Der Beweis dieser (übrigens auch auf direktem Wege leicht beweisbaren Behauptung) ergibt sich aus dem Hauptsatze, indem man folgenden Satz anwendet: *Eine in sich kompakte Teilmenge von R_{n+1} lässt sich dann und nur dann wesentlich in S_n abbilden, wenn sie R_{n+1} zerschneidet* [11].

Es ist zum Schluss zu bemerken, dass der Satz, nach welchen der Zusammenhang eine K-Eigenschaft ist [12], auch aus dem Hauptsatze folgt und zwar, wenn man $n=0$ setzt.

[11]) Vgl. K. Borsuk, *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. 106, S. 247, und die vorangehende Fussnote [9]).

[12]) Z. Janiszewski und K. Kuratowski, loc. cit.

Sur le recouvrement du plan par une infinité dénombrable de courbes congruentes.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Nicolas Lusin).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

...Dans votre lettre du 6 Mars 1933 vous m'avez posé le problème suivant:

Existe-t-il une fonction d'une variable réelle $f(x)$, telle que le plan soit une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble de tous les points de la courbe $y=f(x)$?

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, je prouverai que *la réponse y est affirmative.*

Du théoreme que j'ai démontré en 1919 [1]) résulte tout de suite que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, l'ensemble K de tous les points du carré ouvert $(0<x<1, 0<y<1)$ est une somme de deux ensembles $K=A+B$, où A est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et B est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses.

Soit A_1 l'ensemble obtenu de l'ensemble A par une rotation autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$ d'un angle $=-90^0$, et soit B_1 l'ensemble obtenu de B par une rotation autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$ d'un angle $=+90^0$. Soit H_1 l'ensemble de tous les points du plan $(x, 0)$, où $0 \leqslant x < 1$ et soit H_2 l'ensemble de tous les points du plan $(0, y)$ où $0 < y \leqslant 1$.

[1]) *Bull. Acad. Cracovie*, note du 24 février 1919; aussi: *Fund. Math.* t. V, p. 179; cf. aussi *Fund. Math.* t. XX, p. 165.

Posons:

$$M = A + B_1 + H_1 \quad \text{et} \quad N = B + A_1 + H_2,$$

Les ensembles M et N sont, comme on voit sans peine, superposables, notamment N s'obtient de M par une rotation autour du points $(^1/_2, {}^1/_2)$ d'un angle $= -90^0$.

On voit aussi sans peine que la somme $M + N$ contient tous les points du carré

$$Q\ (0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant y < 1).$$

Or, des propriétés des ensembles A et B (et des définitions des ensembles B_1 et H_1) résulte tout de suite que l'ensemble M est non vide et au plus dénombrable sur chaque droite $x = a$, où $0 \leqslant a < 1$. Il en résulte tout de suite que l'ensemble M est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$, dont chacum a un et un seul point sur chaque droite $x = a$, où $0 \leqslant a < 1$.

Définissons maintenant la fonction d'une variable réelle $f(x)$ comme il suit.

Soit x_0 un nombre réel donné. Le nombre $a = x_0 - \mathrm{E}\, x_0$ (où $\mathrm{E}\, x_0$ est l'entier le plus grand $\leqslant x_0$) satisfait évidemment aux inégalités $0 \leqslant a < 1$ et la droite $x = a$ rencontre chacun des ensembles M_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ en un et un seul point. Si $x_0 \geqslant 1$, posons $m = 2\, \mathrm{E}\, x_0$, si $x_0 < 1$, posons $m = -2\, \mathrm{E}\, x_0 + 1$: le nombre m sera toujours naturel. Nous définirons $f(x_0)$ comme l'ordonnée du point (unique) en lequel la droite $x = a$ rencontre l'ensemble M_m.

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour tout x réel. Je dis que le plan P est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, dont chacun est superposable avec l'ensemble E de tous les points de la courbe $y = f(x)$.

Désignons par $E_{k,l}$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $(x - k, y - l)$ est un point de l'ensemble E, et désignons par $H_{k,l}$ l'ensemble qui s'obtient de $E_{k,l}$ par une rotation de l'angle $= -90^0$ autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$. Les ensembles $E_{k,l}$ et $H_{k,l}$ sont évidemment tous superposables avec l'ensemble E, pour k et l entiers.

Nous prouverons que

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (E_{k,l} + H_{k,l}). \tag{1}$$

Soit, en effet, (x_0, y_0) un point donné du plan P. Posons $a = x_0 - E\, x_0$, $b = y_0 - E\, y_0$: ce seront des nombres $\geqslant 0$ et < 1 et (a, b) sera un point du carré $Q \subset M + N$. Le point (a, b) appartient donc a un au moins des ensembles M et N.

Si $(a, b) \epsilon M$, il existe, d'après $M = M_1 + M_2 + \ldots$, un indice n tel que $(a, b) \epsilon M_n$. Or, d'après la propriété de l'ensemble M_n, (a, b) est le point unique en lequel la droite $x = a$ rencontre l'ensemble M_n, et, d'après la définition de la fonction $f(x)$, on a pour $n = 2q$, $f(a + q) = b$, et, pour $n = 2q - 1$, $f(a - q + 1) = b$, d'où résulte, d'après la définition des ensembles E et $E_{k,l}$, que

$$\text{pour } n = 2q, \text{ on a } (x_0, y_0) \epsilon E_{E x_0 - q, E y_0}$$

et

$$\text{pour } n = 2q - 1, \text{ on a } (x_0, y_0) \epsilon E_{E x_0 + q - 1, E y_0}$$

donc, d'après (1), (x_0, y_0) est un point de la somme (1).

Si $(x_0, y_0) \epsilon N$, le point (ξ_0, η_0) qui s'obtient du point (x_0, y_0) par une rotation de l'angle 90^0 autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$ appartient à l'ensemble M et, comme nous avons démontré tout à l'heure, il existe un terme $E_{k,l}$ de la somme (1), tel que $(\xi_0, \eta_0) \epsilon E_{k,l}$, d'où résulte tout de suite (d'après la définition de l'ensemble $H_{k,l}$) que $(x_0, y_0) \epsilon H_{k,l}$.

Le point (x_0, y_0) appartient donc toujours à la somme (1).

Notre assertion est ainsi démontrée.

Il est à remarquer qu'en appliquant une décomposition de l'espace dont j'ai parlé dans ma communication imprimée dans les *Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* XXV (1932), p. 10—11, on pourrait démontrer sans peine que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe deux fonctions d'une variable reélle* $f_1(x)$ *et* $f_2(x)$, *telles que l'espace à* 3 *dimensions est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble des points de la courbe gauche définie par les équations* $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$.

Définissons maintenant à l'aide de notre fonction $f(x)$ une nouvelle fonction d'une variable réelle $\varphi(x)$ comme il suit. Posons $\varphi(x) = f(x)$ pour $x < 1$. Si $x \geqslant 1$, $\mathrm{E}\, x$ est un nombre naturel qu'on peut écrire (d'une façon unique) sous la forme $\mathrm{E}\, x = 2^{p-1}(2q - 1)$, où p et q sont des nombres naturels. Nous poserons

$$\varphi(x) = f((-1)^p q + x - \mathrm{E}\, x).$$

On voit sans peine que l'ensemble de tous les points de la courbe $y = \varphi(x)$ peut être décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints (correspondant aux intervalles $k \leqslant x < k + 1$, où k est entier) dont on peut former, par une translation convenable de chacun de ces ensembles, une infinité dénombrable de courbes congruentes avec la courbe $y = f(x)$. De la propriété de la fonction $f(x)$ il en résulte tout de suite la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction d'une variable réelle* $\varphi(x)$, *telle que la courbe* $y = \varphi(x)$ *peut être divisée en une infinité dénombrable de morceaux* (correspondant aux intervalles $k \leqslant x < k+1$, où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), *dont on peut, en les déplacant convenablement* (par translations et rotations), *couvrir tout le plan.*

Varsovie, le 17 Avril 1933.

Sur la decomposition du plan en courbes.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Le but de cette Note est de dèmontrer le théoréme suivant, qui contient la solution d'un probléme proposé par M. Sierpiński [1]).

Théoréme. *Le plan n'est pas la somme d'un nombre fini de courbes.*

Le nombre cardinal d'un ensemble U sera désigné par $\overline{\overline{U}}$

Un ensemble V est une *courbe* s'il existe une droite D^* telle que pour toute droite D:

$$(1) \qquad (D \,||\, D^*) \to (\overline{\overline{D \times V}} = 1)$$

Déterminons les entiers n_k, $k = 1, 2 \ldots$ par les conditions:

$$(2) \qquad n_1 = 2; \; n_{k+1} = n_k (n_k + 1)$$

Soient $D_1, D_2 \ldots D_k$ — k droites. Nous dirons que l'ensemble U posséde la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_k)$ si à toute décomposition $U = \sum_{i=1}^{k} U_i$ on peut faire correspondre un entier positif $j \leqq k$ et une droite D de manière que:

$$(3) \qquad D \,||\, D_j; \; \overline{\overline{D \times U_j}} \geqq 2$$

Lemme. $D_1, D_2 \ldots D_k$ étant k droites il existe un ensemble A possédant la propriété $\Gamma(D_1. D_2 \ldots D_k)$ et tel que $\overline{\overline{A}} = n_k$.

I. Si $k = 1$. tout couple de points situé sur D_1 satisfait aux conditions.

II. Soit $k > 1$ supposons que le lemme est vrai pour $k-1$. Soit B un ensemble possédant la propriété $\Gamma(D_1, D_2 \ldots D_{k-1})$ et tel

[1]) Cf. ce volume, p. 39.