Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen.

Von

Vojtěch Jarník (Praha).

§ 1. Resultate.

Die Arbeiten der Herren Banach, Mazurkiewicz, Saks und Steinhaus haben einen neuen Weg zur Untersuchung der Derivierten stetiger Funktionen eröffnet. Insbesondere haben die Herren Banach [1]) und Mazurkiewicz [2]) folgenden Satz bewiesen: Es sei C der Raum aller im Intervall $<0, 1>$ stetiger reeller Funktionen $x(t)$ (mit der üblichen Abstandsdefinition); dann gibt es in C eine Residualmenge [3]) C_1, so dass folgendes gilt: ist $x(t)$ eine Funktion aus C_1 und ist $0 \leqq t < 1$, so ist

$$\limsup_{h=+0} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| = \infty \quad {}^{4}).$$

Da C in sich von zweiter Kategorie ist, so ist C_1 nicht leer, also gibt es in $<0, 1>$ stetige Funktionen, welche für kein t $(0 \leqq t < 1)$ eine *endliche rechtsseitige* Ableitung besitzen. Auf die-

[1]) Über die Bairesche Klasse gewisser Funktionenmengen, *Studia Mathem.*, III (1931), S. 174—179.

[2]) Sur les fonctions non dérivables, *Studia Mathem.*, III (1931), S. 92—94.

[3]) Eine Menge $C_1 \subset C$ heisst eine Residualmenge in C, wenn $C - C_1$ von erster Kategorie in C ist. Alle im folgenden auftretenden Relativbegriffe, die sich auf Funktionenmengen beziehen, werden auf C als Raum bezogen. Das Wort „Funktion" bedeutet im folgenden stets eine Funktion aus C.

[4]) Herr Banach beweist dasselbe auch für den Fall, dass h nur durch eine beliebig vorgeschriebene Nullfolge $h_1, h_2, \ldots$ $(h_n > 0)$ gegen Null strebt; auf solche diskontinuierlichen Annäherungen gehen wir hier nicht ein.

selbe Weise kann man, wie Herr Saks bemerkt [5]), zeigen, dass auch diejenigen Funktionen, die in keinem Punkte t mit $0 < t < 1$ weder eine *endliche* noch *unendliche zweiseitige* Ableitung besitzen, eine Residualmenge in C bilden. Dagegen gilt der überraschende Satz [5]), dass die Funktionen, die für kein t $(0 \leqq t < 1)$ weder eine endliche noch unendliche *rechtsseitige* Ableitung besitzen, nur eine (nach Herrn Besicovitch nichtleere) Menge erster Kategorie bilden. In dieser Note möchte ich zu diesen Resultaten einige — allerdings ziemlich naheliegende — Ergänzungen hinzufügen; dabei benutze ich die Banachsche Methode.

Es gilt zunächst folgender

Satz I. *Es gibt in C eine Residualmenge A, so dass jede Funktion $x(t)$ aus A folgende Eigenschaften besitzt* [6]):

I 1) *Für jedes t aus* $(0, 1)$ *ist*

$$<x_-(t), x^-(t)> + <x_+(t), x^+(t)> = <-\infty, \infty> \ {}^{7}).$$

I 2) *Für fast alle t aus* $<0,1>$ *ist*

$$x^+(t) = \infty, \ x_+(t) = -\infty, \ x^-(t) = \infty, \ x_-(t) = -\infty.$$

I 3) *Für jedes t mit* $0 \leqq t < 1$ *ist* $Max\,(|x^+(t)|, |x_+(t)|) = \infty$ *und für jedes t mit* $0 < t \leqq 1$ *ist* $Max\,(|x^-(t)|, |x_-(t)|) = \infty$.

I 4) *Es gibt in* $<0, 1>$ *vier nichtleere perfekte Mengen* M^+, M_+, M^-, M_-, *so dass folgendes gilt: für jedes t aus M^+ ist* $x^+(t) = x_+(t) = \infty$, *für jedes t aus M_+ ist* $x^+(t) = x_+(t) = -\infty$, *für jedes t aus M^- ist* $x^-(t) = x_-(t) = \infty$, *für jedes t aus M_- ist* $x^-(t) = x_-(t) = -\infty$ [8]).

[5]) S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fundamenta Mathem.*, 19 (1932), S. 211—219.

[6]) Mit $x^+(t), x_+(t), x^-(t), x_-(t)$ bezeichnen wir der Reihe nach die obere, untere rechtsseitige und die obere, untere linksseitige Derivierte von $x(t)$. $<a, b>$ bezeichnet das abgeschlossene Intervall (für $a = b$ den Punkt a), (a, b) das offene Intervall mit den Endpunkten a, b. μM bedeutet das Lebesguesche Mass von M.

[7]) Das bedeutet also: ist $0 < t < 1, -\infty \leqq a \leqq \infty$, so gibt es eine Folge $h_1, h_2, \ldots$ mit

$$h_n \neq 0, \ \lim_{n=\infty} h_n = 0, \ \lim_{n=\infty} \frac{x(t+h_n)-x(t)}{h_n} = a.$$

[8]) I 3 und I 4 sind nicht neu; I 3 stammt von den Herren Banach und Mazurkiewicz (l. c. 1) 2)), I 4 rührt vom Herrn Saks her (l. c. 5)).

Man kann einen Teil dieser Resultate folgendermassen verallgemeinern:

Satz II. *Es sei* $\varphi(h)$ *für alle reellen* h *definiert,* $h\varphi(h)>0$ *für* $h\neq 0$, $\lim\limits_{h=0}\varphi(h)=0$.

Dann gibt es in C *eine Residualmenge* A_1, *so dass jede Funktion* $x(t)$ *aus* A_1 *folgende Eigenschaften besitzt:*

II 1) *Für jedes* t *aus* $(0,1)$ *ist*

$$\limsup_{h=0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\infty,\quad \liminf_{h=0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=-\infty.$$

II 2) *Für fast alle* t *aus* $<0,1>$ *ist*

$$\limsup_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\limsup_{h=-0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\infty,$$

$$\liminf_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\liminf_{h=-0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=-\infty.$$

II 3) *Für jedes* t *mit* $0\leqq t<1$ *ist*

$$\limsup_{h=+0}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}\right|=\infty$$

und für jedes t *mit* $0<t\leqq 1$ *ist*

$$\limsup_{h=-0}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}\right|=\infty.$$

Das ist also eine direkte Verallgemeinerung von I 2, I 3 und eines Teils von I 1 [9]). Ganz anders sieht es aber mit I 4 aus. Wenn $\limsup\limits_{h=+0}\varphi(h):h<\infty$ ist ($\varphi(h)>0$ für $h>0$), so lässt sich der „rechtsseitige" Teil des Saksschen Satzes I 4 sofort verallgemeinern; den z. B aus $\lim\limits_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=\infty$ folgt dann $\lim\limits_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}=\infty$. Wenn aber $\limsup\limits_{h=+0}\varphi(h):h=\infty$, so gilt im Gegenteil der

Satz III. *Ist* $\varphi(h)>0$ *für* $h>0$, $\lim\limits_{h=+0}\varphi(h)=0$, $\limsup\limits_{h=+0}\varphi(h):h=\infty$, *so gibt es in* C *eine Residualmenge* A_2, *so dass jede Funktion* $x(t)$ *aus* A_2 *folgende Eigenschaft besitzt: ist* $0\leqq t<1$, *so ist*

$$\limsup_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}\geqq 0,\quad \liminf_{h=+0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}\leqq 0.$$

Ich bemerke noch, dass man in diesem Satz z. B. in der ersten Ungleichung die Zahl 0 durch keine positive Zahl ersetzen darf. Denn es sei $x(t)$ eine Funktion aus AA_2 (AA_2 ist auch eine Residualmenge). Nach I 2 gibt es zwei Zahlen a, b mit

$$0\leqq a<b\leqq 1,\ x^+(a)=x^-(b)=\infty,\ x_+(a)=x_-(b)=-\infty.$$

Das Maximum von $x(t)$ in $<a,b>$ wird daher in einem Punkt c mit $a<c<b$ angenommen, und es ist bestimmt

$$\limsup_{h=+0}\frac{x(c+h)-x(c)}{\varphi(h)}\leqq 0\quad (also=0).$$

Wir werden nun die Sätze II, III und die Behauptung I 1 beweisen; wegen des Beweises von I 4 verweise ich auf die zitierte Abhandlung des Herrn Saks.

§ 2. Beweise

Wir führen zunächst folgende Bezeichnung ein: es sei $r>0$, $0<s<\frac{1}{2}$; dann setzen wir $N=\left[\frac{1}{2s}\right]$ (also N ganz, $N>0$) und bezeichnen mit $z_{r,s}(t)$ folgende für $0\leqq t\leqq 1$ definierte Funktion:

$$z_{r,s}(t)=0 \text{ für } t=2ls\ (l=0,1,2,\ldots,N)$$
$$z_{r,s}(t)=r \text{ für } t=(2l+1)s\ (l=0,1,2,\ldots,N-1);$$
$$z_{r,s}(t) \text{ ist linear für } ls\leqq t\leqq(l+1)s\ (l=0,1,2,\ldots,2N-1);$$
$$z_{r,s}(t)=0 \text{ für } 2Ns\leqq t\leqq 1.$$

Es sei $\varphi(h)$ definiert für alle reellen h,

$$\varphi(h)\cdot h>0 \text{ für } h\neq 0,\ \lim_{h=0}\varphi(h)=0$$

Es sei T die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0<t<1$, so dass

$$\limsup_{h=0}\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}<\infty$$

[9]) Wie es mit dem Rest von I 1 steht, weiss ich nicht. Ich bemerke noch, dass II 3 nicht neu ist; vgl. Auerbach und Banach, Über die Höldersche Bedingung, *Studia Mathem.* 3 (1931), S. 180—184.

ist. Es sei U die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t < 1$, so dass

$$\limsup_{h=+0} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \right| < \infty$$

ist. Es sei V die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Ist $E(x(t))$ die Menge derjenigen t mit $0 \leqq t < 1$, für welche

$$\limsup_{h=+0} \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} < \infty$$

ist, so ist *nicht* $\mu E(x(t)) = 0$. Es sei endlich W die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t < 1$, so dass

$$\limsup_{h=+0} \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} < 0$$

ist. Die Sätze II, III werden bewiesen sein, wenn wir beweisen: die Mengen T, U, V sind von erster Kategorie in C; und wenn

$$\limsup_{h=+0} \frac{\varphi(h)}{h} = \infty$$

ist, so ist auch W von erster Kategorie in C [10]).

Ad T. Für ganzes $n > 2$ sei T_n die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft besitzen: Es gibt mindestens ein t mit $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so dass für alle h mit $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$ die Ungleichung gilt

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \leqq n.$$

Offenbar ist T_n abgeschlossen, $T = \Sigma T_n$. Es genügt also zu zeigen: T_n ist nirgends dicht, oder (weil T_n abgeschlossen): jede offene Kugel K des Raumes C enthält (bei beliebig vorgegebenem n) ein $x(t)$, welches nicht zu T_n gehört.

[10]) Aus Symmetriegründen dürfen wir uns z. B. bei dem Beweis von II 2 auf die Betrachtung von $\limsup_{h=+0} \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)}$ beschränken; und analog in den übrigen Fällen.

Beweis. Es sei (hier und auch stets im folgenden) $\psi(k)$ = obere Grenze von $\varphi(h)$ für $0 < |h| \leqq k$, wenn $k > 0$. In K gibt es ein Polynom $w(t)$ und es gibt also ein $r > 0$, so dass jede Funktion $w(t) + z(t)$ mit

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq 1} |z(t)| \leqq r$$

in K liegt. Weiter gibt es ein $p > 0$, so dass

$$\left| \frac{w(t+h)-w(t)}{h} \right| < p$$

gilt für alle t, h mit $h \neq 0$, $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq t+h \leqq 1$. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2},\ 4s < \frac{1}{n},\ 2ps < \frac{r}{4},\ \frac{r}{4\psi(2s)} > n$$

(das geht wegen $\lim_{k=+0} \psi(k) = 0$);

dann konstruieren wir die Funktion $z_{r,s}(t)$. Es sei $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$; wenn $z_{r,s}(t) \leqq \frac{r}{2}$ ist, so wählen wir ein h so, dass $0 < h \leqq 2s$, $z_{r,s}(t+h) = r$; wenn aber $z_{r,s}(t) > \frac{r}{2}$ ist, so wählen wir ein h so, dass $0 > h \geqq -2s$, $z_{r,s}(t+h) = 0$. In beiden Fällen ist $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$ und

$$\frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{\varphi(h)} \geqq \frac{1}{|\varphi(h)|} \left(\frac{r}{2} - p|h| \right) >$$

$$> \frac{r}{4\psi(2s)} > n.$$

Also gehört $w(t) + z_{r,s}(t)$ zu K, nicht aber zu T_n, w. z. b. w.

Ad U. Für ganzes $n > 2$ sei U_n die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft besitzen: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so dass für alle h mit $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ die Ungleichung

$$\left| \frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \right| \leqq n$$

gilt. Offenbar ist U_n abgeschlossen, $U = \sum_{n=3}^{\infty} U_n$. Es genügt also zu zeigen: Jede Kugel K des Raumes C enthält ein $x(t)$, welches nicht zu U_n gehört.

Beweis. $w(t)$, r, p mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2},\ 4s < \frac{1}{n},\ 2ps < \frac{r}{4},\ \frac{r}{4\psi(2s)} > n;$$

dann gehört $w(t) + z_{r,s}(t)$ zwar zu K, nicht aber zu U_n. Denn, wenn $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$ ist, so gibt es sicher ein h mit $0 < h \leqq 2s$, $|z_{r,s}(t+h) - z_{r,s}(t)| \geqq \frac{r}{2}$. Dann ist aber $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ und

$$\left| \frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{\varphi(h)} \right| \geqq \frac{1}{\psi(2s)} \left(\frac{r}{2} - p h \right)$$

$$> \frac{r}{4\psi(2s)} > n, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ad V. Wenn $x(t)$ eine Funktion aus C ist, so sei $E(x(t))$ die Menge derjenigen t mit $0 \leqq t < 1$, für welche

$$\limsup_{h \to +0} \frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)} < \infty;$$

für ganzes $n > 2$ sei $E_n(x(t))$ die Menge derjenigen t mit $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, für welche gilt: für jedes h mit $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ ist

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)} \leqq n.$$

Offenbar ist $E(x(t)) = \sum_{n=3}^{\infty} E_n(x(t))$. Also: dann und nur dann ist $\mu E(x(t)) > 0$, wenn es ein ganzes $n > 2$ und ein ganzes $k > 0$ gibt, so dass $\mu E_n(x(t)) \geqq \frac{1}{k}$ ist. Es sei $V_{n,k}$ die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, für welche $\mu E_n(x(t)) \geqq \frac{1}{k}$ ist. Dann ist

$V = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_{n,k}$ und $V_{n,k}$ ist abgeschlossen [11]. Daher genügt es wieder zu zeigen: Jede Kugel K des Raumes C enthält ein $x(t)$, welches nicht zu $V_{n,k}$ gehört.

Beweis. $w(t)$, r, p mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2},\ 4s < \frac{1}{n},\ 2ps < \frac{r}{4k},\ \frac{r}{4k\psi(2s)} > n.$$

Wir konstruieren dann die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$. Ist $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$ und ist $z_{r,s}(t) < r\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$, so können wir ein h mit $0 < h \leqq 2s$, $z_{r,s}(t+h) = r$ wählen und dann ist $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ und

$$\frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{\varphi(h)} \geqq \frac{1}{\varphi(h)} \left(\frac{r}{2k} - p h \right)$$

$$> \frac{1}{\psi(2s)} \cdot \frac{r}{4k} > n;$$

also gehört t nicht zu $E_n(w(t) + z_{r,s}(t))$. Die Menge derjenigen t, für welche $z_{r,s}(t) \geqq r\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ ist, hat aber offenbar höchstens das Mass $\frac{1}{2k}$. Also ist $\mu E_n(w(t) + z_{r,s}(t)) \leqq \frac{1}{2k}$; die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$ gehört also zwar zu K, nicht aber zu $V_{n,k}$, w. z. b. w.

Ad W. Für ganzes $n > 2$ sei W_n die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so dass für jedes h mit $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ die Ungleichung

[11] Das zeigt man so: es sei $x_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ eine für $0 \leqq t \leqq 1$ gleichmässig konvergente Folge von Funktionen aus $V_{n,k}$; es sei $x(t) = \lim_{m=\infty} x_m(t)$. Wenn ein t für unendlich viele Werte von m zu $E_n(x_m(t))$ gehört, so gehört t offenbar auch zu $E_n(x(t))$. Also ist $E_n(x(t)) \supset \overline{\mathrm{Lim}}_m\, E_n(x_m(t))$, also ist $\mu E_n(x(t)) \geqq \limsup \mu E_n(x_m(t)) \geqq \frac{1}{k}$, also gehört auch $x(t)$ zu $V_{n,k}$, w. z. b. w.

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{\varphi(h)} \leqq -\frac{1}{n}$$

gilt. Offenbar ist W_n abgeschlossen, $W = \sum_{n=3}^{\infty} W_n$. Es genügt also zu zeigen: Ist

$$\limsup_{h=+0} \frac{\varphi(h)}{h} = \infty,$$

so enthält jede Kugel K des Raumes C ein $x(t)$, welches nicht zu W_n gehört.

Beweis. $w(t), r, p$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

$$0 < s < \frac{1}{2}, \; 4s < \frac{1}{n}, \; \frac{\varphi(2s)}{2s} > np.$$

Wir konstruieren dann die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$. Es sei $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$; wird $h = 2s$ gewählt, so ist $0 < h \leqq \frac{1}{n}$, $z_{r,s}(t) = z_{r,s}(t+h)$, also

$$\frac{w(t+h)+z_{r,s}(t+h)-w(t)-z_{r,s}(t)}{\varphi(h)} = \frac{w(t+2s)-w(t)}{2s} \cdot \frac{2s}{\varphi(2s)} > -\frac{1}{n}.$$

Die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$ gehört also zu K, nicht aber zu W_n, w. z. b. w.

Damit sind die Sätze II, III bewiesen. Wir sollen noch die Behauptung I 1 beweisen. Es sei also S die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: es gibt mindestens ein t mit $0 < t < 1$ und mindestens ein a mit $-\infty \leqq a \leqq \infty$, so dass es keine Folge $h_1, h_2, \ldots$ mit

$$h_n \neq 0, \; \lim_{n=\infty} h_n = 0, \; \lim_{n=\infty} \frac{x(t+h_n)-x(t)}{h_n} = a$$

gibt; und wir sollen zeigen: S ist von erster Kategorie in C. Es sei n ganz, $n > 2$, α rational, β rational, $\alpha < \beta$; dann bezeichnen wir mit $S_{n,\alpha,\beta}$ die Menge derjenigen $x(t)$ aus C, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens ein t mit $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$,

so dass für jedes h mit $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$ mindestens eine (also genau eine) von den beiden Ungleichungen

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \leqq \alpha, \quad \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \geqq \beta$$

gilt. Offenbar ist $S_{n,\alpha,\beta}$ abgeschlossen,

$$S = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\alpha \text{ rational}} \sum_{\substack{\beta \text{ rational} \\ \beta < \alpha}} S_{n,\alpha,\beta}.$$

Es genügt also zu zeigen: Jede Kugel K des Raumes C enthält (für gegebene n, α, β) mindestens ein $x(t)$, welches nicht zu $S_{n,\alpha,\beta}$ gehört.

Beweis. In K liegt ein Polynom $w(t)$; es gibt ein $r > 0$, so dass jede Funktion $w(t) + z(t)$ mit

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq 1} |z(t)| \leqq r$$

zu K gehört. Weiter sei

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq 1} |w'(t)| = q.$$

Wir wählen eine Zahl s, so dass folgendes gilt:

1.) $$0 < s < \frac{1}{2}, \; 4s < \frac{1}{n}, \; \frac{r}{4s} > q + \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|;$$

2.) für alle t, h mit $0 \leqq t \leqq 1$, $0 < |h| \leqq 2s$ ist

$$\left| \frac{w(t+h)-w(t)}{h} - w'(t) \right| < \frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Wir konstruieren die Funktion $z_{r,s}(t)$. Es sei $\frac{1}{n} \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$. Wenn h das Intervall $0 < h \leqq 2s$ durchläuft, so durchläuft $z_{r,s}(t+h) - z_{r,s}(t)$ genau das Intervall $\langle -z_{r,s}(t), r - z_{r,s}(t) \rangle$; also durchläuft

$$\frac{z_{r,s}(t+h)-z_{r,s}(t)}{h} \tag{1}$$

mindestens alle Zahlen des Intervalls

$$\left\langle -\frac{z_{r,s}(t)}{2s}, \frac{r - z_{r,s}(t)}{2s} \right\rangle.$$

Ebenso: wenn h das Intervall $0 > h \geqq -2s$ durchläuft, so durchläuft (1) mindestens alle Zahlen des Intervalls

$$\left\langle -\frac{r - z_{r,s}(t)}{2s}, \frac{z_{r,s}(t)}{2s} \right\rangle.$$

Beachten wir, dass $\mathrm{Max}\,(z_{r,s}(t),\ r - z_{r,s}(t)) \geqq \frac{r}{2}$ ist, so folgt: wenn h alle Werte mit $0 < |h| \leqq 2s$ durchläuft, so durchläuft (1) sicher alle Werte des Intervalls $\left\langle -\frac{r}{4s}, \frac{r}{4s} \right\rangle$, also umsomehr alle Werte des Intervalls

$$\left\langle -q - \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|, q + \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \right\rangle.$$

Es gibt also sicher ein h mit $0 < |h| \leqq 2s$ (also $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$), für welches

$$\frac{z_{r,s}(t+h) - z_{r,s}(t)}{h} = -w'(t) + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist. Für dieses h ist aber

$$\left| \frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{h} - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| < \frac{\beta-\alpha}{2},$$

also

$$\alpha < \frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{h} < \beta.$$

Die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$ liegt daher in K, nicht aber in $S_{n,\alpha,\beta}$, w. z. b. w.

Sur les ensembles de capacité nulle et les ensemles H.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1 Cette Note contient quelques théorèmes concernant trois familles d'ensembles fermés et bornés, qui se sont montrés utiles dans l'Analyse, notamment: les ensembles de capacité nulle [1], les ensembles (H) et les ensembles (H_σ) [2].

2 **Theoreme I** *Q étant parfait et borné, il existe dans Q un ensemble, résiduel de Q* (c. a. d. complementaire d'un ensemble de première catégorie sur Q), *dont tout sous ensemble borné et fermé est de capacité nulle.*

Demonstration. Soit λ un nombre superieur à 1 et au diamètre de Q, $\{z_m\}$ une suite de points de Q, dense sur Q, $S_{k,m}$ le cercle:

$$(1) \qquad |z - z_m| < 2^{-k2^m} \quad k, m = 1, 2 \dots.$$

$$(2) \qquad G_k = \sum^{\infty} S_{k,m}$$

$$(3) \qquad H = Q \times \prod_{m=1}^{\infty} G_k$$

H est l'ensemble cherché Evidemment c'est un résiduel de Q. Soit A un sous ensemble fermé de H. Désignons par $T(A)$ la capacité de A, par $T_n(A)$ le maximum pour $z \in A$ de la valeur absolue du n-ème polynome de Tschebyscheff attaché à A.

[1]) Capacité relative aux potentiel logaritmique = diamètre transfini = constante de Robin. Comp. Szegö: Math. Zeitschr 21 (1924) p. 203—208. Polya-Szegö: Journ. r. ang. Math. 165 (1931) p. 4—10, Brelot: Jahresbericht d. D. Math. Ver. 42 p. 119—124.

[2]) Rajchman: Fund. Math. 3 p. 489. N. Bary: Fund. Math. 9 p. 79.