Un exemple effectif d'un ensemble dénombrable de nombres réels qui n'est pas effectivement énumérable [1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Un ensemble E (formé d'éléments quelconques) est dit *dénombrable* s'il a la même puissance que l'ensemble de tous les nombres naturels; en d'autres mots, *s'il existe* une suite infinie formée de tous les éléments (différents) de l'ensemble E, le mot „exister" étant pris dans le sens idéaliste. L'ensemble E est dit *effectivement énumérable*, si nous savons définir effectivement une suite infinie formée de tous les éléments (différents) de E [2]).

Pour éviter tout malentendu signalons que nous regardons comme effectivement énumérable p. e. l'ensemble E défini comme il suit: E est l'ensemble de tous les nombres naturels, si le grand théorème de Fermat est vrai et E est l'ensemble de tous les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $(0, 1)$, si le grand théorème de Fermat est faux.

Voici comment on réfute l'objection que nous ne pouvons pas énumérer l'ensemble E, puisque nous ne savons pas, dans l'état actuel de la science, quel est l'ensemble dont il s'agit: l'ensemble de tous les nombres naturels ou bien l'ensemble de tous les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $(0, 1)$.

Nous savons définir effectivement une suite infinie $u_1, u_2, u_3, \ldots$ formée de tous les éléments de l'ensemble E. En effet, il suffit de poser pour n naturels

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Lwów) le 28 Avril 1933.

[2]) M. E. Borel qui a proposé d'introduire la notion d'ensemble *effectivement énumérable* appelle ainsi tout ensemble *donné sous la forme* $u_1, u_2, u_3, \ldots$, chaque élément u_n étant connu quand on donne son rang (et inversement) (*Rend. Accad. dei Lincei* 6^e série vol. 28, 1919, p. 164. Cf. aussi mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 42).

u_n comme égal à n, si le grand théorème de Fermat est vrai et comme égal au n-ième terme d'une suite infinie bien déterminée, formée de tous les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $(0, 1)$, si le grand théorème de Fermat est faux. Pour tout nombre naturel n le terme u_n est ainsi bien déterminé, quoique non calculable (dans l'état actuel de la science).

Le but de cette Note est de donner *un exemple effectif d'un ensemble dénombrable de nombres réels qui n'est pas effectivement énumérable.*

M. N. Lusin a défini effectivement un ensemble plan $\mathcal{E}$ qui est un complémentaire analytique et qui se développe en une série transfinie bien déterminée de constituantes

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_\omega \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots \quad (\alpha < \Omega)\ ^{1})$$

Désignons, pour $\alpha < \Omega$, par Q_α l'ensemble de tous les points communs à l'ensemble plan $\mathcal{E}_\alpha$ et à la courbe $y = x^2$.

Nous définirons maintenant l'ensemble de nombres réels D comme il suit.

S'il existe des nombres ordinaux α, tels que $\omega^\omega < \alpha < \Omega$ et que l'ensemble Q_α est dénombrable, soit α_0 le plus petit d'entre eux. Nous définirons D comme l'ensemble de toutes les abscisses des points de Q_{α_0}. S'il n'existe pas des nombres ordinaux α, tels que $\omega^\omega < \alpha < \Omega$ et que l'ensemble Q_α est dénombrable, nous désignerons par D l'ensemble de tous les nombres naturels.

L'ensemble D se trouve ainsi défini effectivement, et il est évident qu'il est *dénombrable*. Or, dans l'état actuel de la science nous ne savons pas définir aucune suite infinie formée de tous les éléments de D. Donc, *l'ensemble D n'est pas* (dans l'état actuel de la science) *effectivement énumérable.*

[1]) Fund. Math. t. XVII, p. 5.