Sur les ensembles partout de deuxième catégorie.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans sa Note récente [1]) M. S. Ulam a démontré que s'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, tout ensemble linéaire de deuxième catégorie de Baire contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de deuxième catégorie de Baire.

Le but de cette Note est de déduire de ce théorème de M. Ulam le théorème que voici:

Théorème [2]). *S'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, tout ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle.*

Démonstration.

Lemme. *S'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, si M est un ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie dans tout intervalle et si D est un intervalle donné, il existe un ensemble Q de deuxième catégorie contenu dans DM et tel que $M - Q$ est encore un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle.*

Démonstration. Admettons qu'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, et soit M un ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie dans tout intervalle, et soit D un intervalle donné. D'après le théorème cité de M. Ulam, l'ensemble DM (en tant que de deuxième catégorie) contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de deuxième catégorie: soit Φ leurs famille.

[1]) *Fund. Math.* t. XX, p. 222.

[2]) Cf. le Problème 21 de M. Kuratowski: *Fund. Math.* t. IV, p. 368.

Soit E un ensemble de la famille Φ. En tant que de deuxième catégorie, l'ensemble E est, comme on sait, de deuxième catégorie en tout point d'un certain intervalle Δ (dépendant de E) aux extrémités rationnelles. L'ensemble de tous les intervalles aux extrémités rationnelles étant dénombrable et la famille Φ d'ensembles étant non dénombrable, il existe un intervalle aux extrémités rationnelles Δ_0, tel qu'il existe une infinité non dénombrable d'ensembles de la famille Φ, dont chacun et de deuxième catégorie en tout point de Δ_0: soient E_0 et E_1 deux d'entre eux.

Posons $Q = \Delta_0 E_0$: nous aurons évidemment $Q \subset D$ (puisque $E_0 \subset DM \subset D$): Q est donc un ensemble de deuxième catégorie $\subset D$ et on a

$$M - Q = (M - \Delta_0) + (M\Delta_0 - Q) =$$
$$= (M - \Delta_0) + \Delta_0(M - E_0) \supset (M - \Delta_0) + \Delta_0 E_1$$

(puisque $M - E_0 \supset E_1$, E_0 et E_1 étant deux sous-ensembles disjoints de M), d'où résulte (vu la propriété de l'ensemble M, et E_1 étant de deuxième catégorie en tout point de l'intervalle Δ_0) que l'ensemble $M - Q$ est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Notre lemme est ainsi démontré.

Admettons maintenant qu'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, et soit E un ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie dans tout intervalle. Soit

(1) $$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles.

Nous définirons par l'induction une suite infinie de sous-ensembles disjoints de l'ensemble E comme il suit.

D'après notre lemme il existe un ensemble Q_1 de deuxième catégorie contenu dans ΔE et tel que $E - Q_1$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Soit maintenant n un nombre naturel donné > 1, et supposons que nous avons déjà défini les ensembles $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$ et que $E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1})$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle (ce qui est vrai pour $n = 2$). D'après notre lemme (appliqué à l'ensemble $(M = E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1}))$ il existe un ensemble Q_n de deuxième catégorie contenu dans

$$[E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1})]\,\Delta_n$$

et tel que l'ensemble

$$[E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1})] - Q_n = E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n)$$

est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

La suite infinie d'ensembles $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ est ainsi définie par l'induction, et ce sont évidemment des ensembles disjoints, de deuxième catégorie, et $Q_n \subset \Delta_n E$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Soit n un nombre naturel donné. D'après le théorème de M. Ulam, Q_n contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints de deuxième catégorie, soit les ensembles Q_n^ξ, où ξ parcourt tous les nombres ordinaux $< \Omega$. On a donc

(2) $$Q_n^\xi \subset Q_n \subset \Delta_n E, \quad \text{pour} \quad \xi < \Omega, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et

(3) $$Q_n^\xi Q_n^\eta = 0 \quad \text{pour} \quad \xi < \eta < \Omega, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons, pour tout nombre ordinal $\xi < \Omega$:

(4) $$E^\xi = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\xi.$$

L'ensemble Q_n^ξ étant de deuxième catégorie et, d'après (2), contenu dans Δ_n, il résulte de (4) (la suite (1) étant formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles) que l'ensemble E^ξ est de deuxième catégorie dans tout intervalle (quel que soit le nombre ordinal $\xi < \Omega$).

De (4) et (2) résulte que $E^\xi \subset E$ pour $\xi < \Omega$. Or, les ensembles $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ étant disjoints, il résulte de (2) que $Q_m^\xi Q_n^\eta = 0$ pour $m \neq n$, $\xi < \Omega$, $\eta < \Omega$; moyennent (3), la formule (4) donne donc

$$E^\xi E^\eta = 0 \quad \text{pour} \quad \xi < \eta < \Omega.$$

Les ensembles E^ξ $(\xi < \Omega)$ sont donc disjoints, contenus dans E, et chacun d'eux est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Notre théorème est ainsi démontré.