{r_{PM}^2} = \frac{|x|}{r_{OP}} \cdot \frac{r_{OP}}{r_{PM}} \cdot \frac{r_{OM}}{r_{PM}} \cdot \frac{1}{r_{OM}^{1-\mu}} \leq \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{r_{OM}^{1-\mu}}$$

woraus

$$I_1 \leq \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \int_0^R \frac{dr_{OM}}{r_{OM}^{1-\mu}}$$

folgt.

Ähnliches gilt für I_3 und I_4 .

Es ist endlich

$$I_2 \leq \int_0^R \frac{r_{OP}}{r_{PM}^2} dr_{OM} \leq \int_0^R \frac{r_{OP} dr_{OM}}{r_{OM}^2 - 2r_{OP}r_{OM}q + r_{OP}^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{1-q^2}},$$

w. z. b. w.

Wir wollen noch schliesslich, den für die Zukunft nützlichen **Hilfssatz** beweisen:

„Für

$$0 < \mu \leq 1$$

und beliebiges x gilt

$$(11) \quad |x| \cdot \int_0^a \frac{d\xi}{\xi^{1-\mu} \cdot |x-\xi|^{1-\mu}} \leq A_4 \cdot |x|^\mu,$$

wo A_4 nur von μ und a abhängt“.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Ungleichheit

$$|x|^{1-\mu} \leq |x-\xi|^{1-\mu} + |\xi|^{1-\mu}.$$

§ 3. Das Integral $\int_C \frac{|\cos(r_{MP}, n_M)|}{r_{MP}} ds_M$.

Den Annahmen des § 2. über $f(\xi)$ fügen wir noch die Voraussetzung (5) hinzu. Es gilt dann der

Satz: „Das Integral

$$(12) \quad I(P) = \int_C \frac{|\cos(r_{MP}, n_M)|}{r_{MP}} ds_M,$$

unter ds_M das Bogenelement der Kurve C im Punkte M verstanden, ist in Ω beschränkt“.

Beweis: Es ist leicht ersichtlich, daß wir uns auf den im § 2 erklärten Bogen C' , beschränken können. Bringt man dann die Gleichung von C' auf die Gestalt (2), so ist

$$I(P) = \int_0^R \frac{|x(\sin\theta + r_{OM}\cos\theta \cdot \theta') - y(\cos\theta - r_{OM}\sin\theta \cdot \theta') - r_{OM}^2 \theta'|}{r_{PM}^2} dr_{OM}.$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$I(P) \leq A_5 \cdot |x| \cdot \int_0^R \frac{r_{OM}^2}{r_{PM}^2} dr_{OM} + A_6 \cdot |x| \cdot \int_0^R \frac{r_{OM}^2}{r_{PM}^2} dr_{OM} + |y| \cdot \int_0^R \frac{dr_{OM}}{r_{PM}^2} + \\ + A_7 \cdot |y| \cdot \int_0^R \frac{r_{OM}^2}{r_{PM}^2} dr_{OM} + A_8 \cdot \int_0^R \frac{r_{OM}^{1+\lambda}}{r_{PM}^2} dr_{OM}.$$

Aus den für (10) gewonnenen Abschätzungen folgt die Richtigkeit unserer Behauptung ohne weiteres, w. z. b. w.

Bemerkung 1. Der eben bewiesene Satz bildet eine Verallgemeinerung des meistens für Kurven der Klasse Ah bekannten Satzes über die Beschränktheit von $I(P)$ in der ganzen Ebene.

Bemerkung 2. Ist C von der Klasse Ah , oder setzt sich C aus einer endlichen Zahl der Bogen, deren jeder der Klasse Ah ist zusammen, so folgt aus dem eben bewiesenen Satze, durch eine leichte Überlegung, daß $I(P)$ in der ganzen Ebene beschränkt ist.

§ 4. Das Potential der Doppelbelegung.

Wir betrachten jetzt wieder die Kurve (1) und setzen voraus, daß $f(0) = f'(0) = 0$ und (5) gilt.

Es sei

$$(13) \quad W(P) = \int_C g(M) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} ds_M,$$

Die Dichte der Doppelbelegung $g(M)$ sei meßbar und (im Lebesgue'schen Sinne) mit der $\frac{1}{\lambda} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) Potenz integrierbar.

Genügt insbesondere die Funktion $f'(\xi)$ für $\xi = 0$ der Lipschitzschen Bedingung, d. h. ist der Höldersche Exponent λ gleich 1, so genügt es, wie es sich aus der nachfolgenden Untersuchung ergibt die Dichte $g(M)$ einfach als integrierbar voranzusetzen.

Die auf diese Weise erklärte Funktion $W(P)$ besitzt überall außerhalb der Kurve C einen endlichen Wert. Setzt man in der bekannten Ungleichheit

$$(14) \quad \left| \int_0^R \varphi \cdot \psi dt \right| \leq \left\{ \int_0^R |\varphi|^{1+p} dt \right\}^{\frac{1}{1+p}} \cdot \left\{ \int_0^R |\psi|^{1+\frac{1}{p}} dt \right\}^{\frac{p}{1+p}} \quad (p > 0)$$

$$\varphi = |g(M)|, \quad \psi = \frac{1}{r_{OM}^{1-\lambda}}, \quad p = \frac{1}{\lambda} + \varepsilon - 1,$$

so bekommt man unmittelbar, daß auch $W(O)$ existiert.

Um jetzt das Verhalten von $W(P)$ bei der Annäherung von P an den Nullpunkt zu untersuchen, wählen wir den folgenden Beweisgang:

Es sei \bar{M} derjenige Punkt der positiven ξ -Achse, dessen Abstand von O gleich OM ist. Wir setzen

$$g_1(\bar{M}) = g(M)$$

und betrachten das von der, auf der ξ -Achse ausgebreiteten Dichte $g_1(\bar{M})$, herrührende Potential der Doppelbelegung

$$W_1(P) = \int_0^R g_1(\bar{M}) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_{\bar{M}})}{r_{MP}} d\xi_{\bar{M}}.$$

Es gilt der

Satz: „Die Funktion

$$\Phi(P) = W(P) - W_1(P)$$

ist im abgeschlossenen Bereiche Ω stetig“.

Beweis: Wegen $W_1(O) = 0$ ist

$$\begin{aligned} (15) \quad \Phi(P) - \Phi(O) &= \{W(P) - W_1(O)\} - W(O) = \\ &= \int_0^R g(M) \cdot \frac{x(\sin \theta + r_{OM} \cos \theta \cdot \theta') - y(\cos \theta - r_{OM} \sin \theta \cdot \theta') - r_{OM}^2 \cdot \theta'}{r_{MP}^2} dr_{OM} + \\ &\quad + \int_0^R g_1(M) \cdot \frac{y}{r_{PM}^2} d\xi_{\bar{M}} + \int_0^R g(M) \cdot \frac{r_{OM}^2 \cdot \theta'}{r_{OM}^2} dr_{OM} = \\ &= \int_0^R x \cdot g(M) \cdot \frac{\sin \theta + r_{OM} \cos \theta \cdot \theta'}{r_{PM}^2} dr_{OM} - \int_0^R y \cdot g(M) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{r_{PM}^2} - \frac{1}{r_{PM}^2} \right) dr_{OM} + \\ &\quad + \int_0^R y \cdot g(M) \cdot \frac{r_{OM} \sin \theta \cdot \theta'}{r_{PM}^2} dr_{OM} - \int_0^R g(M) \left(\frac{r_{OM}^2}{r_{PM}^2} - 1 \right) \cdot \theta' dr_{OM}. \end{aligned}$$

Konvergiert jetzt $P \rightarrow O$, so konvergieren die rechterhands unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen fast überall gegen Null; wir wollen noch zeigen, daß sie durch integrierbare Funktionen beschränkt sind.

Es ist wegen (6), (7), (8) und (9)

$$\begin{aligned} \left| x \cdot g(M) \cdot \frac{\sin \theta + r_{OM} \cos \theta \cdot \theta'}{r_{PM}^2} \right| &\leq A_9 |g(M)| \cdot \frac{|x|}{r_{OP}} \cdot \frac{r_{OP} \cdot r_{OM}^2}{r_{PM}^2} = \\ &= A_9 \cdot |g(M)| \cdot \frac{|x|}{r_{OP}} \cdot \frac{r_{OP}}{r_{PM}} \cdot \frac{r_{OM}}{r_{PM}} \cdot \frac{1}{r_{OM}^2} \leq \frac{A_9}{(1-q)^2} \cdot |g(M)| \cdot \frac{1}{r_{OM}^2}. \end{aligned}$$

Es ist weiter

$$\begin{aligned} \Psi(P, M) &= \left| y \cdot g(M) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{r_{PM}^2} - \frac{1}{r_{PM}^2} \right) \right| = \\ &= \left| y \cdot \frac{\cos \theta - 1}{r_{PM}^2} + y \left(\frac{1}{r_{PM}^2} - \frac{1}{r_{PM}^2} \right) \right| \cdot |g(M)| = \\ &= \left| -\frac{2y \sin^2 \frac{\theta}{2}}{r_{PM}^2} + y \left(\frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{PM}} \right) \cdot \left(\frac{1}{r_{PM}} + \frac{1}{r_{PM}} \right) \right| \cdot |g(M)|. \end{aligned}$$

Wegen

$$|r_{PM} - r_{PM}| \leq r_{M\bar{M}}$$

ist

$$\begin{aligned} \Psi(P, M) &\leq 2 \cdot |g(M)| \cdot \frac{|r|}{r_{OP}} \cdot \frac{r_{OP}}{r_{PM}} \cdot \frac{1}{r_{PM}} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} + \\ &\quad + |g(M)| \cdot \frac{|y|}{r_{OP}} \cdot \frac{r_{OP}}{r_{PM}} \cdot \frac{r_{M\bar{M}}}{r_{PM}} \cdot \left(\frac{1}{r_{PM}} + \frac{1}{r_{PM}} \right). \end{aligned}$$

Wir haben aber

$$\frac{|y|}{r_{OP}} \leq 1, \quad \frac{r_{OP}}{r_{PM}} \leq \frac{1}{1-q}, \quad \frac{1}{r_{PM}} \leq \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{r_{OM}}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \leq \sin^2 \theta \leq A_{10} \cdot r_{OM}^2$$

$$r_{M\bar{M}} = 2r_{OM} \cdot \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq 2A_{11} \cdot r_{OM}^{1+\lambda}$$

$$\frac{1}{r_{PM}} = \frac{1}{r_{OM}} \cdot \frac{r_{OM}}{r_{PM}} \leq A_{12} \cdot \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{r_{OM}}$$

und demnach

$$|\Psi(P, M)| \leq A_{13} \cdot |g(M)| \cdot \frac{1}{r_{OM}^2}$$

Für die unter dem dritten Integral der Formel (15) stehende Funktion bekommt man die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| y \cdot g(M) \cdot \frac{r_{OM} \sin \theta \cdot \theta'}{r_{PM}^2} \right| &\leq A_{14} \cdot |g(M)| \cdot \frac{|y|}{r_{OP}} \cdot \frac{r_{OP}}{r_{PM}} \cdot \frac{r_{OM}}{r_{OM}} \cdot r_{OM}^2 \cdot \frac{1}{r_{OM}^2} \leq \\ &\leq A_{15} \cdot |g(M)| \cdot \frac{1}{r_{OM}^2}. \end{aligned}$$

Es ist endlich

$$\begin{aligned} \left| g(M) \cdot \left(\frac{r_{OM}^2}{r_{PM}^2} - 1 \right) \right| &= |g(M)| \cdot r_{OM}^2 \cdot |\theta'| \cdot \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{OM}} \right| \cdot \left(\frac{1}{r_{PM}} + \frac{1}{r_{OM}} \right) \leq \\ &\leq A_{16} \cdot \frac{1}{r_{OM}^{1-\lambda}} \cdot r_{OM}^2 \cdot \frac{r_{OP}}{r_{PM} \cdot r_{OM}} \cdot \left(\frac{1}{r_{PM}} + \frac{1}{r_{OM}} \right) \cdot |g(M)| \leq \\ &\leq A_{17} \cdot |g(M)| \cdot \frac{1}{r_{OM}^2}. \end{aligned}$$

Aus den gewonnenen Abschätzungen folgt unter Anwendung des bekannten Lebesgueschen Satzes

$$\lim_{P \rightarrow O} \{\Phi(P) - \Phi(O)\} = 0.$$

Bemerkung: Wegen

$$W(P) = \Phi(P) + W_1(P)$$

ist die Untersuchung der Funktion $W(P)$ auf diejenige der Funktion $W_1(P)$ zurückgeführt.

§ 5. Das Potential der, auf einer Geraden ausgebreiteten, Doppelbelegung.

Wir betrachten jetzt das Potential der auf einer Geraden ausgebreiteten Doppelbelegung

$$(16) \quad W_1(P) = \int_0^R g_1(\xi) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} d\xi,$$

wo $g_1(\xi)$ im Lebesgue'schen Sinne integrierbar ist.

Bezeichnet man mit (ϱ, φ)

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

die Polarkoordinaten des Punktes $P(x, y)$, so ist

$$W_1(P) = - \int_0^R g_1(\xi) \frac{d}{d\xi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varrho \cos \varphi - \xi}{\varrho \sin \varphi} d\xi.$$

Wir setzen voraus, daß die Zahlen

$$\overline{\lim}_{0 < \xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi g_1(u) du = H$$

$$(17) \quad \lim_{0 < \xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi g_1(u) du = h$$

endlich sind und führen zur Abkürzung folgende Ausdrücke

$$(18) \quad h(\xi) = \int_0^\xi g_1(u) du$$

$$(19) \quad K(\varrho, \varphi, \xi) = \frac{d^2}{d\xi^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varrho \cos \varphi - \xi}{\varrho \sin \varphi} = \frac{2(\xi - \varrho \cos \varphi) \varrho \sin \varphi}{[(\xi - \varrho \cos \varphi)^2 + \varrho^2 \sin^2 \varphi]^2}$$

ein.

Die Anwendung der partiellen Integration liefert dann

$$W_1(P) = -h(\xi) \frac{d}{d\xi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varrho \cos \varphi - \xi}{\varrho \sin \varphi} \Big|_0^R + \int_0^R h(\xi) K(\varrho, \varphi, \xi) d\xi,$$

woraus

$$(20) \quad \overline{\lim}_{P \rightarrow 0} W_1(P) = \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow 0} \int_0^R h(\xi) K(\varrho, \varphi, \xi) d\xi$$

folgt.

Hilfssatz 1,

$$(21) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_0^{\varrho^2} h(\xi) K(\varrho, \varphi, \xi) d\xi = 0.$$

Beweis:

$$\left| \int_0^{\varrho^2} h(\xi) K(\varrho, \varphi, \xi) d\xi \right| \leq |h(\xi_1)| \cdot \int_0^{\varrho^2} |K(\varrho, \varphi, \xi)| d\xi,$$

wo ξ_1 im Intervalle $[0, \varrho^2]$ liegt.

Liegt die Zahl $\varrho \cos \varphi$ außerhalb des Intervalls $[0, \varrho^2]$, so ist

$$\int_0^{\varrho^2} |K(\varrho, \varphi, \xi)| d\xi = \left| \frac{\sin \varphi}{\varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho - 2\varrho^2 \cos \varphi + \varrho^2} \right| \leq \frac{A_{18}}{\varrho}.$$

Liegt dagegen $\varrho \cos \varphi$ im Intervalle $[0, \varrho^2]$, so gilt

$$\int_0^{\varrho^2} |K(\varrho, \varphi, \xi)| d\xi = \left| -\frac{1}{\varrho \sin \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\varrho} \right| + \left| \frac{1}{\varrho \sin \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\varrho - 2\varrho^2 \cos \varphi + \varrho^2} \right| \leq \frac{A_{19}}{\varrho},$$

da in diesem Falle $\sin \varphi \rightarrow 1$ konvergiert.

Es ist also

$$\left| \int_0^{\varrho^2} h(\xi) K(\varrho, \varphi, \xi) d\xi \right| \leq A_{20} \cdot \frac{|h(\xi_1)|}{\varrho} = A_{21} \cdot \frac{|h(\xi_1)|}{\xi_1} \cdot \frac{\xi_1}{\varrho} \leq A_{22} \cdot \varrho$$

und zwar wegen $\xi_1 < \varrho^2$ und wegen der Endlichkeit der Zahlen h und H .

Hilfssatz 2.

$$(22) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\sqrt[4]{\rho}}^R h(\xi) K(\rho, \varphi, \xi) d\xi = 0.$$

Beweis.

$$\left| \int_{\sqrt[4]{\rho}}^R h(\xi) K(\rho, \varphi, \xi) d\xi \right| \leq |h(\xi_2)| \cdot \int_{\sqrt[4]{\rho}}^R |K(\rho, \varphi, \xi)| d\xi,$$

wo $\sqrt[4]{\rho} < \xi_2 < R$ ist. Da die Zahl $\rho \cos \varphi$ für hinreichend kleine ρ gewiß außerhalb des Intervalls $[\sqrt[4]{\rho}, R]$ liegt, so ist

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt[4]{\rho}}^R |K(\rho, \varphi, \xi)| d\xi = \\ & = \left| \frac{\rho \sin \varphi}{(R - \rho \cos \varphi)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\sqrt[4]{\rho} \sin \varphi}{1 - 2 \rho^{3/4} \cos \varphi + \rho^{3/2}} \right| \leq A_{21} \sqrt[4]{\rho}, \end{aligned}$$

woraus die Richtigkeit des Hilfssatzes folgt. W. z. b. w.

Aus (20), (21) und (22) folgt jetzt

$$(23) \quad \overline{\lim}_{P \rightarrow 0} W_1(P) = \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \int_{\rho^2}^{\sqrt[4]{\rho}} h(\xi) K(\rho, \varphi, \xi) d\xi.$$

§ 6. Fortsetzung.

Bei der weiteren Untersuchung müssen wir näher die Art der Konvergenz von P an O präzisieren und dabei zwei Fälle unterscheiden.

I. $P \rightarrow O$ derart, daß

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ \varphi \rightarrow \varphi_0. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} I &= \int_{\rho^2}^{\sqrt[4]{\rho}} h(\xi) K(\rho, \varphi, \xi) d\xi = \frac{h(\xi_2)}{\xi_2} \cdot \int_{\rho^2}^{\sqrt[4]{\rho}} \frac{2\xi(\xi - \rho \cos \varphi) \rho \sin \varphi}{[(\xi - \rho \cos \varphi)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi]^2} d\xi = \\ &= \frac{h(\xi_2)}{\xi_2} \cdot \left[\frac{-\rho^{3/2} \sin \varphi}{\rho^{3/2} - 2\rho^{3/4} \cos \varphi + \rho^2} + \frac{\rho^3 \sin \varphi}{\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + \rho^4} + \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[4]{\rho} - \rho \cos \varphi}{\rho \sin \varphi} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\rho^2 - \rho \cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \right] \end{aligned}$$

wo ξ_2 im Intervalle $[\rho^2, \sqrt[4]{\rho}]$ liegt.

Hieraus folgt

$$(24) \quad \overline{\lim}_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} I = \overline{\lim}_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \left\{ \frac{h(\xi_2)}{\xi_2} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\operatorname{ctg} \varphi) \right] \right\}.$$

Ist also

$$(25) \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq \pi,$$

so folgt hieraus

$$(26) \quad \overline{\lim}_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq (\pi - \varphi_0) \cdot H.$$

Ist dagegen

$$(27) \quad \pi \leq \varphi_0 \leq \frac{3\pi}{2},$$

so bekommt man

$$(28) \quad \overline{\lim}_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq (\pi - \varphi_0) \cdot h$$

II. $P \rightarrow O$ derart, daß $\varphi \rightarrow \varphi_0$, wobei entweder $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

$0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, oder aber $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ ist.

Liegt jetzt die Zahl $\rho \cos \varphi$ außerhalb des Intervalls $[\rho^2, \sqrt[4]{\rho}]$, so kann man das unter I angegebene Verfahren anwenden. Liegt diese Zahl dagegen im Intervalle $[\rho^2, \sqrt[4]{\rho}]$, so zerlegen wir dieses in zwei

Teilintervalle $[\varrho^2, \varrho \cos \varphi]$, $[\varrho \cos \varphi, \sqrt[4]{\varrho}]$, wenden in jedem den ersten Mittelwertsatz an, und bekommen:

$$I = \frac{h(\xi_4)}{\xi_4} \cdot \left[-\operatorname{ctg} \varphi + \frac{\varrho \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varrho - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right] + \\ + \frac{h(\xi_5)}{\xi_5} \left[\frac{-\varrho^{3/4} \sin \varphi}{(1 - \varrho^{3/4} \cos \varphi)^2 + \varrho^{3/4} \sin^2 \varphi} + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 - \varrho^{3/4} \cos \varphi}{\varrho^{3/4} \sin \varphi} \right].$$

wobei

$$\varrho^2 < \xi_4 < \varrho \cos \varphi < \xi_5 < \sqrt[4]{\varrho}$$

gilt.

Hieraus folgt

$$\overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow \varphi \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \left\{ \frac{h(\xi_4)}{\xi_4} \cdot \left[-\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\operatorname{ctg} \varphi) \right] \right\} + \\ + \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \left\{ \frac{h(\xi_5)}{\xi_5} \cdot \left[\operatorname{ctg} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}.$$

Ist also

$$(29) \quad 0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

so bekommt man

$$(30) \quad \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq (\pi - \varphi_0) \cdot H + \operatorname{ctg} \varphi_0 \cdot (H - h).$$

Ist dagegen

$$(31) \quad \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_0 < 2\pi,$$

so gilt

$$(32) \quad \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq (\pi - \varphi_0) \cdot h - \operatorname{ctg} \varphi_0 \cdot (H - h).$$

Bemerkung. Ähnliche Überlegungen führen zur Abschätzung von $\lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P)$ und man bekommt auf diese Weise folgende, das Verhalten von $W_1(P)$ vollständig charakterisierende, Ungleichheiten:

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} 1^\circ. \quad & \varrho \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0, \quad 0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ & (\pi - \varphi_0) \cdot h - \operatorname{ctg} \varphi_0 \cdot (H - h) \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq \\ & \leq (\pi - \varphi_0) H + \operatorname{ctg} \varphi_0 \cdot (H - h). \\ 2^\circ. \quad & \varrho \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq \pi \\ & (\pi - \varphi_0) \cdot h \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq (\pi - \varphi_0) \cdot H \\ 3^\circ. \quad & \varrho \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0, \quad \pi \leq \varphi_0 \leq \frac{3\pi}{2} \\ & (\pi - \varphi_0) H \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq (\pi - \varphi_0) \cdot h \\ 4^\circ. \quad & \varrho \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_0 < 2\pi \\ & (\pi - \varphi_0) H + \operatorname{ctg} \varphi_0 (H - h) \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) \leq \\ & \leq (\pi - \varphi_0) h - \operatorname{ctg} \varphi_0 \cdot (H - h). \end{aligned} \right\}$$

Bemerkung 1: Es soll hier noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die tangentielle Annäherung an die positive ξ -Achse ausgeschlossen, an die negative ξ -Achse dagegen nicht ausgeschlossen wurde.

Bemerkung 2: Gilt insbesondere

$$H = h$$

so ist für $\varrho \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \varphi_0$, $0 < \varphi_0 < 2\pi$ (die tangentielle Annäherung an die positive ξ -Achse immer ausgeschlossen)

$$\lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P) = (\pi - \varphi_0) \cdot H.$$

§ 7. Das Potential, der auf einer Kurve ausgebreiteten Doppelbelegung.

Wir kehren jetzt zu dem allgemeinen Falle des Potentials, der, auf einer Kurve ausgebreiteten Belegung, zurück. Den im § 4 ange-



geben Voraussetzungen über die Kurve (C) und die Dichte $g(M)$, fügen wir noch die der Endlichkeit der Zahlen

$$\overline{\lim}_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma g(s) ds = H$$

$$\lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma g(s) ds = h$$

hinzu. Die am Ende vom § 4 gemachte Bemerkung gestattet uns unmittelbar die Ungleichheiten für $\lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W(P)$ und $\overline{\lim}_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W(P)$ ($0 < \varphi_0 < 2\pi$) aufzuschreiben.

Um die langen Formeln nicht aufschreiben zu müssen, begnügen wir uns mit der Bemerkung, daß sie sich von (I) nur dadurch unterscheiden, daß man in (I) anstatt $\overline{\lim}_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P)$ den Ausdruck

$$\overline{\lim}_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} [W(P) - W(O)] \text{ und anstatt } \lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_1(P), \text{ den Ausdruck}$$

$$\lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} [W(P) - W(P)] \text{ aufschreibt.}$$

Wir betrachten jetzt allgemeiner zwei Kurven \overline{AO} und \overline{OB} , die den folgenden Bedingungen genügen:

- 1°. Jeder der Bogen \overline{AO} und \overline{OB} genügt sämtlichen, im § 4 über die Kurve C , gemachten Voraussetzungen.
- 2°. Die Kurven \overline{AO} und \overline{OB} haben nur einen einzigen Punkt O gemeinsam.

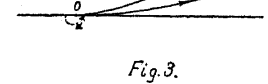
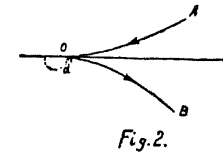
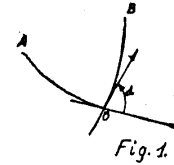
Wir werden in der Folge die Bogenlänge vom Punkte A abzählen, und orientieren die Tangente (eventuell die Halbtangente) in der Richtung der wachsenden Bogenlänge. Es sei s_0 die dem Nullpunkte O entsprechende Bogenlänge. Wir bezeichnen mit α den Winkel

$$0 \leq \alpha < 2\pi,$$

um welchen man die Halbtangente des Bogens \overline{AO} im Punkte O in der positiven Richtung umdrehen muß, damit sie in die Halbtangente des Bogens \overline{OB} im Punkte O übergeht. (Fig. 1).

Ist $\alpha = 0$ so besitzt die betrachtete Kurve im Punkte O eine wohlbestimmte Tangente und der Punkt O selbst ist ein regulärer Punkt der Kurve \overline{AOB} .

Ist $\alpha = \pi$, so besitzt unsere Kurve im Punkte O eine Spitze. (Fig. 2 und 3).



Im jedem Punkte M der Kurve \overline{AOB} orientieren wir die Normale n_M derart, daß sie mit der positiven Halbtangente in M den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ einschliesst.

Es sei jetzt $g(s)$ eine, mit der $\frac{1}{\lambda} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) (im Lebesgue'schen Sinne) integrierbare Funktion.

Wir setzen die Endlichkeit der Zahlen

$$(33) \quad \begin{cases} h_I = \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{-\sigma} \cdot \int_{s_0}^{s_0 - \sigma} g(\xi) d\xi, & H_I = \overline{\lim}_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{-\sigma} \cdot \int_{s_0}^{s_0 - \sigma} g(\xi) d\xi \\ h_{II} = \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{+\sigma} \cdot \int_{s_0}^{s_0 + \sigma} g(\xi) d\xi, & H_{II} = \overline{\lim}_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{+\sigma} \cdot \int_{s_0}^{s_0 + \sigma} g(\xi) d\xi \end{cases}$$

voraus.

Wir betrachten jetzt das Potential der Doppelbelegung

$$(34) \quad W_I(P) = \int_{\overline{AOB}} g(M) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} ds.$$

Das Verhalten von $W(P)$ bei der Annäherung von P and O , können wir aus unseren Ergebnissen sofort ablesen, indem wir

$$(35) \quad \begin{cases} \int_{\overline{AO}} g(M) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} ds = W_I(P) \\ \int_{\overline{OB}} g(M) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} ds = W_{II}(P) \end{cases}$$



setzen, und die Funktion $W(P)$

$$(36) \quad W(P) = W_I(P) + W_{II}(P)$$

als Summe zweier Potentiale der Doppelbelegung betrachten. Das Verhalten von $W_I(P)$ und $W_{II}(P)$ bei $P \rightarrow O$ ist uns aber vollkommen bekannt und es wäre ohne weiteres möglich die entsprechenden Ungleichheiten für $\overline{\lim} W(P)$ und $\underline{\lim} W(P)$ aufzustellen.

Wir verzichten hier jedoch auf das Aufschreiben der entsprechenden Formeln, in welchen mehrere Fälle unterschieden werden müssen, was aber natürlich mit keiner Schwierigkeit verbunden wäre und beschränken uns zunächst auf den für die Praxis wichtigsten Fall des regulären Punktes ($\alpha = 0$).

Zu diesem Zwecke wählen wir die positive ξ -Achse zur Polarkoordinatenachse (sie ist nach den im § 4 gemachten Festsetzungen zugleich die positive Halbtangente zur Γ in O). Die Formeln für $W_{II}(P)$ bekommen wir sofort aus (I), indem wir in diesen statt $\lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_I(P)$, resp. $\overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} W_I(P)$ die Ausdrücke $\lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} [W_{II}(P) - W_{II}(O)]$, resp. $\overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} [W_{II}(P) - W_{II}(O)]$, und statt h und H die Zahlen h_{II} und H_{II} aufschreiben.

Laut (36) müssen wir jetzt noch die entsprechenden Formeln für $W_I(P)$ angeben. Es ist

$$W_I(P) = \int_{\lambda O} g(s) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} ds = - \int_{s_0}^0 g(s) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} ds.$$

Um unsere Aufgabe der Anwendung der Formeln (I) zugänglich zu machen, müssen wir noch die Richtung n_M durch die ihr entgegengesetzte \bar{n}_M ersetzen. Da aber

so ist $\cos(r_{MP}, n_M) = - \cos(r_{MP}, \bar{n}_M),$

$$(37) \quad W_I(P) = \int_0^{s_0} G(s) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, \bar{n}_M)}{r_{MP}} ds,$$

wobei

$$(38) \quad G(\sigma) = -g(-\sigma + s_0)$$

gesetzt wurde.

Bei der Anwendung der Formeln (I) müssen wir aber stets daran denken, daß in diesem Falle die negative ξ -Achse als Polarkoordinatenachse zu betrachten ist.

Konvergiert also $P \rightarrow O$ derart, daß $\varphi \rightarrow \varphi_0$ konvergiert (in Bezug auf die positive ξ -Achse) und bezeichnet man mit ψ die Polarkoordinate von P in bezug auf die negative ξ -Achse, so ist

$$(39) \quad \begin{cases} \text{für } 0 \leq \varphi_0 \leq \pi, & \psi_0 = \varphi_0 + \pi \\ \text{für } \pi < \varphi_0 \leq 2\pi, & \psi_0 = \varphi_0 - \pi \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$(40) \quad \begin{cases} H^\times = \overline{\lim}_{0 < u \rightarrow 0} \int_0^u G(\xi) d\xi \\ h^\times = \underline{\lim}_{0 < u \rightarrow 0} \int_0^u G(\xi) d\xi, \end{cases}$$

und wendet die Formeln (I) an, so bekommt man:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, 0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } \psi \rightarrow \psi_0, \pi < \psi \leq \frac{3\pi}{2} \\ (\pi - \psi_0) \cdot H^\times \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq \\ \leq (\pi - \psi_0) \cdot h^\times \\ \\ 2^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 < \pi, \text{ d. h. } \psi \rightarrow \psi_0, \frac{3\pi}{2} \leq \psi_0 < 2\pi \\ (\pi - \psi_0) \cdot H^\times + \text{ctg } \psi_0 \cdot (H^\times - h^\times) \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq \\ \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq (\pi - \psi_0) \cdot h^\times - \text{ctg } \psi_0 \cdot (H^\times - h^\times) \\ \\ 3^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, \pi < \varphi_0 \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ d. h. } \psi \rightarrow \psi_0, 0 < \psi_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ (\pi - \psi_0) \cdot h^\times - \text{ctg } \psi_0 (H^\times - h^\times) \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq \\ \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq (\pi - \psi_0) \cdot H^\times + \text{ctg } \psi_0 \cdot (H^\times - h^\times) \\ \\ 4^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_0 < 2\pi, \text{ d. h. } \psi \rightarrow \psi_0, \frac{\pi}{2} \leq \psi_0 < \pi \\ (\pi - \psi_0) \cdot h^\times \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W_I(P) - W_I(O)\} \leq \\ \leq (\pi - \psi_0) \cdot H^\times \end{array} \right.$$



Aus (36), (38), (39), (40), (II) und aus

$$H^\times = -h_I$$

$$h^\times = -H_I$$

folgen endgültig die das Verhalten des Potentials der Doppelbelegung vollständig charakterisierenden Formeln:

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, 0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ (\pi - \varphi_0) \cdot h_{II} + \varphi_0 \cdot h_I - \text{ctg } \varphi_0 (H_{II} - h_{II}) \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq \\ \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq (\pi - \varphi_0) \cdot H_{II} + \varphi_0 \cdot H_I + \text{ctg } \varphi_0 \cdot (H_{II} - h_{II}) \\ \\ 2^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 < \pi \\ (\pi - \varphi_0) \cdot h_{II} + \varphi_0 \cdot h_I + \text{ctg } \varphi_0 \cdot (H_I - h_I) \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq \\ \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq (\pi - \varphi_0) H_{II} + \varphi_0 \cdot H_I - \text{ctg } \varphi_0 (H_I - h_I) \\ \\ 3^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, \pi < \varphi_0 \leq \frac{3\pi}{2} \\ (\pi - \varphi_0) \cdot H_{II} + (-2\pi + \varphi_0) H_I - \text{ctg } \varphi_0 (H_I - h_I) \leq \\ \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq \\ \leq (\pi - \varphi_0) \cdot h_{II} - (2\pi - \varphi_0) h_I + \text{ctg } \varphi_0 (H_I - h_I) \\ \\ 4^\circ. \text{ Für } \varrho \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \varphi_0, \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_0 < 2\pi \\ (\pi - \varphi_0) \cdot H_{II} - (2\pi - \varphi_0) H_I + \text{ctg } \varphi_0 (H_{II} - h_{II}) \leq \\ \leq \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq \overline{\lim}_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \{W(P) - W(O)\} \leq \\ \leq (\pi - \varphi_0) \cdot h_{II} - (2\pi - \varphi_0) h_I - \text{ctg } \varphi_0 (H_{II} - h_{II}). \end{array} \right.$$

Folgerung. Ist insbesondere

$$(41) \quad h_I = h_{II} = H_I = H_{II} = H,$$

so gilt der

Satz: „Konvergiert $P \rightarrow O$ von der positiven Seite der Kurve auf beliebigem, aber nicht zu T in O tangentialem Wege, so ist

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim}_{P \rightarrow 0} W(P) - \lim_{P \rightarrow 0} W(P) = W_+(O) = W(O) + \pi \cdot H. \\ \text{Bei der Konvergenz von der negativen Seite} \\ \text{der Kurve gilt} \\ \overline{\lim}_{P \rightarrow 0} W(P) - \lim_{P \rightarrow 0} W(P) = W_-(O) = W(O) - \pi \cdot H. \end{array} \right.$$

Bemerkung. Ist die Dichte $g(s)$ im Punkte s_0 stetig, so ist offenbar $H = g(s_0)$, und die Formeln (IV) reduzieren sich auf die bekannten klassischen Beziehungen.

Als eine zweite Anwendung unserer allgemeinen Ergebnisse wollen wir noch den nichtregulären Punkt der Kurve betrachten. Um aber nicht allzusehr komplizierte Formeln aufschreiben zu müssen, beschränken wir uns auf den Fall

$$h_I = H_I = H_-$$

$$h_{II} = H_{II} = H_+.$$

$$0 < \alpha < \pi$$

Es sei zunächst.

In diesem Falle reduzieren sich die Formeln (I) und (II):

1°. Für den Bogen \overline{OB} auf

$$\lim_{P \rightarrow 0} \{W_{II}(P) - W_{II}(O)\} = (\pi - \varphi_0) \cdot H_+$$

2°. Für den Bogen \overline{AO} bekommt man ähnlich

$$\lim_{P \rightarrow 0} \{W_I(P) - W_I(O)\} = -(\pi - \psi_0) \cdot H_-$$

unter ψ die Polarkoordinate von P in bezug auf die Halbtangente von \overline{OA} in O , von O nach A gerichtet, als Polarkoordinatenachse, verstanden.

Liegt aber P auf der positiven Seite der Kurve, so gilt

$$\psi = \alpha + \varphi + \pi;$$

liegt dagegen P auf der negativen Seite der Kurve, so ist

$$\psi = \alpha + \varphi - \pi.$$

Wir bekommen also den

Satz: „Konvergiert $P \rightarrow O$ von der positiven Seite der Kurve, auf beliebigem, zu keinem der Bogen \overline{AO} und \overline{OB} tangentialem Wege, so ist

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow 0} W(P) = \lim_{P \rightarrow 0} W(P) = W_+(O) = W(O) + (\alpha + \varphi_0) \cdot H_- + (\pi - \varphi_0) \cdot H_+$$

Bei der Konvergenz von der negativen Seite der Kurve gilt

$$\overline{\lim}_{P \rightarrow 0} W(P) = \lim_{P \rightarrow 0} W(P) = W_-(O) = W(O) - (2\pi - \alpha - \varphi_0) \cdot H_- + (\pi - \varphi_0) \cdot H_+^u.$$

Bemerkung. Wir überlassen es dem Leser, ähnliche Formeln für den Fall

$$\pi < \alpha < 2\pi$$

abzuleiten.

Bemerkung. Ist insbesondere $H_- = H_+ = H$ (was im Falle der Stetigkeit der Dichte $g(s)$ im Punkte 0 stets zutrifft), so ist

$$\begin{aligned} W_+(P) &= W(O) + (\pi + \alpha) \cdot H \\ W_-(P) &= W(O) + (-\pi + \alpha) \cdot H^1. \end{aligned}$$

§ 8. Hauptsatz.

Wir können jetzt ohne jede Schwierigkeit das Hauptergebnis dieser Arbeit ableiten.

Es sei C eine Kurve der Klasse A_h , λ der ihr entsprechende Höldersche Koeffizient ($0 < \lambda \leq 1$). Es sei weiter $g(M)$ eine auf C meßbare und mit der $\frac{1}{\lambda} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) Potenz (im Lebesgue'schen Sinne) integrierbare Funktion. [Für $\lambda = 1$ genügt es $g(M)$ einfach als integrierbar voranzusetzen]. Setzt man

$$h(s) = \int_0^s g(\xi) d\xi,$$

so besitzt bekanntlich die Funktion $h(s)$ fast überall die erste Ableitung und es ist fast überall

$$h'(s) = g(s).$$

¹⁾ Vgl. L. Lichtenstein, *Enz. d. math. Wiss.*

Demnach gilt der

Hauptsatz: „Setzt man

$$W(P) = \int_C g(M) \cdot \frac{\cos(r_{MP}, n_M)}{r_{MP}} ds,$$

so gilt für fast jeden Punkt M_0 der Kurve C

$$W_+(M_0) = W(M_0) + \pi \cdot g(M_0)$$

$$W_-(M_0) = W(M_0) - \pi \cdot g(M_0),$$

je nachdem der Punkt P gegen M_0 von der positiven, resp. negativen Seite der Kurve C , auf beliebigem, nicht zu C in M_0 tangentialem Wege, konvergiert“.

§ 9. Ein Gegenbeispiel.

Wir wenden uns noch einmal den Formeln (I) oder allgemeiner den Formeln (IV) zu. Betrachtet man z. B., wie in §§ 5 und 6 das Potential der auf einer Geraden ausgebreiteten Doppelbelegung und sein Verhalten im Punkte 0, wie dies am a. O. erfolgte, so erscheint zunächst als plausibel die Vermutung, daß

$$(42) \quad (\pi - \varphi_0) h \leq \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} W(P) \leq \overline{\lim}_{\varphi \rightarrow \varphi_0} W(P) \leq (\pi - \varphi_0) \cdot H$$

gelten soll, d. h., daß ein allgemeineres, als das in dieser Arbeit bewiesene, Resultat bestehe. Obwohl es anzunehmen ist, daß die in § 6 erhaltenen Ergebnisse sich, insbesondere in bezug auf den dort vorkommenden Koeffizienten $\cotg \varphi_0$, verschärfen lassen, — was jedoch den Verfassern nicht gelungen ist — wollen wir hier zeigen, daß die Ungleichheit (42) falsch ist.

Zu diesem Zwecke ¹⁾ betrachten wir irgendeine den Ungleichheiten

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

genügende Zahl φ , und eine gegen Null konvergierende Folge

$$1 < \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$$

¹⁾ H. Zygmund hat bei der Untersuchung des Poissonschen Integrals ein Beispiel angegeben, welches er uns brieflich freundlichst mitgeteilt hat. Das Beispiel im Texte ist nach dem Muster des Zygmund'schen Beispiels gebildet.

die für beliebiges n den Ungleichheiten

$$\sqrt[4]{\varrho_{n+1}} < \varrho_n^2 < \frac{\varrho_n \cos \varphi}{4} < \varrho_n < \sqrt[4]{\varrho_n} < \varrho_{n-1}^2$$

genügt.

Wir setzen $a_n = \frac{1}{2} \varrho_n \cos \varphi$ und erklären die Dichte $g(\xi)$, wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \frac{a_n}{2} \leq \xi \leq a_n \quad \text{sei } g(\xi) = 2 \\ \text{, } a_n < \xi \leq 2a_n \quad \text{, } g(\xi) = -1 \end{array} \right\} (n = 1, 2, \dots)$$

und $g(\xi) = 0$ für die übrigen Werte des Intervalls $[0, 1]$.

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \frac{a_n}{2} \leq \xi \leq a_n, \quad h(\xi) = 2 \left(\xi - \frac{a_n}{2} \right) \\ \text{, } a_n \leq \xi \leq 2a_n, \quad h(\xi) = 2a_n - \xi \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad h(\xi) = 0 \quad \text{übrigens.} \end{array} \right\} (n = 1, 2, \dots)$$

Aus (20), (21), (22) folgt, indem mit P_n der Punkt (ϱ_n, φ) und mit $W(P)$ das Potential

$$W(P) = - \int_0^1 g(\xi) \frac{d}{d\xi} \arctg \frac{\varrho \cos \varphi - \xi}{\varrho \sin \varphi} d\xi$$

bezeichnet werden, daß

$$\lim_{P_n \rightarrow 0} W(P_n) = \lim_{\varrho_n \rightarrow 0} \int_{\varrho_n^2}^{\sqrt[4]{\varrho_n}} h(\xi) K(\varrho_n, \varphi, \xi) d\xi$$

gilt.

Wegen

$$\sqrt[4]{\varrho_n} < \varrho_{n-1}^2 < \frac{1}{4} \varrho_{n-1} \cdot \cos \varphi = \frac{a_{n-1}}{2}$$

$$2a_n = \varrho_n \cos \varphi < \sqrt[4]{\varrho_n}$$

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{4} \varrho_n \cos \varphi < \varrho_n^2$$

$$2a_{n+1} = \varrho_{n+1} \cos \varphi < \varrho_{n+1} < \sqrt[4]{\varrho_{n+1}} < \varrho_n$$

ist

$$\begin{aligned} \int_{\varrho_n^2}^{\sqrt[4]{\varrho_n}} h(\xi) K(\varrho_n, \varphi, \xi) d\xi &= \int_{\frac{a_n}{2}}^{a_n} 2 \left(\xi - \frac{a_n}{2} \right) K(\varrho_n, \varphi, \xi) d\xi + \\ &+ \int_{a_n}^{2a_n} (-1) K(\varrho_n, \varphi, \xi) d\xi = -3 \arctg \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \right) + 2 \arctg \left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \varphi \right). \end{aligned}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist also

$$(43) \quad \lim_{P_n \rightarrow 0} W(P_n) = \overline{\lim}_{P_n \rightarrow 0} W(P_n) < 0$$

Wegen $h(\xi) \geq 0$ ist aber

$$H < h \leq 0.$$

Die Formeln (43) und (44) stehen mit (42) im Widerspruch.