We are now prepared to show that if P is any point at which there exists a planar direction π and a linear direction d such that $l_{P_\pi} > u_{P_d}$, the point P belongs to M. For a sheaf H_{P_k} containing a plane of direction π and a cone C_b containing a line of direction d but containing no line contained in H_{P_k} can be selected; and a rational number r_ν can be selected such that $l_{P_\pi} > r_\nu > u_{P_d}$ The point P belongs to the set E_{r_ν} associated with k, but since in H_{P_k} there is a plane of direction π', which may or may not coincide with π, along which $l_{P_{\pi'}} > r_\nu$ while $u_{P_d} < r_\nu$, the point P belongs to the N_{r_ν} associated with the k and b chosen.

Similarly it can be proved that for all pairs consisting of a planar direction π and a linear direction d, $u_{P_\pi} \geqslant l_{P_d}$ except possibly at points of an exhaustible set.

Über die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen [1]).

Von

M. D. Kirszbraun (Warschau).

Es sei A eine beliebige in einem metrischen Raume $\mathfrak{C}$ enthaltene Menge, und $\varrho(x, y)$ bezeichne die Entfernung zweier Punkte x und y von $\mathfrak{C}$.

Eine Transformation [2]) f, die die Menge A auf eine Untermenge von $\mathfrak{C}$ abbildet und die Bedingung

$$(1) \qquad \varrho(f(x), f(y)) \leqslant \varrho(x, y)$$

erfüllt, heisse eine *zusammenziehende Transformation*, oder kurz eine *Zusammenziehung* [3]).

Das ist also eine Verallgemeinerung der isometrischen Trans-

[1]) Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden grösstenteils schon in den Jahren 1926—1930 gefunden und in meiner Magister-Dissertation (Warschau, 1930) zusammengefasst. Jetzt werden sie etwas weitergeführt und gleichzeitig vereinfacht. Vgl. auch: A. Lindenbaum et A. Tarski, *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles*, Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie XIX (1926). p. 327—328.

[2]) Transformation = Abbildung. (Im allgemeinen nicht unbedingt schlichte, und zwar nicht unbedingt eindeutige Funktion. Vgl. § 22).

[3]) Der Begriff der Transformation, die die inverse Bedingung ($\varrho(f(x), f(y)) \geqslant \geqslant \varrho(x, y)$) erfüllt, wurde schon von E. Schmidt als „asphinktische Transformation" eingeführt. Vgl. E. Schmidt, *Über die Definition des Begriffes der Länge krummer Linien*, Math. Ann. 55 (1902). Die Transformation mit der Bedingung (1) wurde letztens von A. Kolmogoroff gebraucht und „dehnungslose Abbildung" genannt. Vgl. A. Kolmogoroff, *Beiträge zur Masstheorie*, Math. Ann. 107 (1933). Vgl. auch Fussnote [4]).

formation, die durch die Gleichung $\varrho(f(x), f(y)) = \varrho(x,y)$ definiert wird[4]).

Ein Punkt p heisse ein *Konzentrationspunkt* für die Transformation f (welche auf A definiert ist), wenn für jedes Element x der Menge A die Beziehung

$$\varrho(f(x), p) \leqslant \varrho(x, p) \tag{2}$$

gilt.

Die obigen Begriffe gestatten eine weitere Verallgemeinerung. Eine Transformation f (die auf A definiert ist) wird *eine Lipschitzsche μ-Zusammenziehung* genannt, wenn für beliebige zwei Elemente x und y der Menge A die Beziehung

$$\varrho(f(x), f(y)) \leqslant \mu \cdot \varrho(x, y) \tag{3}$$

gilt.

Ebenso: ein Punkt p wird ein *λ-Konzentrationspunkt* für eine (auf A definierte) Transformation f genannt, wenn für jedes Element x der Menge A die Beziehung

$$\varrho(f(x), p) \leqslant \lambda \cdot \varrho(x, p) \tag{4}$$

gilt.

In der vorliegengen Arbeit werden zwei Hauptprobleme behandelt und ihre Lösung gegeben: (I) *Das Problem der Erweiterung der zusammenziehenden und μ-zusammenziehenden Transformationen*, und (II) *das Problem der Existenz ihrer Konzentrationspunkte.* Dabei wird der euklidische Raum von endlich vielen Dimensionen zu Grunde der Untersuchungen gelegt.

Im Kapitel II wurde nämlich der Beweis erbracht, dass *jede zusammenziehende Transformation sich auf den ganzen Raum erweitern lässt* d. h. derart, dass die Bedingung (1) aufrecht erhalten bleibt (Hauptsatz I)[5]). Ferner wird es gezeigt, dass *jede Zusammenziehung, die eine Menge A auf eine beschränkte Menge B abbildet, mindestens einen Konzentrationspunkt besitzt* (und zwar in der kleinsten konvexen, abgeschlossenen Menge, in welcher die Menge B enthalten ist) (Hauptsatz II).

[4]) Der Begriff der isometrischen Transformation (für allgemeine metrische Räume) ist schon von Hrn Lindenbaum näher untersucht worden. Herr Lindenbaum hat auch nebenbei die erwähnte. Verallgemeinerung eingeführt und ihre elementaren Eigenschaften untersucht: vgl. *Contributions à l'étude de l'espace métrique*, Fund. Math. 8 (1926). — A. Lindenbaum et A. Tarski. l. c. — A. Lindenbaum, *Über die metrischen Eigenschaften der Punktmengen*, Inaugural-Dissertation, Warschau (1927, unveröffentlicht).

[5]) Dabei verdanke ich Hrn N. Aronszajn eine wichtige Idee im Beweise des Satzes 13.

Im Kapitel III werden einige Eigenschaften der Menge der Konzentrationspunkte erörtert.

Im letzten Kapitel (IV) werden die Hauptsätze verallgemeinert. Es wird also gezeigt, dass *jede Lipschitzsche μ-Zusammenziehung sich auf den ganzen Raum erweitern lässt*, wobei die Bedingung (2) erfüllt bleibt (Hauptsatz $\mathfrak{L}$ I). Ebenda wird bewiesen, dass *jede Lipschitzsche μ-Zusammenziehung, die eine Menge A auf eine beschränkte Menge B abbildet, mindestens einen μ-Konzentrationspunkt hat* (Hauptsatz $\mathfrak{L}$ II); für $\mu < 1$ gilt der obige Satz auch für unbeschränkte Mengen B (Satz $\mathfrak{L}$ II^e).

Es ergibt sich auch der folgende Satz, der eine Vervollständigung des obigen Satzes bildet: *Ist μ eine beliebige positive Zahl, so ist μ die untere Grenze aller Zahlen λ, welche die Eigenschaft haben, dass jede μ-Zusammenziehung mit beschränktem Gegenbereiche*[6]) *mindestens einen λ-Konzentrationspunkt hat* (Satz 32). Der analoge Satz gilt für $\mu < 1$ auch im Falle des unbeschränkten Gegenbereiches (Satz 32^e).

Nebenbei werden einige Sätze über die Umkehrungen von zusammenziehenden (bzw. μ-zusammenziehenden) Transformationen angegeben, wie auch über die Punkte p, für welche die Relation $\varrho(f(x), p) \geqslant \varrho(x, p)$ (bzw. $\varrho(f(x), p) \geqslant \lambda \cdot \varrho(x, p)$) gilt.

Bezeichnungen. Ausser den gewöhnlichen Bezeichnungen (z. B. $M \subset N$, $x \in M$, $\varrho(x, y)$, $[x, y]$ — geordnetes Paar) benutzen wir die folgenden: $\underset{\mathfrak{B}(i)}{\{X_i\}}$ — die Menge aller X_i, wo i eine ganze Zahl ist, die der Bedingung $\mathfrak{B}(i)$ genügt. $\overset{(k)'}{\underset{\mathfrak{B}(i)}{\{X_i\}}}$ (bzw. $\overset{(k,l)'}{\underset{\mathfrak{B}(i)}{\{X_i\}}}$) — die Menge aller X_i, wo i eine ganze Zahl ist, die den Bedingungen: $\mathfrak{B}(i)$ und $i \neq k$ (bzw. $\mathfrak{B}(i)$, $i \neq k$ und $i \neq l$) genügt. Die analoge Bedeutung haben die Symbole, $\sum\limits_{\mathfrak{B}(i)} X_i$, $\prod\limits_{\mathfrak{B}(i)} X_i$, $\sum\limits_{\mathfrak{B}(i)}^{(k)'} X_i$, $\prod\limits_{\mathfrak{B}(i)}^{(k)'} X_i$. $D\{f\}$ — der Definitionsbereich der Transformation f, d. h. die Menge aller Punkte x, für welche f definiert ist. $I\{f\}$ — der Gegenbereich der Transformation f, d. h. die Menge aller Punkte $f(x)$, die den Elementen x der Menge $D\{f\}$ entsprechen. $I_f(A)$ — das Bild der Menge A in bezug auf die Transformation f, d. h. die Menge aller Punkte $f(x)$, die den Elementen x der Menge A entsprechen. $\mathfrak{R}^{(n)}$ — der n-dimensionale euklidische Raum.

[6]) S. „Bezeichnungen".

Kap. I. Einleitende Definitionen und Sätze.

1. Der folgenden Mitteilung wird der euklidische Raum von endlich vielen Dimensionen zugrunde gelegt.

Ein k-dimensionaler, euklidischer, in einem n-dimensionalen Grundraume $\mathfrak{R}^{(n)}$ enthaltener Raum $\mathfrak{R}^{(k)}$ (wobei $k < n$) heisst eine *k-dimensionale Ebene in $\mathfrak{R}^{(n)}$*. Insbesondere ist jede eindimensionale Ebene mit einer gewöhnlichen Geraden, jede zweidimensionale Ebene mit einer gewöhnlichen Ebene identisch.

Unter *Hyperebene in $\mathfrak{R}^{(n)}$* versteht man die $(n-1)$-dimensionale Ebene in $\mathfrak{R}^{(n)}$.

2. Eine Punktmenge heisst *konvex*, wenn sie die Eigenschaft hat, dass mit irgend zwei Punkten x und y der Menge stets auch die ganze Strecke $\overline{xy}$ zur Menge gehört.

Es sei M eine beliebige in $\mathfrak{R}^{(n)}$ gelegene Punktmenge. Der Durchschnitt aller abgeschlossenen, konvexen und M enthaltenden Mengen heisse die *konvexe Hülle der Menge M* oder kurz die *K-Hülle der Menge M*. Sie sei mit $\mathfrak{K}(M)$ bezeichnet. Wie man leicht bemerkt, *ist $\mathfrak{K}(M)$ die kleinste die Menge M enthaltende, konvexe und abgeschlossene Punktmenge.*

Es gilt weiter, dass die K-Hülle einer beschränkten Menge selbst beschränkt ist, und ferner: ist $M \subset N$, so ist auch: $\mathfrak{K}(M) \subset \mathfrak{K}(N)$.

3. Wir benutzen ziemlich oft den *Helly-Radonschen Satz* [7]), der die Untersuchung über beliebige Klassen von konvexen Punktmengen in gewissen Fällen auf die Untersuchung über eine endliche Klasse von Punktmengen zurückführt. Der Satz lautet folgendermassen:

Ist in $\mathfrak{R}^{(n)}$ eine Klasse $\mathbf{K}$ von abgeschlossenen, konvexen Punktmengen Z gegeben, wobei folgende Bedingungen erfüllt sind: 1) die Klasse $\mathbf{K}$ ist endlich, oder mindestens eine der Mengen Z ist beschränkt; 2) je $n+1$ der Mengen haben mindestens einen Punkt gemein, — so existiert mindestens ein Punkt, der allen Mengen Z gemeinschaftlich ist.

4. **Hilfssatz 1.** *Es sei in $\mathfrak{R}^{(n)}$ eine beliebige Klasse von (n-dimensionalen) Kugeln gegeben, und es sei M die Menge ihrer Mittelpunkte. Ist der Durchschnitt der Kugeln nicht leer, so gibt es in der K-Hülle $\mathfrak{K}(M)$ der Menge M mindestens einen Punkt, der allen Kugeln gemeinsam ist.*

Beweis. Besteht die Klasse genau aus zwei Kugeln, so ist der Satz evident.

[7]) E. Helly, *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten*. Jahresberichte d. deutsch. Math.-Ver., 32 (1923). — J. Radon, *Mengen konvexer Körper...*, Math. Ann. 83 (1921). — D. König, *Über konvexe Körper*, Math. Zeitschr. 14 (1922). Eine Verallgemeinerung ist von E. Helly angegeben: *Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten*, Monatshefte f. Math. u. Physik, 37 (1930).

(0) Es sei die Gültigkeit des Satzes für jede Klasse von l Kugeln vorausgeschickt.

Sei jetzt $\{K_i\}_{1\leq i\leq l+1}$ ein System von $l+1$ Kugeln gegeben, M die Menge der entsprechenden Mittelpunkte, und p ein beliebiger Punkt des Durchschnittes $\prod_{1\leq i\leq l+1} K_i$. Es sei ferner $\mathfrak{R}^{(l')}$ der kleinste, die Menge M enthaltende, euklidische Raum; es ist also: $l' \leqslant l$ und $l' \leqslant n$. Aus (0) folgt, dass je l Kugeln mindestens einen Punkt in der K-Hülle der entsprechenden Mittelpunkte, also auch in der K-Hülle $\mathfrak{K}(M)$ gemeinsam haben. Es gibt aber in $\mathfrak{R}^{(l')}$ einen Punkt, der allen $l+1$ Kugeln gemeinsam ist, nämlich die Projektion des Punktes p auf $\mathfrak{R}^{(l')}$. Reduziert man die Kugeln K_i auf die in $\mathfrak{R}^{(l')}$ enthaltenen Teile K_i', so genügt die Klasse der $l+2$ Mengen: $\{K_i'\}_{1\leq i\leq l+1}$ und $\mathfrak{K}(M)$ den Bedingungen des Helly-Radonschen Satzes (in $\mathfrak{R}^{(l')}$); es ist also: $\prod_{1\leq i\leq l+1} K_i' \cdot \mathfrak{K}(M) \neq 0$ und auch $\prod_{1\leq i\leq l+1} K_i \cdot \mathfrak{K}(M) \neq 0$.

Betrachte man zuletzt eine beliebige Klasse von Kugeln K, die einen gemeinsamen Punkt haben. Für jede endliche Teilklasse T der Kugeln K gilt die Beziehung: $\prod_{K\in T} K \cdot \mathfrak{K}(M) \neq 0$, wobei M die Menge aller Mittelpunkte ist [8]). Nach dem Borel-Lebesgue'schen „Überdeckungssatze" hat also der Durchschnitt aller Kugeln mit der K-Hülle $\mathfrak{K}(M)$ gemeinsame Punkte.

5. **Hilfssatz 2.** *Es sei in $\mathfrak{R}^{(n)}$ ein System $\{Z_i\}_{1\leq i\leq n+1}$ von $n+1$ konvexen und abgeschlossenen Mengen gegeben, von denen je n mindestens einen gemeinsamen Punkt q_i haben ($q_i \in Z_j$, für $j \neq i$). Ist die K-Hülle der Menge $Q = \{q_i\}_{1\leq i\leq n+1}$ in der Summe der Mengen Z enthalten* (d. h. ist: *$\mathfrak{K}(Q) \subset \sum_{1\leq i\leq n+1} Z_i$*), *so ist der Durchschnitt $\prod_{1\leq i\leq n+1} Z_i$ nicht leer* [9]).

Beweis. Bezeichnen wir den obigen Satz (also: für $n+1$ Mengen Z in $\mathfrak{R}^{(n)}$) mit $\boldsymbol{S}\cdot 2^{(n)}$.

Es gilt zuerst der Satz $\boldsymbol{S}\cdot 2^{(1)}$ (also für $n=1$): in der Tat, ist

[8]) Es ist $\mathfrak{K}(M_T) \subset \mathfrak{K}(M)$, wobei M_T die Menge der Mittelpunkte der Kugeln K ist, für $K \in T$.

[9]) Man kann diesen Hilfssatz aus den allgemeinen Sätzen von Helly herleiten (*Über Systeme...* l. c. [7])). Für unseren Fall aber wird der Beweis auf einfacherem Wege durchgeführt.

die Strecke $\overline{q_1 q_2}$ $(=\mathfrak{H}(Q))$ in der Summe Z_1+Z_2 enthalten (wobei es gilt: $q_1 \in Z_2$, $q_2 \in Z_1$, Z_1 und Z_2 zusammenhängende, abgeschlossene, in der Geraden $\mathfrak{R}^{(1)}$ liegende Mengen sind), so ist Z_1+Z_2 selbst zusammenhängend; die Beziehung $Z_1 \cdot Z_2 = 0$ ist also unmöglich.

Setzen wir nun die Gültigkeit des Satzes $S\cdot 2^{(n-1)}$ voraus, und betrachten wir in $\mathfrak{R}^{(n)}$) das System $\{Z_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ von $n+1$ Mengen, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes $S\cdot 2^{(n)}$ genügen.

Nehmen wir jetzt an, dass der Satz nicht richtig ist, d. h. dass es gilt: $Z_{n+1}\cdot \prod_{1\leqslant i\leqslant n} Z_i = 0$.

Da die Mengen Z_{n+1} und $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} Z_i$ nichtleer, konvex, und abgeschlossen sind, so gibt es eine mit diesen Mengen punktfremde Hyperebene $\mathfrak{R}_0^{(n-1)}$ derart, dass Z_{n+1} und $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} Z_i$ in verschiedenen Halbräumen von $\mathfrak{R}_0^{(n-1)}$ liegen.

Man findet also:

(1) $q_i \in Z_{n+1}$ — für $i=1,2,\dots,n$; und $q_{n+1} \in \prod_{1\leqslant i\leqslant n} Z_i$; jedes Paar $[q_i, q_{n+1}]$ (für $i\leqslant n$) wird also durch die Hyperebene $\mathfrak{R}_0^{(n-1)}$ getrennt. Den Durchschnittspunkt der Verbindungsstrecke $\overline{q_i, q_{n+1}}$ mit der Hyperebene $\mathfrak{R}_0^{(n-1)}$ bezeichnen wir mit $q_i^{(0)}$.

(2) $q_i \in \prod_{1\leqslant j\leqslant n}^{(i)'} Z_j$ und gleichzeitig $q_{n+1} \in \prod_{1\leqslant j\leqslant n}^{(i)'} Z_j$ — für $i\leqslant n$. Also — wegen der Konvexität der Menge $\prod_{1\leqslant j\leqslant n}^{(i)'} Z_j$ — ist auch: $q_i^{(0)} \in \prod_{1\leqslant j\leqslant n}^{(i)'} Z_j$, und dann erhalten wir, dass je $n-1$ der Mengen $\{Z_i \cdot \mathfrak{R}_0^{(n-1)}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ einen Punkt $q_i^{(0)}$ gemein haben.

(3) Bezeichnet man: $Q^{(0)} = \{q_i^{(0)}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, so ergibt sich: $q_i^{(0)} \in \mathfrak{H}(Q)$, also $\mathfrak{H}(Q^{(0)}) \subset \mathfrak{H}(Q)$ und — laut der Voraussetzung des Satzes — $\mathfrak{H}(Q^{(0)}) \subset \sum_{1\leqslant i\leqslant n+1} Z_i$. Da aber: $Q^{(0)} \subset \mathfrak{R}_0^{(n-1)}$ (also auch: $\mathfrak{H}(Q^{(0)}) \subset \mathfrak{R}_0^{(n-1)}$) und $\mathfrak{R}_0^{(n-1)} \cdot Z_{n+1} = 0$, so ist: $\mathfrak{H}(Q^{(0)}) \subset \sum_{1\leqslant i\leqslant n} Z_i$.

Die Klasse der Mengen $\{Z_i \cdot \mathfrak{R}_0^{(n-1)}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ genügt also (wegen (2) und (3)) den Bedingungen des Satzes $S\cdot 2^{(n-1)}$. Daraus folgt aber: $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} Z_i \cdot \mathfrak{R}^{(n-1)} \neq 0$, was der Definition von $\mathfrak{R}_0^{(n-1)}$ widerspricht. Der Satz $S\cdot 2^{(n)}$ ist somit bewiesen.

6. Aus Hfs. 1 und Hfs. 2 folgt

Korollar 3. *Es sei in $\mathfrak{R}^{(n)}$ ein System $\{K_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ von $n+1$ Kugeln gegeben, von denen je n mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Ist die K-Hülle der Menge M aller entsprechenden Mittelpunkte in der Summe der Kugeln enthalten, so ist der Durchschnitt $\prod_{1\leqslant i\leqslant n+1} K_i$ nicht leer.*

Aus der Voraussetzungen folgt nämlich — wegen Hfs. 1 — dass je n von den Kugeln einen gemeinsamem Punkt q_i $(q_i \in \prod_{1\leqslant j\leqslant n+1}^{(i)'} K_j)$ in der K-Hülle der entsprechenden Mittelpunkte, also auch in der K-Hülle aller Mittelpunkte haben; man hat also: $\mathfrak{H}(Q) \subset \mathfrak{H}(M)$ (wobei: $Q = \{q_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$) und — nach Hfs. 2 — ergibt sich die Richtigkeit des Satzes 3.

7. Ein System $\{H_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ von $n+1$ Hyperebenen in $\mathfrak{R}^{(n)}$ wird *regulär* genannt, wenn zwei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) je n von den Hyperebenen haben einen und nur einen Punkt gemein;

(2) es gibt keinen Punkt, der sämtlichen Hyperebenen angehört.

Das reguläre System $\{H_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ von Hyperebenen in $\mathfrak{R}^{(n)}$ bestimmt also ein n-dimensionales Simplex Δ mit den Eckpunkten q_i, wobei: $q_i = \prod_{1\leqslant j\leqslant n+1}^{(i)'} H_j$, für $i=1,2,\dots,n+1$.

Wird im Raume $\mathfrak{R}^{(n)}$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O(X_1, X_2, \dots, X_n)$ so gewählt, dass O ein innerer Punkt des Simplex Δ ist, so kann man die Gleichungen der Hyperebenen H_i in die Normalform setzen:

$$h_i(x) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} x_j \cdot \cos\vartheta_j^{(i)} - \varepsilon^{(i)} = 0, \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n+1;$$

wobei: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — sind die Koordinaten eines Punktes x; $\vartheta_j^{(i)}$ — ist der Winkel zwischen der positiven Halbachse $\overrightarrow{OX_j}$ und den von O auf die Hyperebene H_i gefällten Lote; $\varepsilon^{(i)}$ — ist die (positive) Entfernung des Anfangspunktes O von der Hyperebene H_i.

Jedes Untersystem $Q^{(i)} = \{q_j\}_{1\leqslant j\leqslant n+1}^{(i)'}$ bestimmt ein Simplex Δ_i in dem $(n-1)$-dimensionalen Raume H_i. Das (positive) $(n-1)$-dimensionale Inhaltsmass des Simplex Δ_i wird mit μ_i bezeichnet, das n-dimensionale Inhaltsmass des ganzen Simplex Δ mit μ.

Es sei nun $p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ein bebiebiger Punkt der Raumes. Die Masszahl des Inhaltes der (n-dimensionalen) Pyramide $S(p; \Delta_i)$ (mit Basis Δ_i und Scheitel p)

beträgt[10]): $\frac{1}{n}\cdot\varrho(p;H_l)\cdot\mu_l$, wobei $\varrho(p;H_l)$ die Entfernung des Punktes p von der Hyperebene H_l bedeutet. Falls aber p ein innerer Punkt des Simplex Δ ist, so ist die Summe der Masszahlen der Simplexe $S(p;\Delta_l)$ für $i\leqslant n+1$ dem Inhaltsmass des Simplex Δ gleich, d. h. es gilt:

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}\frac{1}{n}\cdot\varrho(p;H_l)\cdot\mu_l=\mu.$$

Es ist aber: $\varrho(p;H_l)=-(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\xi_j^{(l)}\cdot\cos\vartheta_j^{(l)}-\varepsilon^{(l)})=-h_l(p)$.

Da der Ausdruck: $-\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}\frac{1}{n}\cdot h_l(p)\cdot\mu_l$ eine lineare Funktion der Koordinaten bestimmt und im Innern von Δ konstant ist, so ist er für jeden Punkt des Raumes gleich μ, also positiv. Wir haben also den

Hilfssatz 4. *Es sei in $\Re^{(n)}$ ein reguläres System der Hyperebenen $\{H_l\}_{1\leqslant l\leqslant n+1}$ gegeben, die ein n-dimensionales Simplex Δ mit den $(n-1)$-dimensionalen „Seiten" Δ_l bestimmt; μ sei das Inhaltsmass des Simplex Δ, μ_l das $((n-1)$-dimensionale) Inhaltsmass des Simplex Δ_l; es sei $\overline{h}_l(p)$ $(=-h_l(p))$ die Entfernung eines beliebigen Punktes p des Raumes $\Re^{(n)}$ von der Hyperebene H_l, positiv gerechnet für Punkte, die mit dem Innern des Simplex Δ im gleichen Halbraume von H_l liegen, negativ für Punkte des anderen Halbraumes.*

Dann gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}\overline{h}_l(p)\cdot\mu_l=\mu>0.$$

Kap. II. Zusammenziehende Transformationen und Konzentrationsmengen.

8. Es sei die Menge A in dem Definitionsbereiche einer Transformation (Funktion) f enthalten: $A\subset D\{f\}$.

Definition 1. (a) *Eine Transformation f heisst auf der Menge A z u s a m m e n z i e h e n d, wenn für beliebige Elemente x und y der Menge A die Beziehung*

$$\varrho(f(x),f(y))\leqslant\varrho(x,y)$$

gilt.

(b) *Wenn $A=D\{f\}$, wird f schlechthin die zusammenziende Transformation oder kurz Zusammenziehung heissen.*

[10]) P. H. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie*, II (1905), S. 112.

Es ist evident, dass die zusammenziehende Transformation eine Verallgemeinerung der isometrischen ist, die mit der Beziehung $\varrho(f(x),f(y))=\varrho(x,y)$ charakterisiert wird. Also auch die identische Transformation $(f(x)=x)$ ein spezieller Fall der Zusammenziehung ist.

Wenn eine Transformation f auf einer Menge A zusammenziehend ist, so ist sie auch auf jeder Teilmenge der Menge A zusammenziehend.

Jede zusammenziehende Transformation einer zusammenziehenden Transformation ist selbst eine Zusammenziehung (d. h.: wenn f eine Zusammenziehung auf A, φ eine Zusammenziehung auf $I_f(A)$ ist, und $\psi(x)=\varphi(f(x))$, so ist auch ψ eine Zusammenziehung auf A).

Aus der Definition 1 folgt unmittelbar, dass die zusammenziehende Transformation eine g l e i c h m ä s s i g s t e t i g e Funktion ist[11]). Daraus folgt also die Möglichkeit einer Erweiterung des Definitionsbereiches der Funktion auf den ganzen Raum, mit Beibehaltung der Stetigkeitseigenschaft. Die erweiterte Funktion ist aber im allgemeinen nicht zusammenziehend. *Es bietet sich also die Frage, ob für jede Zusammenziehung f mit dem Definitionsbereiche A eine Zusammenziehung φ existiert, die auf dem ganzen Raume $\Re^{(n)}$ definiert und auf A mit f identisch ist.* Dieses Problem wird weiter gelöst (s. § 17, Hauptsatz I).

9. Es sei $A\subset D\{f\}$ und $a\in A$, wobei f eine beliebige Transformation ist.

Definition 2.1. (a) *Ein Punkt p heisst ein K o n z e n t r a t i o n s p u n k t f ü r a in bezug auf f, wenn es gilt:*

$$\varrho(f(a),p)\leqslant\varrho(a,p).$$

(b) *Die Menge aller Konzentrationspunkte für a in bezug auf f heisst K o n z e n t r a t i o n s m e n g e f ü r a in bezug auf f. Sie wird mit $\Gamma_f(a)$ bezeichnet.*

Definition 2.2. (a) *Ein Punkt p heisst ein Konzentrationspunkt für (die M e n g e) A in bezug auf f, wenn p ein Konzentrationspunkt in bezug auf f für jedes Element der Menge A ist, d. h. wenn die Beziehung*

$$p\in\prod_{a\in A}\Gamma_f(a)$$

gilt.

[11]) Vgl. A. Lindenbaum, *Contributions...*, S. 214, Fussn. [3]).

(b) *Die Menge aller Konzentrationspunkte für A (in bezug auf f) heisst Konzentrationsmenge für A (in bezug auf f) und wird mit $\mathfrak{G}_f(A)$ bezeichnet.*

Es ist also:

$$\mathfrak{G}_f(A) = \prod_{a \in A} \Gamma_f(a),$$

(c) *Im Falle: $A = D\{f\}$, sprechen wir auch kurz von den Konzentrationspunkten (bzw. Konzentrationsmengen) d e r Funktion f.* Man bezeichnet auch: $\mathfrak{G}\{f\} = \mathfrak{G}_f(D\{f\})$.

Es werden jetzt einige einfache Eigenschaften der obigen Begriffen angegeben.

Satz 5. (a) *Ist $f(a) = a$, so ist $\Gamma_f(a)$ mit dem ganzen Raum identisch (und umgekehrt).*

(b) *Ist $f(a) \neq a$ und H die in bezug auf das Paar $[a, f(a)]$ symmetrische (spiegelnde) Hyperebene, so ist $\Gamma_f(a)$ mit dem abgeschlossenen Halbraume identisch, der durch H begrenzt ist und den Punkt $f(a)$ enthält.*

Satz 6. *Ist $A' \subset A$, so ist $\mathfrak{G}_f(A) \subset \mathfrak{G}_f(A')$.*

Satz 7. *$\mathfrak{G}_f(A)$ ist eine abgeschlossene und konvexe Menge.*

Satz 8. *Es gilt: $f(a) \in \Gamma_f(a)$.*

Satz 9. *Es gilt: $a \in \Gamma_f(a)$ dann und nur dann, wenn $f(a) = a$.*

Aus S. 9 folgt unmittelbar:

Korollar 10. *Ist ein Konzentrationspunkt p der Funktion f in dem Definitionsbereiche $D\{f\}$ enthalten, so ist $f(p) = p$.*

Satz 11. *Gilt die Beziehung: $f(a) = a$ für jedes Element a einer echten [12]) Teilmenge A' der Menge A, so ist: $\mathfrak{G}_f(A - A') = \mathfrak{G}_f(A)$.*

10. Das Problem der Existenz der Konzentrationspunkte steht in einem notwendigen Zusammenhange mit dem Begriffe der zusammenziehenden Transformation. Wir haben schon gesehen, dass wenn $f(p) = p$ ist, so gilt $p \in \Gamma_f(p)$; nicht aber unbedingt: $p \in \mathfrak{G}\{f\}$. Es gilt jedoch offenbar der

[12]) Die Einschränkung $A' \neq A$ wird überflüssig, wenn man für die Nullmenge 0 die Beziehung $\mathfrak{G}_f(0) = \mathfrak{R}^{(n)}$ annimt, was der Definition 2·2 im ganzen entspricht.

Satz 12. *Ist f eine Zusammenziehung und $f(p) = p$, so ist p ein Konzentrationspunkt der Transformation f (d. h. es gilt: $p \in \mathfrak{G}\{f\}$).*

In bezug auf das oben erwähnte Existenzproblem beweisen wir ferner, dass *jede Zusammenziehung*, welche eine beliebige Menge A auf eine *beschränkte* Menge B abbildet, mindestens *einen Konzentrationspunkt hat*. (§ 20, Hauptsatz II).

11. Zuerst wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 13. *Es sei in $\mathfrak{R}^{(n)}$ ein reguläres System $\{\sigma_l\}_{1 \leq l \leq n+1}$ von Hyperebenen gegeben, das ein Simplex Δ mit den Eckpunkten q_l bestimmt, wobei: $q_l = \prod\limits_{1 \leq j \leq n+1}^{(l)'} \sigma_j$. Es sei ferner ein System von Punkten $\{a_l\}_{1 \leq l \leq n+1}$ derart gegeben, dass a_l mit q_l (also mit dem Innern des Simplex Δ) im gleichen Halbraume von σ_l liegt. Ist b_l — für $l = 1, 2, \ldots, n+1$ — das Spiegelbild von a_l in bezug auf die Hyperebene σ_l, so gibt es ein Paar $[a_l, a_k]$, für welches die Relation $\varrho(b_l, b_k) > \varrho(a_l, a_k)$ gilt (d. h., dass die Punkte a_l und a_k infolge der Transformation (der Spiegelungstransformation) ihre Entfernung vergrössern).*

B e w e i s. Wird in $\mathfrak{R}^{(n)}$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ so gewählt, dass der Anfangspunkt O im Innern des Simplex Δ liegt, so kann man die Gleichungen der Hyperebenen σ_l in die Form

$$\sigma_l(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \cdot \cos \vartheta_j^{(l)} - \varepsilon^{(l)} = 0 \tag{1}$$

setzen, wobei die Symbole $\sigma_l(x)$, x_j, $\vartheta_j^{(l)}$ und $\varepsilon^{(l)}$ die in § 7 erklärte Bedeutung haben [13]).

Wir bezeichnen mit s_l die Projektion des Punktes a_l (also auch des Punktes b_l) auf die Hyperebene σ_l. Es ist also s_l der Mittelpunkt der Strecke $\overline{a_l b_l}$. Die Entfernung $\varrho(a_l, s_l)$ $(= \varrho(b_l, s_l))$ bezeichnen wir mit $\varrho^{(l)}$, die Koordinaten der Punkte a_l, b_l, s_l bzw. mit: $a_l(\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)}, \ldots, \alpha_n^{(l)})$, $b_l(\beta_1^{(l)}, \beta_2^{(l)}, \ldots, \beta_n^{(l)})$, $s_l(\zeta_1^{(l)}, \zeta_2^{(l)}, \ldots, \zeta_n^{(l)})$.

Aus den oben angenommenen Bezeichnungen und Voraussetzungen folgt unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j^{(l)} &= \zeta_j^{(l)} - \varrho^{(l)} \cdot \cos \vartheta_j^{(l)} \\ \beta_j^{(l)} &= \zeta_j^{(l)} + \varrho^{(l)} \cdot \cos \vartheta_j^{(l)} \end{aligned}\right\} \text{für: } \left\{\begin{aligned} j &= 1, 2, \ldots, n \\ l &= 1, 2, \ldots, n+1. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

[13]) $\sigma_l(x)$ tritt hier an Stelle von $h_l(x)$.

Wir berechnen jetzt den Ausdruck:

$$\tau_{(i,k)} = \varrho^2(b_i, b_k) - \varrho^2(a_i, a_k).$$

Es gilt:

$$\tau_{(i,k)} = \sum_{1 \leq j \leq n} (\beta_j^{(i)} - \beta_j^{(k)})^2 - \sum_{1 \leq j \leq n} (\alpha_j^{(i)} - \alpha_j^{(k)})^2 =$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} (\beta_j^{(i)} + \alpha_j^{(i)} - \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}) (\beta_j^{(i)} - \alpha_j^{(i)} - \beta_j^{(k)} + \alpha_j^{(k)})$$

und — wegen (2) — es gilt:

$$\tau_{(i,k)} = \sum_{1 \leq j \leq n} (2\zeta_j^{(i)} - 2\zeta_j^{(k)}) (2\varrho^{(i)} \cos \vartheta_j^{(i)} - 2\varrho^{(k)} \cos \vartheta_j^{(k)}) = \tag{3}$$

$$= 4\varrho^{(i)} \cdot \sum_{1 \leq j \leq n} [(\zeta_j^{(i)} - \zeta_j^{(k)}) \cdot \cos \vartheta_j^{(i)}] + 4\varrho^{(k)} \cdot \sum_{1 \leq j \leq n} [(\zeta_j^{(k)} - \zeta_j^{(i)}) \cdot \cos \vartheta_j^{(k)}].$$

Da aber $s_i(\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}, \ldots, \zeta_n^{(i)})$ auf der Hyperebene σ_i liegt, so ist: $\sum\limits_{1 \leq j \leq n} \zeta_j^{(i)} \cos \vartheta_j^{(i)} = \varepsilon^{(i)}$ und es folgt:

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (\zeta_j^{(i)} - \zeta_j^{(k)}) \cos \vartheta_j^{(i)} = \varepsilon^{(i)} - \sum_{1 \leq j \leq n} \zeta_j^{(k)} \cos \vartheta_j^{(i)} = -\sigma_i(s_k) = \bar{\sigma}_i(s_k);$$

das Symbol $\bar{\sigma}_i(s_k)$ bedeutet die Entfernung des Punktes s_k von der Hyperebene σ_i, positiv gerechnet im Falle, wenn s_k mit dem Innern des Simplex Δ im gleichen Halbraume von σ_i liegt, negativ im entgegengesetzten Falle.

Ganz analog ergibt sich:

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (\zeta_j^{(k)} - \zeta_j^{(i)}) \cos \vartheta_j^{(k)} = \bar{\sigma}_k(s_i).$$

Daher geht (3) in

$$\tau_{(i,k)} = 4[\varrho^{(i)} \cdot \bar{\sigma}_i(s_k) + \varrho^{(k)} \cdot \bar{\sigma}_k(s_i)] \tag{4}$$

über.

Es ist zu beweisen, dass ein Paar $[i, k]$ existiert, für welches die Ungleichung: $\tau_{(i,k)} > 0$ gilt. Zu diesem Zwecke führen wir einen neuen Ausdruck [14]) ein:

$$\tau'_{(i,k)} = \frac{1}{4} \cdot \tau_{(i,k)} \cdot \frac{\mu_{(i,k)}}{\varrho^{(i)} \cdot \varrho^{(k)} \cdot \sin \theta_{(i,k)}} \tag{5}$$

[14]) Die Einführung dieses Ausdrucks verdanke ich der Anregung von Hrn. N. Aronszajn.

wobei:

$\mu_{(i,k)}$ bedeutet das (positive) Inhaltsmass des $(n-2)$-dimensionalen, durch das Untersystem $\{q_l\}_{1 \leq l \leq n+1}^{(i,k)'}$ bestimmten Simplex; $\mu_{(i,k)}$ ist also die Masszahl derjenigen $((n-2)$-dimensionalen) „Kante" der Pyramide Δ, die den $((n-1)$-dimensionalen) „Seiten" (σ_i) und (σ_k) gemeinschaftlich ist [15]);

$\theta_{(i,k)}$ bedeutet den Winkel zwischen den Hyperebenen σ_i und σ_k.

Es ist klar, dass $\tau_{(i,k)}$ und $\tau'_{(i,k)}$ gleichzeitig positiv oder negativ sind; deshalb genügt es zu beweisen, dass für mindestens ein Paar $[i, k]$ die Zahl $\tau'_{(i,k)}$ positiv ist. Dazu beweisen wir, dass es gilt:

$$T = \sum_{(i,k)} \tau'_{(i,k)} > 0$$

wobei die Summe $(\sum\limits_{(i,k)})$ auf sämtliche Paare $[i, k]$ (für $i < k$) ausgedehnt wird.

Aus (4) und (5) ergibt sich, in der Tat:

$$\tau'_{(i,k)} = \frac{\bar{\sigma}_i(s_k)}{\varrho^{(k)} \sin \theta_{(i,k)}} \cdot \mu_{(i,k)} + \frac{\bar{\sigma}_k(s_i)}{\varrho^{(i)} \sin \theta_{(i,k)}} \cdot \mu_{(i,k)}.$$

Daraus folgt also:

$$T = \sum_{2 \leq k \leq n+1} \sum_{1 \leq i < k} \tau'_{(i,k)} = \sum_{1 \leq k \leq n+1} \sum_{1 \leq i \leq n+1}^{(k)'} \frac{\bar{\sigma}_i(s_k)}{\varrho^{(k)} \cdot \sin \theta_{(i,k)}} \cdot \mu_{(i,k)} =$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq n+1} \frac{1}{\varrho^{(k)}} \sum_{1 \leq i \leq n+1}^{(k)'} \frac{\bar{\sigma}_i(s_k)}{\sin \theta_{(i,k)}}.$$

[15]) Man kann voraussetzen: $n \geqslant 2$. Für $n = 2$ gehen die „Seiten" σ_i in die „Dreiecksseiten" und die „Kanten" in die Ecken des Dreiecks Δ über; in diesem Falle nehmen wir $\mu_{(i,k)} = 1$ an. Für $n = 1$ ist der Satz 13 unmittelbar evident: Es finden nämlich folgende Beziehungen statt (auf der Geraden $\mathfrak{R}^{(1)}$):

(1) $b_1 \lesssim \sigma_1 \lesssim \sigma_2 \lesssim b_2$; (2) $\sigma_1 \lesssim a_1$; (3) $a_2 \lesssim \sigma_2$;

(das Symbol „$\lesssim$" bezeichnet eine der zwei Ordnungsrelationen der Geraden). Es folgt also — wegen der Dreiecksungleichung" —:

$$\varrho(a_1, a_2) \leqslant \varrho(a_1, \sigma_1) + \varrho(\sigma_1, \sigma_2) + \varrho(\sigma_2, a_2).$$

Wären die linke und die rechte Seite gleich, so erhielten wir:

$$a_1 \lesssim \sigma_1 \lesssim \sigma_2 \lesssim a_2,$$

was mit (2) und (3) im Widerspruch steht. Es ergibt sich also — da $\varrho(a_i, \sigma_i) = \varrho(b_i, \sigma_i)$ und wegen (1) —

$$\varrho(a_1, a_2) < \varrho(b_1, \sigma_1) + \varrho(\sigma_1, \sigma_2) + \varrho(\sigma_2, b_2) = \varrho(b_1, b_2),$$

w. z. b. w.

Wie man aber leicht bemerkt, ist der Ausdruck: $\bar{h}_l(s_k)=\dfrac{\bar{\sigma}_l(s_k)}{\sin\theta_{(l,k)}}$ die Entfernung des (auf σ_k gelegenen) Punktes s_k von der $((n-2)$-dimensionalen) „Kante“ $H_l^{(k)}=\sigma_l\cdot\sigma_k$, positiv gerechnet, wenn s_k mit dem Innern des $((n-1)$-dimensionalen) Simplex Δ_k $(=\Delta\cdot\sigma_k)$ in der gleichen, durch $H_l^{(k)}$ bestimmten, $(n-1)$-dimensionalen Halbebene der Hyperebene σ_k liegt, negativ im entgegengesetzten Falle.

In dem $(n-1)$-dimensionalen Raume σ_k sind also die Bedingungen des Hilfssatzes 4 erfüllt, woraus folgt:

$$\sum_{1\leq l\leq n+1}^{(k)\prime}\frac{\bar{\sigma}_l(s_k)}{\sin\theta_{(l,k)}}\cdot\mu_{(l,k)}=\sum_{1\leq l\leq n+1}^{(k)\prime}\bar{h}_l(s_k)\cdot\mu_{(l,k)}=(n-1)\cdot\mu_k$$

wobei μ_k das (positive) Inhaltsmass des Simplex Δ_k bezeichnet.

Es wird also die Beziehung

$$T=\sum_{1\leq l\leq n+1}\frac{1}{\varrho^{(k)}}\cdot(n-1)\cdot\mu_k>0$$

bestätigt und damit der Satz bewiesen.

12. Satz 14. *Ist in $\mathfrak{R}^{(n)}$ eine Zusammenziehung f gegeben, welche das System von $n+1$ Punkten $A=\{a_l\}_{1\leq l\leq n+1}$ auf das System $B=\{f(a_l)\}_{1\leq l\leq n+1}$ transformiert, so ist die K-Hülle der Menge B in der Summe der Mengen $\Gamma_f(a_l)$ (für $i=1,2,\dots,(n+1)$) enthalten: $\mathfrak{H}(B)\subset\sum_{1\leq l\leq n+1}\Gamma_f(a_l)$*

oder mit anderen Worten:

ist p ein beliebiger Punkt der K-Hülle der Menge B, so gibt es einen Punkt a_l, der die Beziehung $\varrho(f(a_l),p)\leqslant\varrho(a_l,p)$ erfüllt (d. h., einen solchen Punkt a_l, der sich von p „nicht entfernt“).

Beweis: Bezeichnen wir den obigen „n-dimensionalen“ Satz mit S. $14^{(n)}$.

Für $n=1$ ist der Satz evident [16]).

Nehmen wir also an, dass der Satz S. $14^{(n-1)}$ richtig ist und die Voraussetzungen des Satzes S. $14^{(n)}$ erfüllt sind.

[16]) Existiert auf der Strecke $\overline{b_1, b_2}$ ein Punkt p, der zu $\Gamma_f(a_1)+\Gamma_f(a_2)$ nicht gehört, so genügen die Punkte $a_1, a_2, b_1, b_2, \sigma_1, \sigma_2$ den Bedingungen (1), (2) und (3) von Fussnote [15]) und es gilt $\varrho(a_1,a_2)<\varrho(b_1,b_2)$, im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass f eine Zusammenziehung ist.

Wir behaupten zuerst:

(α) die K-Hülle eines jeden Untersystems $B_k=\{f(a_l)\}_{1\leq l\leq n+1}^{(k)\prime}$ (für $k=1,2,\dots,n+1$) ist in der Summe der entsprechenden Konzentrationsmengen $\sum\limits_{1\leq l\leq n+1}^{(k)\prime}\Gamma_f(a_l)$ enthalten.

In der Tat sei p ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{H}(B_k)$. Gilt nun die Beziehung $p\in\sum\limits_{1\leq l\leq n+1}^{(k)\prime}\Gamma_f(a_l)$ nicht, so gilt für $i\neq k$ die Ungleichung $\varrho(p,a_l)<\varrho(p,f(a_l))$, also auch: $\varrho(\bar{p},a_l)<\varrho(p,f(a_l))$, wobei $\bar{p}$ die Projektion des Punktes p auf die das System A_k $(=\{a_l\}_{1\leq l\leq n+1}^{(k)\prime})$ enthaltende Hyperebene $H_{(A_k)}$ bezeichnet. Würde jetzt die Hyperebene $H_{(A_k)}$ auf die das System B_k enthaltende Hyperebene $H_{(B_k)}$ derart gelegt, dass $\bar{p}$ sich mit p deckt, so hätten wir im $(n-1)$-dimensionalen Raume $H_{(B_k)}$ einen Fall, der dem Satze S. $14^{(n-1)}$ widerspricht. Die Behauptung (α) ist also bewiesen.

Aus (α) folgt, dass der Rand der K-Hülle $\mathfrak{H}(B)$ auch in der Summe $\sum\limits_{1\leq l\leq n+1}\Gamma_f(a_l)$ enthalten ist, weil er in der Summe der K-Hüllen sämtlicher Mengen B_k enthalten ist. Es ergibt sich also:

(β) Die Komplementärmenge von $\sum\limits_{1\leq l\leq n+1}\Gamma_f(a_l)$, d. h. die Menge $\prod\limits_{1\leq l\leq n+1}C\Gamma_f(a_l)$ [17]) enthält keinen Randpunkt der Menge $\mathfrak{H}(B)$.

Angenommen jetzt, dass es in $\mathfrak{H}(B)$ einen Punkt gibt, der in der Summe $\sum\limits_{1\leq l\leq n+1}\Gamma_f(a_l)$ nicht liegt, es folgt aus (β), dass $\prod\limits_{1\leq l\leq n+1}C\Gamma_f(a_l)$ (als nichtleere, konvexe Menge) ganz im Innern der Menge $\mathfrak{H}(B)$ liegt und deshalb beschränkt ist. Der nichtleere, offene und beschränkte Durchschnitt von $n+1$ Halbräumen $C\Gamma_f(a_l)$ bildet dann das Innere eines n-dimensionalen Simplex Δ; das System $\{\sigma_l\}_{1\leq l\leq n+1}$ der Ränder dieser Halbräume bestimmt also ein reguläres System von Hyperebenen in $\mathfrak{R}^{(n)}$. Dabei ist $f(a_l)$ das Spiegelbild von a_l in bezug auf die Hyperebene σ_l, und zwar liegt a_l mit dem Innern des Simplex Δ im gleichen Halbraume von σ_l. Alle Bedingungen des Satzes 13 sind also erfüllt und es folgt, dass für ein Paar $[i,k]$ die Ungleichung $\varrho(f(a_l),f(a_k))>\varrho(a_l,a_k)$ gilt, was der

[17]) CX — das Komplement von X.

Voraussetzung widerspricht, dass f eine zusammenziehende Transformation ist.

Damit ist der Satz völlig bewiesen.

13. Jetzt gehen wir zur Lösung des Hauptproblems über die Erweiterung der zusammenziehenden Transformationen auf den ganzen Raum $\mathfrak{R}^{(n)}$ über.

Zuerst bemerken wir den evidenten

Hilfssatz 15. *Ist A der Definitionsbereich einer zusammenziehenden Transformation f, $\bar{A}$ — die abgeschlossene Hülle von A, φ — eine auf $\bar{A}$ definierte und stetige Funktion die auf A mit f identisch ist, dann ist φ eine Zusammenziehung.*

Daraus folgt:

Satz 16. *Ist A der Definitionsbereich einer Zusammenziehung f, so existiert eine und nur eine auf $\bar{A}$ definierte und zusammenziehende Transformation, die auf A mit f identisch ist* [18].

Es ist auch leicht zu sehen, dass die Funktionen f und φ dieselbe Konzentrationsmengen haben.

14. Zur Erledigung des Hauptproblems genügt es — nach dem obigen Satze — zu zeigen, dass

(T) *jede Zusammenziehung f mit dem Definitionsbereiche A lässt sich auf einen beliebigen Punkt p des Raumes $\mathfrak{R}^{(n)}$ erweitern.*

Denn dies angenommen, wird es möglich (Induktionsschlussweise) den Definitionsbereich auf eine endliche und folglich [19] auf eine abzählbare, in $\mathfrak{R}^{(n)}$ dichte Menge zu erweitern und dann — wegen des Satzes 16 — auch auf den ganzen Raum.

15. Den Satz (T) kann man aber anders ausdrücken. Es ist nämlich zu beweisen, dass es einen solchen Punkt q gibt, dass für jedes Element a der Menge A die Beziehung $\varrho(f(a), q) \leqslant \varrho(a, p)$ gilt. Das heisst aber, dass q ein gemeinsamer Punkt sämtlicher Kugeln $K(f(a); \varrho(a, p))$ ist, deren Mittelpunkte in $f(a)$ liegen und Radien gleich $\varrho(a, p)$ sind; d. h. es gilt: $q \in \prod_{a \in A} K(f(a); \varrho(a, p))$.

Aber nach dem Helly-Radonschen Satze ist die letzte Bedingung

[18]) Vgl. A. Lindenbaum, *Contributions...*, S. 214, Fussn. [4]).

[19]) Da die Beziehung nur endlich viele Punkte betrifft.

der folgenden äquivalent: je $n+1$ der erwähnten Kugeln haben mindestens einen gemeinsamen Punkt.

16. Wir beweisen also den folgenden

Satz 17. *Es sei in $\mathfrak{R}^{(n)}$ ein System $\{K_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ von $n+1$ Kugeln mit den Mittelpunkten a_i und Radien ϱ_i gegeben; p sei ein gemeinsamer Punkt dieser Kugeln und $\{b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ ein System von Punkten, die für jedes $i = 1, 2, \ldots, n+1$ und $j = 1, 2, \ldots, n+1$, die Bedingung $\varrho(b_i, b_j) \leqslant \varrho(a_i, a_j)$ erfüllen* [20]).

Ist $\{K_i^0\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ das System der Kugeln mit den Mittelpunkten b_i und Radien ϱ_i, — so gibt es mindestens einen Punkt q, der allen Kugeln K_i^0 gemeinsam ist.

Beweis. Bezeichnen wir den obigen Satz mit S. $17^{(n)}$.

Für $n = 1$ ist der Satz unmittelbar beweisbar.

Es sei also vorausgeschickt, dass der Satz S. $17^{(n-1)}$ und die Voraussetzungen des Satzes S. $17^{(n)}$ richtig sind; dabei darf es noch vorausgesetzt werden, dass p auf den Oberflächen der Kugeln K_i liegt, d. h., dass: $\varrho_i = \varrho(a_i, p)$ [21]).

Wir behaupten zuerst:

(α) J e n d e r K u g e l n K_i^0 h a b e n e i n e n P u n k t g e m e i n.

In der Tat, es sei das Untersystem $\overset{(j)'}{\{K_i^0\}}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ betrachtet. Das entsprechende Untersystem $\overset{(j)'}{\{K_i\}}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ hat den gemeinsamen Punkt p, hat also auch den Punkt $\bar{p}$ gemein, wobei $\bar{p}$ die projektion des Punktes p auf die das Untersystem $\overset{(j)'}{\{a_i\}}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ enthaltende Hyperebene $H_{(j)}$ ist. Wird jetzt $H_{(j)}$ auf die das Untersystem $\overset{(j)'}{\{b_i\}}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ enthaltende Hyperebene gelegt, so bekommt man den „($n-1$)-dimensionalen Fall", und also ist (α) — nach S. $17^{(n-1)}$ — richtig.

[20]) Also ist $\{b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ aus $\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ durch eine zusammenziehende Transformation erhalten.

[21]) Man kann nämlich die entsprechenden konzentrischen Teilkugeln betrachten. Man beschränkt dadurch die Allgemeinheit des Satzes nicht.

(β) Die K-Hülle der Menge der Mittelpunkte der Kugeln $\{K_i^0\}_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ ist in der Summe dieser Kugeln enthalten, d. h. es gilt:

$$\mathfrak{K}(B)\cdot\subset\sum_{1\leqslant i\leqslant n+1}K_i^0.$$

Denn es sei x ein beliebiger Punkt, der zu $\mathfrak{K}(B)$ gehört. Betrachten wir eine isometrische Transformation φ, die die Menge $A+(p)$ derart abbildet, dass $\varphi(p)=x$ ist. Bezeichnet man $\varphi(a_i)=a_i'$ und betrachtet man die Transformation ψ, die durch die Gleichung $\psi(a_i')=b_i$ (für $i=1,2,\ldots,n+1$) definiert ist, so bemerkt man unmittelbar, dass ψ eine Zusammenziehung ist. Dem Satze 14 zufolge gibt also für mindestens ein i ($=i_0$) die Beziehung:

$$\varrho(b_{i_0},x)\leqslant\varrho(a_{i_0}',x).$$

Aber nach der Bestimmung der Transformation φ, gilt die Gleichung $\varrho(a_i',x)=\varrho(a_i,p)$. Daher ist also: $\varrho(b_{i_0},x)\leqslant\varrho(a_{i_0},p)$, woraus $x\,\varepsilon\,K_{i_0}^0$ folgt. (β) ist also bewiesen.

Nach dem Korollar 3 ergibt sich jetzt — wegen (α) und (β) — dass der Durchschnitt der Kugeln K_i^0 nicht leer ist; damit ist der Satz $17^{(n)}$ bewiesen.

17. Aus S. 17 folgt aber der Satz (T) (§ 15) und also auch (wegen § 14) der

Hauptsatz I. *Ist (in $\Re^{(n)}$) eine Zusammenziehung f mit dem Definitionsbereiche A gegeben, so existiert eine im ganzen Raume definierte Zusammenziehung φ, die auf A mit f identisch ist.*

Damit ist das erste Hauptproblem (§ 8) gelöst.

18. Es ist schon bemerkt worden, dass, wenn ein Konzentrationspunkt p einer Transformation f zum Definitionsbereiche $D\{f\}$ gehört, so ist $f(p)=p$ (§ 9, Kor. 10); umgekehrt: ist $f(p)=p$ und ist f eine Zusammenziehung, so ist p ein Konzentrationspunkt der Transformation f (§ 10, S. 12). Daraus folgt

Korollar 18. *Ist f eine Zusammenziehung und gilt:* $\mathfrak{G}\{f\}\subset D\{f\}$, *dann ist:* $\mathfrak{G}\{f\}=\underset{x}{E}[f(x)=x]$ [22]).

[22]) $\underset{x}{E}[W(x)]$ = die Menge aller x die der Bedingung $W(x)$ genügen.

Man hat ferner:

Hilfssatz 19. *Für jede Zusammenziehung f mit dem Definitionsbereiche A gibt es eine auf der Menge $A+\mathfrak{G}_f(A)$ definierte und auf A mit f identische Zusammenziehung f_0, die dieselbe Konzentrationsmenge wie f hat ($\mathfrak{G}\{f_0\}=\mathfrak{G}\{f\}$).*

Es genügt nämlich zu definieren:

$$\begin{aligned} f_0(x)&=f(x) \quad\text{— für}\quad x\,\varepsilon\,A\\ f_0(x)&=x \quad\text{— für}\quad x\,\varepsilon\,\mathfrak{G}_f(A)\ \text{(oder für } x\,\varepsilon\,\mathfrak{G}_f(A)-A). \end{aligned}$$

f_0 ist natürlich die einzige, zusammenziehende und auf $A+\mathfrak{G}_f(A)$ definierte Funktion, welche auf A mit f identisch ist und dieselbe wie f Konzentrationsmenge hat.

Aus obiger Bemerkung — wenn man noch den Hauptsatz I berücksichtigt — ergibt sich der

Satz 20. *Ist (in $\Re^{(n)}$) eine Zusammenziehung f mit dem Definitionsbereiche A gegeben, so existiert eine im ganzen Raume definierte und zusammenziehende Transformation φ, die auf A mit f identisch ist und die dieselbe Konzentrationsmenge wie f hat.*

Denn es genügt zuerst die Transformation f auf die im Sinne des Hilfssatzes 19 definierte Transformation f_0 (mit dem Definitionsbereiche $D\{f_0\}=A+\mathfrak{G}_f(A)$) zu erweitern, und dann f_0 auf die nach dem Hauptsatze I existierende Transformation φ mit den geforderten Eigenschaften.

19. Der bewiesene Satz (T) (§§ 14—17) ist — wie man leicht bemerkt — äquivalent dem folgenden:

Satz 21. *Es sei U eine Klasse von Kugeln K, A — die Menge der entsprechenden Mittelpunkte, und p — ein gemeinsamer Punkt aller Kugeln. Transformiert eine Zusammenziehung f die Menge A auf B, und ist U' die Klasse der Kugeln K' mit der Menge B der Mittelpunkte und mit Radien, die den Radien der entsprechenden ursprünglichen Kugeln gleich sind, —*

— dann gibt es einen Punkt, der allen Kugeln K' gemeinsam ist.

Mittels des Hilfssatzes 1, kann man die Behauptung des obigen Satzes folgendermassen verschärfen:

Korollar 22. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes 21 erfüllt sind, so gibt es in der K-Hülle der Menge B einen Punkt, der allen Kugeln K' gemeinsam ist.*

Daraus folgt aber auch eine Verschärfung des Hauptsatzes I, es gilt nämlich der

Satz I'. *Ist (in $\mathfrak{R}^{(n)}$) eine zusammenziehende Transformation f gegeben, die die Menge A auf eine Menge B abbildet, so existiert eine im ganzen Raume definierte Zusammenziehung φ, die auf A mit f identisch ist und die den Raum auf eine Teilmenge der K-Hülle der Menge B transformiert* (d. h. es gilt: $I_\varphi(\mathfrak{R}^{(n)}) \subset \mathfrak{H}(B)$).

20. Auf Grund des obigen Satzes wird jetzt das zweite Hauptproblem (§ 10) unmittelbar gelöst.

Hauptsatz II. *Jede zusammenziehende Transformation f die eine Menge A $(=D\{f\})$ auf eine beschränkte Menge B abbildet, hat mindestens einen Konzentrationspunkt (und zwar in $\mathfrak{H}(B)$).*

Beweis. In der Tat, die nach dem Satze I' gebildete erweiterte Funktion φ transformiert den Raum auf eine Teilmenge von $\mathfrak{H}(B)$; daher ging die Menge $\mathfrak{H}(B)$ selbst auf eigenen Teil über. Da aber $\mathfrak{H}(B)$ eine Zelle [23], und φ eine stetige Abbildung ist, so folgt — nach dem bekannten topologischen Brouwerschen „Fixpunktsatze" — dass es einen Punkt p (in $\mathfrak{H}(B)$) gibt, für welchen die Beziehung $\varphi(p)=p$ gilt. Also muss p ein Konzentrationspunkt des Transformation φ sein, und daher auch der ursprünglichen Transformation f.

Bemerkung. Die Voraussetzung der Beschränktheit der Menge B ist wesentlich: es genügt die Translation des Raumes zu betrachten [24].

Wir fügen noch das unmittelbare Korollar hinzu:

Korollar 23. *Jede zusammenziehende Transformation einer beschränkten Menge hat mindestens einen Konzentrationspunkt (und zwar in der K-Hülle des Gegenbereiches der Transformation).*

21. Es ist auch nicht schwierig den Hauptsatz II auf Grund der Sätze 14 und 2 zu beweisen ohne den Hauptsatz I (und den „Fixpunktsatz") anzuwenden. Ferner ist auch möglich den Satz 14 leicht zu erhalten, indem man von dem Hauptsatze II ausgeht [25]).

22. Betrachtet man die Umkehrung einer zusammenziehenden Transformation (d. h. eine Relation Φ mit dem Definitionsbereiche X, die die Bedingung erfüllt:

[23]) „Zelle" heisst eine Menge (in $\mathfrak{R}^{(n)}$) die der k-dimensionalen Kugel homöomorph ist ($k \leqslant n$). Vgl. Helly, *Über Systeme*...

[24]) Vgl. § 36, Satz $\mathfrak{L}$ II^e.

[25]) Dieser „Äquivalenzcharakter" der erwähnten Sätze geht aus der spezifischen Dualität hervor, die zwischen den Summen und Durchschnitten der konvexen Mengen (allgemeiner: der Zellen) besteht. Vgl. Helly, *Über Systeme*...

wenn für $x_1, x_2 \varepsilon X$ gilt $x_1 \Phi y_1$ und $x_2 \Phi y_2$, so gilt $\varrho(y_1, y_2) \geqslant \varrho(x_1, x_2)$), so sieht man, dass diese Umkehrung weder stetig noch einwertig sein muss. Man kann sie eine *zerstreuende Transformation* [26]) oder kurz: Zerstreuung nennen.

Man kann auch den Begriff des *Dezentrationspunktes* (bzw. der Dezentrationsmenge) einführen; die Bedeutung der Symbole: $\breve{\Gamma}_f(a)$, $\breve{\mathfrak{G}}_f(A)$, $\breve{\mathfrak{G}}\{f\}$ wird klar. Das Symbol $f(x)$ bezeichnet hier nicht einen Punkt, sondern eine Punktmenge.

Es ist leicht zu sehen, dass die zu den in vorigen §§-en angegebenen analogen Sätze im allgemeinen richtig sind; wir führen hier nur einige an.

Satz $\breve{12}$. *Jeder „Fixpunkt" einer Zerstreuung ist gleichzeitig ein Dezentrationspunkt dieser Transformation.*

Die Analoga zu Kor. 10 und Kor. 18 gelten aber nicht.

Hauptsatz $\breve{\text{II}}$. *Jede zerstreuende Transformation, die eine beschränkte Menge A auf eine beliebige Menge abbildet, hat mindestens einen Dezentrationspunkt (und zwar in der K-Hülle der Menge A).*

Das allgemeine Problem der Erweiterung für zerstreuende Transformationen ergibt keinen genauen Analogon des Hauptsatzes I: es genügt zu bemerken, dass für die zerstreuende Abbildung eines echten Teiles des Raumes auf den ganzen Raum schon keine Erweiterung gibt [27]). Auch der Satz über Erweiterung des Definitionsbereiches auf die abgeschlossene Hülle gilt im allgemeinen nicht.

Die Erweiterungssätze gelten dagegen unter der Voraussetzung, dass die Transformation f einen beschränkten Gegenbereich hat. Wir haben nämlich den leicht beweisbaren.

Hilfssatz $\breve{15}$. *Ist A der Definitionsbereich einer Zerstreuung f, und ist ψ eine auf $\bar{A}$ (abgeschlossene Hülle von A) derart definierte Transformation, dass folgende Bedingungen erfüllt sind: (1) $\psi(a)$ ist gleich $f(a)$ für $a \varepsilon A$; (2) ist $p \varepsilon \bar{A} - A$, so gibt es eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ von Elementen der Menge A derart, dass $p = \lim\limits_{l\to\infty} a_l$ und dass $\psi(p)$ in dem oberen, abgeschlossenen Limes der Folge $\{f(a_l)\}_{1 \leq l < \infty}$ enthalten ist — dann ist ψ eine zerstreuende Transformation.*

(Es ist auch leicht zu sehen, dass für obige Funktion ψ die Beziehung $\breve{\mathfrak{G}}\{\psi\} = \breve{\mathfrak{G}}\{f\}$ gilt).

Aus Hfs. $\breve{15}$ folgt jetzt unmittelbar:

Satz $\breve{16}^b$. *Bildet eine zerstreuende Transformation f die Menge A auf eine beschränkte Menge B ab, so existiert eine auf $\bar{A}$ definierte und zerstreuende Transformation, die auf A mit f identisch ist* (und zwar ist: $\breve{\mathfrak{G}}\{\psi\} = \breve{\mathfrak{G}}\{f\}$).

Auch gilt der „beschränkte"

Hauptsatz $\breve{\text{I}}^b$. *Bildet eine zerstreuende Transformation f die Menge A auf eine beschränkte Menge B ab, so existiert eine auf dem ganzen Raume definierte zerstreuende Transformation φ, die auf A mit f identisch ist.*

[26]) Vgl. Fussnoten [2]) und [3]).

[27]) Z. B.: $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$, für $|x| < 1$.

Es genügt nämlich eine Folge konzentrischer Sphären zu betrachten und die erhaltenen Raumteile (ausser den Punkten von A) der Reihe nach genügend weit zu entfernen.

Kap. III. Einige Eigenschaften der Konzentrationsmengen.

23. Aus der Definition der Konzentrationspunkte folgt unmittelbar, dass es $\mathfrak{G}_f(A) \subset \mathfrak{G}_f(A')$ gilt, wenn nur $A' \subset A$ gilt (*S.* 6). Daraus folgt:

Kor. 6 a. *Ist* $A' \subset A$ *und* $\mathfrak{G}_f(A) \neq 0$, *so ist auch* $\mathfrak{G}_f(A') \neq 0$.

Es ist klar, dass die Umkehrung des obigen Satzes im allgemeinen falsch ist. Sie gilt jedoch unter bestimmten Voraussetzungen.

24. Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz 24. *Es sei* U *eine Klasse von abgeschlossenen und konvexen Mengen* Z, *deren Durchschnitt* $D = \prod_{Z \epsilon U} Z$ *(nicht-leer und) beschränkt ist. Ist* W *eine abgeschlossene und mit* D *punktfremde Menge, so existiert in der Klasse* U *eine* e n d l i c h e *Unterklasse* $\{Z_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ *derart, dass* $\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Z_i$ *(nicht-leer und)* b e s c h r ä n k t *ist und keinen gemeinsamen Punkt mit* D *enthält.*

B e w e i s. Es sei eine offene und beschränkte Menge H betrachtet, die den Durchschnitt D enthält und mit W punktfremd ist. Nach dem Lindelöfschen Satze gibt es eine solche abzählbare Unterklasse $Z_1, Z_2, \ldots$, dass die Beziehung $\prod_{i \leqslant i < \infty} Z \subset H$ noch gilt. Wir behaupten, dass es eine endliche Zahl m gibt, für welche die Beziehung $\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Z_i \subset H$ schon gilt; denn im gegenfall gibt es — wegen der Konvexität der Z_i und daher der Mengen $\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Z_i$ (für $m = 1, 2, \ldots$) — eine Folge von R a n d p u n k t e n q_m der Menge H welche die Beziehung $q_m \epsilon \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Z_i$ erfüllen. Ist q_0 ein Häufungspunkt der Menge $\{q_i\}_{1 \leqslant i < \infty}$, so ist q_0 auch ein Häufungspunkt für jede Menge Z_i (denn: $\{q_j\}_{i \leqslant j < \infty} \subset Z_i$); es gilt also — wegen der Abgeschlossenheit von Z_i —: $q_0 \epsilon \prod_{1 \leqslant i < \infty} Z_i$, was der Tatsache, dass q_0 ein Randpunkt der offenen Menge H ist und $\prod_{1 \leqslant i < \infty} Z_i \subset H$ — widerspricht.

25. Satz 25. *Es sei* f *eine zusammenziehende Transformation mit dem Definitionsbereiche* A. *Gilt* $A' \subset A$ *und ist* $\mathfrak{G}_f(A')$ *nicht-leer und* b e s c h r ä n k t, *so ist auch:* $\mathfrak{G}_f(A) \neq 0$.

B e w e i s. Man kann offenbar voraussetzen, dass A' ein echter Teil von A ist. Dann gilt: $\mathfrak{G}_f(A) = \mathfrak{G}_f(A') \cdot \mathfrak{G}_f(A - A') = \prod_{a \epsilon A'} \Gamma_f(a) \cdot \mathfrak{G}_f(A - A')$. Angenommen also, dass $\mathfrak{G}_f(A) = 0$, so genügen die Mengen: $W = \mathfrak{G}_f(A - A')$ und $Z(a) = \Gamma_f(a)$ (für $a \epsilon A'$) den Bedingungen des Hilfssatzes 24. Es gibt also eine endliche Menge $A'_0 = \{a'_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m'}$ von Elementen der Menge A' derart, dass die Konzentrationsmenge $\mathfrak{G}_f(A'_0)$ nicht-leer und beschränkt ist und die Beziehung $\mathfrak{G}_f(A'_0) \cdot \mathfrak{G}_f(A - A') = 0$ erfüllt. Nach dem Borelschen Überdeckungssatze gibt es also eine endliche Zahl m, für welche die Beziehungen:

$$\mathfrak{G}_f(A'_0) \cdot \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} \Gamma_f(a_i) = 0 \quad \text{und} \quad \{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m} = A_0 \subset A - A'$$

gelten. Das ist aber unmöglich, denn die (endliche, also beschränkte) Menge $A'_0 + A_0$ einen Konzentrationspunkt in bezug auf die zusammenziehende Transformation f haben muss. Die Voraussetzung $\mathfrak{G}_f(A) = 0$ ist also falsch und der Satz damit bewiesen.

26. Auch eine gewisse Umkehrung des Kor. 6 a bildet der folgende (zwar in keinem Zusammenhange mit den zusammenziehenden Transformationen stehende)

Satz 26. *Es sei in* $\Re^n$ *eine (beliebige) Transformation mit dem Definitionsbereiche* A *gegeben, wobei* A *mindestens* $n+2$ *Punkte enthält. Gilt für jede echte (nicht-leere) Teilmenge* A' $(A' \subset A)$ *die Beziehung:* $\mathfrak{G}_f(A') \neq 0$, *so gilt auch:* $\mathfrak{G}_f(A) \neq 0$.

Zum Beweise genügt es die Mengen A i $n+2$ nicht-leere und punktfremde Teilmengen $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ zu zerlegen, und dann den Helly-Radonschen Satz auf die Klasse der entsprechenden Konzentrationsmengen $\{\mathfrak{G}_f(A - A_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ anzuwenden.

27. Wird der Kor. 6a anders gefasst, nämlich: ist $A = A_1 + A_2$ und $\mathfrak{G}_f(A) \neq 0$, so ist $\mathfrak{G}_f(A_1) \neq 0 \neq \mathfrak{G}_f(A_2)$, dann wird die entsprechende Umkehrung (mit den Voraussetzungen, dass f eine Zusammenziehung ist und mindestens eine von der Mengen: $\mathfrak{G}_f(A_1)$ und $\mathfrak{G}_f(A_2)$ beschränkt ist) eine evidente Konsequenz des bewiesenen Satzes 25. Es wird jedoch jetzt gezeigt, dass auf der Geraden $(\Re^{(1)})$ die Voraussetzung der Beschränktheit der Konzentrationsmenge überflüssig ist.

Satz 27. *Es sei* a u f e i n e r G e r a d e n $(\Re^{(1)})$ *eine zusammenziehende Transformation* f *mit dem Definitionsbereiche* $A = A_1 + A_2$

gegeben. Gelten die Beziehungen: $\mathfrak{G}_f(A_1) \neq 0$ *und* $\mathfrak{G}_f(A_2) \neq 0$, *so gilt auch:* $\mathfrak{G}_f(A) \neq 0$.

Beweis. Ist eine der obigen Konzentrationsmengen beschränkt (d. h. bildet einen Punkt oder eine Strecke), so ist unsere Behauptung — wegen *S.* 25 — richtig. Nehmen wir also an, dass $\mathfrak{G}_f(A_1)$ und $\mathfrak{G}_f(A_2)$ zwei punktfremde Halbgerade sind. Dann gibt es zwei solche Punkte a_1 und a_2 (wobei $a_1 \epsilon A_1$ und $a_2 \epsilon A_2$), dass die entsprechenden Konzentrationsmengen $\Gamma_f(a_1)$ und $\Gamma_f(a_2)$ bzw. die Mengen $\mathfrak{G}_f(A_1)$ und $\mathfrak{G}_f(A_2)$ enthalten und miteinander punktfremd sind. Das widerspricht aber dem Hauptsatze II.

[Der Satz ist auch eine Folgerung des Satzes 29 (s. § 29)].

28. **Korollar 28.** *Es sei auf einer Geraden* ($\mathfrak{R}^{(1)}$) *eine zusammenziehende Transformation* f *mit dem Definitionsbereiche* A *gegeben. Gilt* $\mathfrak{G}_f(A) = 0$, *so gilt auch* $\mathfrak{G}_f(A - B) = 0$, *wenn nur* B *eine beschränkte Menge ist.*

In der Tat, es gilt: $\mathfrak{G}_f(A) = \mathfrak{G}_f(A \cdot B) \cdot \mathfrak{G}_f(A - B)$; dabei ist — wegen der Beschränktheit der Menge $A \cdot B$ und nach dem Hauptsatze II — $\mathfrak{G}_f(A \cdot B) \neq 0$. Angenommen, dass auch: $\mathfrak{G}_f(A - B) \neq 0$, ergibt sich — dem Satze 27 zufolge — dass es gilt $\mathfrak{G}_f(A) \neq 0$, was der Voraussetzung widerspricht.

29. Betrachten wir jetzt auf der Geraden eine Zusammenziehung ohne Konzentrationspunkte. Es sei also: $A = D\{f\}$ und $\mathfrak{G}_f(A) = 0$. Teilen wir alle Konzentrationsmengen $\Gamma_f(a)$ (für $a \epsilon A$) in zwei Klassen: der „linken" und der „rechten" Halbgeraden, und bezeichnen wir die entsprechenden Teile der Menge A mit $A_{(l)}$ und $A_{(r)}$.

Wir behaupten:

1) Mindestens eine der Mengen $\mathfrak{G}_f(A_{(l)})$ und $\mathfrak{G}_f(A_{(r)})$ ist leer; denn im Gegenfall bekommen wir — wegen *S.* 27 — einen Widerspruch mit der Voraussetzung). Es gibt also eine Folge von Halbgeraden $\{\Gamma_f(a_i)\}_{1 \leq i < \infty}$, die ineinander geschachtelt sind und deren Endpunkte s_i eine monotone, divergente Menge bilden, was mit $s_i \lesssim s_{i+1} \to \infty$ bezeichnet sei. Da $f(a_i) \epsilon \Gamma_f(a_i)$, so gibt es eine Teilfolge $\{a_{k_l}\}_{1 \leq l < \infty}$, die die Eigenschaft $f(a_{k_l}) \lesssim f(a_{k_{l+1}}) \to \infty$ auch besitzt. Aber aus der evidenten Beziehung: $a_{k_l} \lesssim s_{k_l} \lesssim s_{k_{l+1}}$ folgt: $a_{k_l} \lesssim a_{k_{l+1}}$, denn im Gegenfall ($a_{k_{l+1}} \lesssim a_{k_l} \lesssim s_{k_l} \lesssim s_{k_{l+1}}$) — wegen der Eigenschaft, dass f als Spiegelung der Punkte a_{k_l} in bezug auf s_{k_l} betrachtet werden kann — bekommen wir, dass f keine Zusammenziehung ist,

wider die Voraussetzung. Ferner, — wegen: $\lim_{l \to \infty} \varrho(f(a_{k_1}), f(a_{k_l})) = \infty$ — (da f zusammenziehend ist) gilt auch: $\lim_{l \to \infty} \varrho(a_{k_1}, a_{k_l}) = \infty$; es gilt also die Beziehung: $a_{k_l} \lesssim a_{k_{l+1}} \to \infty$.

(2) Aus dem Obigen ergibt sich aber, dass es keine Halbgerade $\Gamma_f(a)$ (für $a \epsilon A$) gibt, die zu den Halbgeraden $\Gamma_f(a_{k_l})$ der erwähnten Folge „entgegengerichtet" ist; denn — im Gegenfall — gibt es zwei punktfremde Konzentrationsmengen: $\Gamma_f(a)$ und $\Gamma_f(a_{k_N})$ (wobei N genügend grosse, natürliche Zahl ist), was mit der Voraussetzung über f im Widerspruch steht. Daraus folgt also, dass entweder $A_{(l)} = 0$ oder $A_{(r)} = 0$ gilt, d. h. dass alle Punkte des Definitionsbereiches A — infolge der Transformation — in derselben Richtung verschoben sind.

Es gilt also der

Satz 29. *Es sei auf einer Geraden* ($\mathfrak{R}^{(1)}$) *eine zusammenziehende Transformation* f *mit dem Definitionsbereiche* A *gegeben. Besitzt die Transformation keinen Konzentrationspunkt* (*d. h. gilt:* $\mathfrak{G}_f(A) = 0$), *dann gilt es:* (α) *alle Punkte der Menge* A *sind in derselben Richtung verschoben;* (β) *es gibt eine monotone, divergente Folge* $a_1 \lesssim a_2 \lesssim \ldots$ *von Elementen der Menge* A, *derart, dass die Menge der entsprechenden Punkte* $f(a_i)$ *auch eine monotone, divergente und zwar „gleichgerichtete" Folge* $f(a_1) \lesssim f(a_2) \lesssim \ldots$ *bildet, wobei auch die Beziehung* $a_i \lesssim f(a_i)$ *gilt. Insbesondere gibt es also eine Unterfolge, die die Beziehung* $a_1 \lesssim f(a_1) \lesssim a_2' \lesssim f(a_2) \lesssim \ldots$ *erfüllt.*

30. Die Konzentrationsmenge (einer beliebigen Transformation) ist abgeschlossen und konvex (§ 9, Satz 7). Es ist leicht zu beweisen den „umgekehrten"

Satz 30. *Ist (in* $\mathfrak{R}^{(n)}$) *eine abgeschlossene und konvexe Menge* W *gegeben, so gibt es eine Menge* A *und eine Transformation* f *derart, dass es gilt:* $A = D\{f\}$ *und* $\mathfrak{G}_f(A) = W$ (*und zwar* f *eine Zusammenziehung ist*).

Man betrachte nämlich 2 Fälle:

(1) W enthält einen inneren Punkt p. Dann genügt es durch jeden Randpunkt r der Menge W eine ($(n-1)$-dimensionale) Stützebene [38] $\sigma(r)$ zu legen,

[38]) Eine Hyperebene H heisst eine Stützebene für eine Menge M, wenn H die Eigenschaft hat, dass mindestens ein Punkt des Randes der Menge M zu H gehört, und dass die ganze Menge M auf einer Seite von H liegt. Vgl. H. Min-

Ist A die Menge sämtlicher Spiegelbilde $\bar{p}_{\sigma(r)}$ von p in bezug auf die Stützebenen $\sigma(r)$, und f die Transformation, die durch die Gleichung $f(\bar{p}_{\sigma(r)}) = p$ definiert ist, dann ist die Bedingung des Satzes offenbar erfüllt.

(2) Besitzt W höchstens k-dimensionale Kugeln („k-dimensionale innere Punkte"), so liegt W in einer k-dimensionalen Ebene $\mathfrak{R}^{(k)}$. Es sei p ein (in bezug auf $\mathfrak{R}^{(k)}$) innerer Punkt der Menge W und $\mathfrak{R}^{(n-k)}$ die durch p gelegte und zu $\mathfrak{R}^{(k)}$ senkrechte $(n-k)$-dimensionale Ebene. Dann definiert man: $A = A^{(k)} + \mathfrak{R}^{(n-k)}$, wobei $A^{(k)}$ die in $\mathfrak{R}^{(k)}$ enthaltene und nach der in (1) angeführten Methode gebildete Menge ist; $f(x) = p$ — für $x \in A^{(k)}$ und $f(x) = S_p(x)$ — für $x \in \mathfrak{R}^{(n-k)}$, wobei $S_p(x)$ das Spiegelbild von x in bezug auf p ist.

Kap. IV. Lipschitzsche Transformationen.

In diesem Kapitel werden die Begriffe der Zusammenziehung und der Konzentrationsmenge, wie auch die entsprechende Hauptsätze (§ 17, § 20) verallgemeinert.

31. Die zusammenziehende Transformation ist eine Verallgemeinerung der isometrischen; eine andere Verallgemeinerung der Isometrie bildet die „Ähnlichkeitstransformation" [29]), die durch die Gleichung $\varrho(f(x), f(y)) = \mu \cdot \varrho(x, y)$ charakterisiert wird (wobei μ eine positive Zahl ist). Ersetzt man in dieser Beziehung das Gleichheitszeichen durch das Zeichen „$\leqslant$" (oder „$\geqslant$"), so erhält man eine Transformation, die man als „Lipschitzsche" bezeichnen könnte [29]).

Definition $\mathfrak{L}$ 1. *Eine Transformation f mit dem Definitionsbereiche A heisst eine Lipschitzsche zusammenziehende Transformation mit dem Quotienten μ — oder kurz: eine (Lipschitzsche) μ-Zusammenziehung — wenn für beliebige Elemente x und y der Menge A die Beziehung*

$$\varrho(f(x), f(y)) \leqslant \mu \cdot \varrho(x, y) \tag{0}$$

gilt.

Ist $\mu_0\{f\}$ die untere Grenze der Menge sämtlicher Zahlen μ, die die Beziehung (0) für beliebige Elemente von A erfüllen, so *ist die Zahl $\frac{1}{\mu_0\{f\}}$ das Mass der Zusammenziehung für f.*

Für $\mu = 1$ ergibt sich also die gewöhnliche Zusammenziehung, für $\mu < 1$ — die „echte" Zusammenziehung.

kowski, *Gesammelte Abhandlungen*, II, S. 136, 139. — S. Straszewicz, *Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen*, Inaugural-Dissertation, Zürich, 1914, S. 3—4, 17—18.

[29]) A. Lindenbaum, Inaugural-Dissertation.

32. Definition $\mathfrak{L}$ 2.1. (*a*) *Ein Punkt p heisst ein λ-Konzentrationspunkt für a (wobei ist $a \in A$) in bezug auf die Transformation f, wenn die Beziehung*

$$\varrho(f(x), p) \leqslant \lambda \cdot \varrho(x, p) \tag{$*$}$$

gilt.

(*b*) *Die Menge aller λ-Konzentrationspunkte für a heisst die λ-Konzentrationsmenge für a (in bezug auf f) und wird mit $\Gamma_f^{(\lambda)}(a)$ bezeichnet.*

In $\mathfrak{R}^{(n)}$, ist $\Gamma_f^{(\lambda)}(a)$ im Falle $f(a) \neq a$: eine n-dimensionale Kugel — für $\lambda < 1$, ein Halbraum — für $\lambda = 1$, und die Komplementärmenge des Innern einer Kugeln — für $\lambda > 1$. Im Falle $f(a) = a$: eine leere Menge — für $\lambda < 1$ und der ganze Raum — für $\lambda \geqslant 1$.

Definition $\mathfrak{L}$ 2.2. (*a*) *Ein Punkt p heisst ein λ-Konzentrationspunkt für A ($A \subset D\{f\}$) in bezug auf die Transformation f, wenn p ein λ-Konzentrationspunkt für jedes Element der Menge A ist.*

(*b*) *Die Menge aller λ-Konzentrationspunkte für A heisst die λ-Konzentrationsmenge für A (in bezug auf f) und wird mit $\mathfrak{G}_f^{(\lambda)}(A)$ bezeichnet. Es ist also:*

$$\mathfrak{G}_f^{\lambda}(A) = \prod_{a \in A} \Gamma_f^{(\lambda)}(a).$$

(*c*) *Im Falle: $A = D\{f\}$, sprechen wir auch von den λ-Konzentrationspunkten (bzw. λ-Konzentrationsmengen) der Transformation f, und bezeichnen: $\mathfrak{G}^{\lambda}\{f\} = \mathfrak{G}_f^{(\lambda)}(D\{f\})$.*

Bezeichnet man (für einen Punkt p) mit $\lambda_0(p)$ die untere Grenze der Menge aller Zahlen λ, welche für jedes Element x des Definitionsbereiches $D\{f\}$ die Beziehung $(*)$ erfüllen (mit anderen Worten ist $\lambda_0(p)$ die untere Grenze aller Zahlen λ, für welche p ein λ-Konzentrationspunkt der Transformation f ist), so ist die Zahl $\frac{1}{\lambda_0(p)}$ das Mass der Konzentration der Transformation f im Punkte p.

Ist $\lambda_0\{f\}$ die untere Grenze sämtlicher Zahlen $\lambda_0(p)$ für alle Punkte p des Raumes, so *ist die Zahl $\frac{1}{\lambda_0\{f\}}$ das Mass der Konzentration von f.*

33. Wir lösen jetzt die zwei Hauptprobleme (vgl. Hauptsätze I und II) für Lipschitzsche Zusammenziehungen.

Hauptsatz $\mathfrak{L}$ I. *Ist (in $\mathfrak{R}^{(n)}$) eine μ-Zusammenziehung f mit dem Definitionsbereiche A gegeben, so existiert eine im ganzen Raume definierte μ-Zusammenziehung F, die auf A mit f identisch ist* [30]).

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt:

$$\varrho(f(x), f(y)) \leqslant \mu \cdot \varrho(x, y) \quad \text{für} \quad x, y \in A. \tag{0}$$

Es sei p ein beliebiger Punkt des Raumes. Betrachten wir eine Hilfstransformation φ, die auf der Menge $B = I_f(A)$ (also für jedes $f(x)$) folgendermassen definiert ist:

$$\varphi(f(x)) \text{ liegt auf der Halbgeraden } \overrightarrow{p, f(x)} \tag{1}$$

$$\varrho(\varphi(f(x)), p) = \frac{1}{\mu} \cdot \varrho(f(x), p). \tag{2}$$

Es ist also eine Ähnlichkeitstransformation der Menge B mit dem Quotienten $\frac{1}{\mu}$ und mit dem Ähnlichkeitszentrum in p.

Es gilt also für alle Elemente x und y der Menge A die Beziehung

$$\varrho(\varphi(f(x)), \varphi(f(y))) = \frac{1}{\mu} \cdot \varrho(f(x), f(y)). \tag{3}$$

Setzt man $\psi(x) = \varphi(f(x))$, so folgt aus (3) und (0), dass ψ eine (gewöhnliche) Zusammenziehung mit dem Definitionsbereiche A ist und sich also — wegen Haupts. I — auf den ganzen Raum erweitern lässt; es sei Ψ die erweiterte zusammenziehende Transformation.

Wir definieren jetzt folgendermassen eine Transformation Φ für jedes $\Psi(x)$:

$$\Phi(\Psi(x)) \text{ liegt auf der Halbgeraden } \overrightarrow{p, \Psi(x)} \tag{4}$$

$$\varrho(\Phi(\Psi(x)), p) = \mu \cdot \varrho(\Psi(x), p). \tag{5}$$

Φ ist also die Ähnlichkeitstransformation mit dem Quotienten μ und mit dem Ähnlichkeitszentrum in p. Es gilt dann die Beziehung:

$$\varrho(\Phi(\Psi(x)), \Phi(\Psi(y))) = \mu \cdot \varrho(\Psi(x), \Psi(y)) \tag{6}$$

und — wegen der Definition von Ψ — auch:

$$\varrho(F(x), F(y)) \leqslant \mu \cdot \varrho(x, y) \tag{7}$$

[30]) Für $n = 1$ folgt auch dieser Satz aus einem (unveröffentlichten) allgemeinen Satze von Hrn Aronszajn über die „Stetigkeitsmoduln“ (1929).

für beliebige Punkte x und y des Raumes, wobei $F(x) = \Phi(\Psi(x))$ angenommen wird. Die Transformation $F(x)$ ist also eine im ganzen Raume definierte μ-Zusammenziehung. Aus den Definitionen der Transformationen φ und Φ, und wegen der Identität von $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ für die Elemente x der Menge A — ergibt sich unmittelbar die Identität von $F(x)$ und $f(x)$ für $x \in A$. Der Satz ist also bewiesen.

34. Im obigen Beweise kann man — wegen S. I′ — voraussetzen, dass Ψ den ganzen Raum auf eine Untermenge der K-Hülle der Menge $I\{\psi\}$ abbildet. Daher kann man voraussetzen, — wegen des Charakters der Transformationen φ und Φ — dass F den ganzen Raum auf eine Untermenge der K-Hülle der Menge $I\{f\}$ abbildet. Es gilt also der verschärfte

Satz $\mathfrak{L}$ I′. *Ist (in $\mathfrak{R}^{(n)}$) eine μ-Zusammenziehung f gegeben, welche die Menge A auf eine Menge B abbildet, so existiert eine im ganzen Raume definierte μ-Zusammenziehung F, die auf A mit f identisch ist und den Raum auf die Untermenge der K-Hülle von B transformiert (d. h. es gilt die Beziehung: $I_F(\mathfrak{R}^{(n)}) \subset \mathfrak{K}(B)$).*

35. Daraus folgt unmittelbar

Hauptsatz $\mathfrak{L}$ II. *Jede μ-Zusammenziehung, die den Definitionsbereich A auf eine **beschränkte** Menge B abbildet, hat mindestens einen μ-Konzentrationspunkt (und zwar in $\mathfrak{K}(B)$).*

Denn einerseits gibt es in der Zelle $\mathfrak{K}(B)$ — nach dem „Fixpunktsatze“ — einen Punkt p, für welchen die Beziehung $F(p) = p$ gilt, und andererseits ist offenbar jeder Fixpunkt einer μ-Zusammenziehung ein μ-Konzentrationspunkt der Transformation. Der Punkt p ist also ein μ-Konzentrationspunkt der erweiterten, also auch der ursprünglichen Transformation.

Korollar 31. *Jede μ-Zusammenziehung, die auf einer beschränkten Menge definiert ist, hat mindestens einen μ-Konzentrationspunkt (und zwar in der K-Hülle des Gegenbereiches der Transformation).*

36. Wir zeigen jedoch, dass im Falle der „echten“ Zusammenziehung, also im Falle: $\mu < 1$, die Voraussetzung der Beschränktheit der Menge B im Haupts. $\mathfrak{L}$ II überflüssig ist [31]).

[31]) Vgl. „Bemerkung“, § 20.

Satz $\mathfrak{L}$ II^e. *Jede echte μ-Zusammenziehung (d. h. für $\mu < 1$) hat mindestens einen μ-Konzentrationspunkt (und zwar in $\mathfrak{K}(B)$).*

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}^n$ zugrunde gelegt. Bezeichnen wir: $A = D\{f\}$ und $B = I_f(A)$. Für $\mu < 1$ bestimmt $\Gamma_f^{(\mu)}(a)$ für $a \epsilon A$ eine n-dimensionale Kugel. Ich behaupte, dass es $\mathfrak{G}_f^{(\mu)}(A) \cdot \mathfrak{K}(B) \neq 0$ gilt. Denn im Gegenfall, gibt es — nach dem Helly-Radonschen Satze — in der Klasse der Mengen $Z(a) = \Gamma_f^{(\mu)}(a) \cdot \mathfrak{K}(B)$ (für $a \epsilon A$), ein Untersystem von $n+1$ Mengen $Z(a_1), \ldots, Z(a_{n+1})$, deren Durchschnitt leer ist. Das widerspricht aber dem Hauptsatze $\mathfrak{L}$ II, weil für die endliche (also beschränkte) Menge $A_0 = \underset{1 \leqslant l \leqslant n+1}{\{a_l\}}$ die Beziehungen

$$0 \neq \prod_{1 \leqslant l \leqslant n+1} \Gamma_f^{(\mu)}(a_l) \cdot \mathfrak{K}(I_f(A_0)) \subset \prod_{1 \leqslant l \leqslant n+1} \Gamma_f^{(\mu)}(a_l) \cdot \mathfrak{K}(B)$$

gelten.

37. Zum Schlusse wird das Problem der Verschärfung der Hauptsätze gelöst; es wird nämlich gezeigt, dass folgende Sätze gelten:

Satz 32. *Es sei μ eine beliebige positive Zahl und $\Lambda(\mu)$ die untere Grenze aller Zahlen λ, welche die Eigenschaft haben, dass jede μ-Zusammenziehung, die eine Menge A auf eine beschränkte Menge B abbildet, mindestens einen λ-Konzentrationspunkt hat. Dann ist $\Lambda(\mu) = \mu$.*

Satz 32^e. *Es sei $\mu < 1$ und $\Lambda^{(e)}(\mu)$ die untere Grenze der Zahlen λ, welche die Eigenschaft haben, dass jede μ-Zusammenziehung mindestens einen λ-Konzentrationspunkt hat. Dann ist $\Lambda^{(e)}(\mu) = \mu$.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass folgende Beziehungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{l}(v) \ldots \Lambda(\mu) \leqslant \mu \\ (w) \ldots \Lambda(\mu) \geqslant \mu\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{für} \\ \text{beliebige } \mu\end{array} \quad \Bigg\| \quad \left.\begin{array}{l}(v^{(e)}) \ldots \Lambda^{(e)}(\mu) \leqslant \mu \\ (w^{(e)}) \ldots \Lambda^{(e)}(\mu) \geqslant \mu\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{für} \\ \mu < 1.\end{array}$$

Die Beziehung (v) (bzw. $(v^{(e)})$) folgt unmittelbar aus dem Hauptsatze $\mathfrak{L}$ II (bzw. $\mathfrak{L}$ II^e).

Um die Beziehung (w) zu zeigen, konstruiren wir — für beliebiges μ und $\lambda < \mu$ — eine μ-Zusammenziehung f (mit beschränktem Gegenbereiche B), die keinen λ-Konzentrationspunkt hat. Daraus folgt aber gleichzeitig, dass die Beziehung $(w^{(e)})$ auch richtig ist. Man kann etwas mehr erlangen, indem man noch folgende Bedingungen postuliert:

(α_1) *Das Mass der Zusammenziehung der Transformation f sei genau gleich $\frac{1}{\mu}$* [32].

(α_2) *Das Mass der Konzentration der Transformation f sei genau gleich $\frac{1}{\mu}$* [33].

(α_3) *Die Transformation f sei in dem ganzen Raume definiert.*

Das erforderte Beispiel wird auf der Geraden gebildet. Die analogen Beispiele in mehrdimensionalen Räumen erhält man durch leichte Modifikationen.

Die Funktion f wird also folgendermassen definiert:

Im Falle $\mu \leqslant 1$:

$$\begin{array}{lrl}\text{für} & x \leqslant 0: & f(x) = 0 \\ \text{„} & 0 \leqslant x \leqslant 1: & f(x) = \mu \cdot x \\ \text{„} & x \geqslant 1: & f(x) = \mu.\end{array}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass alle geforderte Bedingungen erfüllt sind, und zwar: für $\mu < 1$ ist der Punkt $x_1 = 0$ der einzige Fixpunkt, und deshalb [34] der einzige Konzentrationspunkt; für $\mu = 1$ ist die Strecke $\overline{0,1}$ die Fixmenge und deshalb die Konzentrationsmenge. Es ist also: $\lambda_0\{f\} = \lambda_0(x_1) = \mu$.

Im Falle $\mu > 1$: bezeichnet man $q = \frac{2\mu}{\mu + 1}$, so wird f durch die folgenden Bedingungen definiert:

$$\begin{array}{lrl}\text{für} & x \leqslant 0 & : f(x) = 0 \\ \text{„} & 0 \leqslant x \leqslant 1 & : f(x) = \mu \cdot x \\ \text{„} & 1 \leqslant x \leqslant q & : f(x) = q + \mu(q - x) \\ \text{„} & x \geqslant q & : f(x) = q.\end{array}$$

Die oben definierte Transformation ist eine Lipschitzsche Zusammenziehung mit dem Masse $\frac{1}{\mu}$; sie hat genau 2 Fixpunkte: $x_1 = 0$ und $x_2 = q$, und es gilt: $\lambda_0(x_1) = \lambda_0(x_2) = \mu$, also auch:

$$\lambda_0\{f\} = \mu.$$

38. Man muss sich noch überzeugen, ob das Problem der Beziehung (w) nicht trivial ist, in dem Sinne, *ob es überhaupt Lipschitzsche Transformationen gibt, für welche die Ungleichung $\lambda_0\{f\} < \mu_0\{f\}$ gilt.*

[32]) Vgl. Ende § 31.
[33]) Vgl. Ende § 32.
[34]) Vgl. Kor. 18.

Wir definieren also — für beliebiges μ und $\lambda < \mu$ — eine Lipschitzsche Transformation f, die den folgenden Bedingungen genügt:

(β_1) *Das Mass der Zusammenziehung von f ist genau gleich $\frac{1}{\mu}$;*

(β_2) *Das Mass der Konzentration von f ist genau gleich $\frac{1}{\lambda}$;*

(β_3) *Die Transformation ist im ganzen Raume definiert.*

Die Beispiele sind ebenso auf der Geraden konstruiert.

Im Falle $\lambda \leqslant 1$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x \leqslant 0 & : f(x) = a \\ \;\;\text{„} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 & : f(x) = a + \mu \cdot x \\ \;\;\text{„} \quad x \geqslant 1 & : f(x) = a + \mu \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{wobei: } a = \dfrac{\mu \cdot (1-\lambda)}{\lambda} \geqslant 0 \\ \left(\text{d. h. } \lambda = \dfrac{\mu}{a+\mu}\right. \\ \left.\text{und: } a + \mu = \dfrac{\mu}{\lambda} > 1\right) \end{array}$$

Für $\lambda < 1$ ist $x_1 = a + \mu$ der einzige Konzentrationspunkt, und es gilt $\lambda_0\{f\} = \lambda_0(x_1) = \dfrac{\mu}{a+\mu} = \lambda$.

Für $\lambda = 1$ sind $x_1 = 0$ und $x_2 = a + \mu$ die zwei einzigen Konzentrationspunkte, und es gilt: $\lambda_0(x_1) = \mu$; $\lambda_0(x_2) = \lambda$.

Es gilt also: $\lambda_0\{f\} = \lambda$.

Im Falle $1 < \lambda < \mu$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } x \leqslant p & : f(x) = p \\ \;\;\text{„} \quad p \leqslant x \leqslant 0 & : f(x) = x \\ \;\;\text{„} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 & : f(x) = \mu \cdot x \\ \;\;\text{„} \quad 1 \leqslant x \leqslant q & : f(x) = q + \mu \cdot (q - x) \\ \;\;\text{„} \quad x \geqslant q & : f(x) = q \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{wobei: } p = -\dfrac{\mu - \lambda}{\lambda - 1} < 0 \\ q = \dfrac{2\mu}{\mu + 1} \\ \left(\text{d. h: } \lambda = \dfrac{\mu - p}{1 - p};\; q + \mu \cdot (q - 1) = \mu\right) \end{array}$$

Es gibt 2 Konzentrationspunkte: $x_1 = p$ und $x_2 = q$, wobei:

$$\lambda_0(x_1) = \lambda \quad \text{und} \quad \lambda_0(x_2) = \mu; \quad \text{also} \quad \lambda_0\{f\} = \lambda.$$

39. Die Hauptsätze $\breve{\mathrm{I}}^b$ und $\breve{\mathrm{II}}$ (§ 22) gestatten auch analoge „Lipschitzsche“ Verallgemeinerungen, nachdem man die Begriffe der μ-Zerstreuung und des λ-Dezentrationspunktes eingeführt hat.

Über die Grenzwerte des logarithmischen Potentials der Doppelbelegung.

Von

W. Nikliborc und W. Stożek (Lwów).

Einleitung.

Eine lange Reihe von Arbeiten, die dem Verhalten des Potentials der Doppelbelegung gewidmet wurde, erzielt die Aufstellung der entsprechenden Formeln und Sätze unter immer geringeren Voraussetzungen sowohl in bezug auf die Kurve, wie auch auf die Dichte. Da ein genauer Bericht über den Stand dieser Untersuchungen in dem Lichtenstein'schen Enzyklopädie — Artikel über Potentialtheorie vorliegt und spätere Arbeiten den hier behandelten Gegenstand nicht berühren, so können wir auf die Besprechung der diesbezüglichen Literatur verzichten.

In der vorliegenden Abhandlung handelt es sich um die möglichst weitgehende Verallgemeinerung der klassischen, das Verhalten des Potentials der Doppelbelegungen charakterisierenden Formeln

$$(A) \qquad \begin{aligned} W_+(0) &= W(0) + \pi \cdot f(0) \\ W_-(0) &= W(0) + \pi \cdot f(0). \end{aligned}$$

Die Verfasser gehen von folgenden Voraussetzungen aus: Über die Kurve wird meistenteils angenommen, daß sie eine stetige Normale besitzt, deren Richtungscosinuse im betrachteten Punkte der Hölder'schen Bedingung genügen. Die Dichte wird als meßbar und mit gewisser Potenz im Lebesgue'schen Sinne integrierbar vorausgesetzt. Genügen die Richtungscosinuse der Normalen der Lipschitz'schen Bedingung, so genügt es, die Dichte als meßbar und integrabel anzunehmen.