où $k$ est entier) dont on peut former, par une translation convenable de chacun de ces ensembles, une infinité dénombrable de courbes congruentes avec la courbe $y=f(x)$. De la propriété de la fonction $f(x)$ il en résulte tout de suite la proposition suivante:

*Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe une fonction d'une variable réelle* $\varphi(x)$, *telle que la courbe* $y=\varphi(x)$ *peut être divisée en une infinité dénombrable de morceaux* (correspondant aux intervalles $k\leqslant x<k+1$, où $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), *dont on peut, en les déplacant convenablement* (par translations et rotations), *couvrir tout le plan.*

Varsovie, le 17 Avril 1933.

---

# Sur la decomposition du plan en courbes.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Le but de cette Note est de dèmontrer le théoréme suivant, qui contient la solution d'un probléme proposé par M. Sierpiński [1]).

**Théoréme.** *Le plan n'est pas la somme d'un nombre fini de courbes.*

Le nombre cardinal d'un ensemble $U$ sera désigné par $\overline{\overline{U}}$

Un ensemble $V$ est une *courbe* s'il existe une droite $D^*$ telle que pour toute droite $D$:

(1) $$(D \,||\, D^*) \rightarrow (\overline{\overline{D \times V}}=1)$$

Déterminons les entiers $n_k$, $k=1, 2\ldots$ par les conditions:

(2) $$n_1=2;\; n_{k+1}=n_k(n_k+1)$$

Soient $D_1, D_2 \ldots D_k$ — $k$ droites. Nous dirons que l'ensemble $U$ posséde la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_k)$ si à toute décomposition $U=\sum_{i=1}^{k} U_i$ on peut faire correspondre un entier positif $j \leqq k$ et une droite $D$ de manière que:

(3) $$D \,||\, D_j;\; \overline{\overline{D \times U_j}} \geqq 2$$

**Lemme.** $D_1, D_2 \ldots D_k$ étant $k$ droites il existe un ensemble $A$ possédant la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_k)$ et tel que $\overline{\overline{A}}=n_k$.

I. Si $k=1$. tout couple de points situé sur $D_1$ satisfait aux conditions.

II. Soit $k>1$ supposons que le lemme est vrai pour $k-1$. Soit $B$ un ensemble possédant la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_{k-1})$ et tel

[1]) Cf. ce volume, p. 39.

que $\overline{\overline{B}} = n_{k-1}$. Désignons par $p_i$, $i = 1, 2 \ldots n_{k-1}$ les points de $B$, par $\sigma$ le diamètre de $B$. Considérons un système de coordonnées cartesiennes dont l'axe des $x$ coincide avec $D_k$.

Soit $T(U)$ le transformé de l'ensemble $U$ par la translation:

(4) $$x' = x + \sigma + 1,\ y' = y$$

Posons:

(5) $$T_0(U) = U;\ T_{i+1}(U) = (T_i(U)) \quad i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

et soit:

(6) $$E_j = \sum_{i=0}^{n_{k-1}} T_i(p_j) \quad j = 1, 2 \ldots n_{k-1}$$

(7) $$A = \sum_{i=0}^{n_{k-1}} T_i(B) = \sum_{j=1}^{n_{k-1}} E_j$$

D'aprés (4) et la signification de $\sigma$, on a $F_{i_1}(B) \times F_{i_2}(B) = 0$ pour $i_1 \neq i_2$, donc

(8) $$\overline{\overline{A}} = n_{k-1}(n_{k-1} + 1) = n_k$$

Soit maitenant $A = \sum_{h=1}^{k} A_h$. Deux cas sont possibles.

**Premier cas.** Il existe un entier non-negatif $m \leqq n_{k-1}$ tel que $A_k \times T_m(B) = 0$. Alors:

(9) $$T_m(B) = \sum_{h=1}^{k-1} A_h \times T_m(B)$$

(10) $$B = \sum_{h=1}^{k-1} B \times T_m(A_h)$$

Comme $B$ possède la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_{k-1})$ il existe un entier positif $l \leqq k - 1$ et une droite $D$ satisfaisant aux conditions:

(11) $$D \,||\, D_l;\ \overline{\overline{D \times B \times T_{-m}(A_l)}} \geqq 2$$

Comme $D^* = T_m(D)$ est une droite $||\, D$ et $D \times B \times T_{-m}(A_l) \subset D \times T_{-m}(A_l)$, on aura:

(12) $$D^* \,||\, D_l;\ \overline{\overline{D^* \times D_l}} \geqq 2$$

**Deuxième cas.** On a $A_k \times T_i(B) \neq 0$ pour $i = 0, 1 \ldots n_{k-1}$. Donc $\overline{\overline{A_k}} \geqq n_{k-1} + 1$. D'après (7) il existe un entier positif $j_1 \leqq n_{k-1}$ tel que $\overline{\overline{A_k \times E_{j_1}}} \geqq 2$. Mais d'après (4), (6) $E_{j_1}$ est situé sur une droite $D^{**}$ parallèle à l'axe des $x$, c. à d. à $D_k$. Donc:



(13) $$D^{**} \,||\, D_k;\ \overline{\overline{D^{**} \times A_k}} \geqq 2$$

(12) et (13) montrent que $A$ posséde la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_k)$, et le lemme est démontré.

Evidement un ensemble qui contient un sous-ensemble possèdant la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_k)$, posséde à portiori cette propriété. On obtient donc le

**Corollaire.** Quel-que soient l'entier positif $k$ et le système de droites $D_1, D_2 \ldots D_k$ le plan posséde la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_k)$

**Démonstration du théorème.** Désignons le plan par $R_2$ et supposons que:

(14) $$R_2 = \sum_{j=1}^{k} H_j$$

$H_j$ étant une courbe. Il existe, d'aprés la definition d'une courbe une droite $D_j$, $j = 1, 2 \ldots k$ telle que:

(15) $$(D \,||\, D_j) \to (\overline{\overline{D \times H_j}} = 1) \quad j = 1, 2 \ldots k$$

D'autre part, d'aprés le Corollaire il existe un entier positi $j \leqq k$ et une droite $D^*$ satisfaisant ~~aux~~ conditions:

(16) $$D^* \,||\, D_{j_1};\ \overline{\overline{D^* \times H_j}} \geqq 2$$

(15) et (16) sont incompatibles. (14) entraîne donc une contradiction c. q. f d.

Warszawa, 1/5 1933.