On voit aussi sans peine que *si l'ensemble analytique E n'est pas mesurable B, la série* (15) *contient une infinité non dénombrable de termes Q^α qui sont des ensembles non dénombrables.*

Admettons, en effet, que ce n'est pas le cas: il existe alors un indice ν, tel que les ensembles Q^α sont au plus dénombrables pour $\alpha \geqslant \nu$: soit N leurs somme. On voit sans peine (en raisonnant comme plus haut) que l'ensemble (non dénombrable) N est de 1re catégorie sur tout ensemble parfait. Or, N est évidemment un ensemble analytique (en tant qu'une différence $E - \sum_{\xi<\nu} Q^\alpha$ entre un ensemble analytique et un ensemble mesurable B) et, comme non dénombrable, contient un sous-ensemble parfait, ce qui implique une contradiction.

Nous avons ainsi une nouvelle démonstration de la propriété de M. Sélivanowski concernant la puissance des constituantes analytiques, basée sur une idée différente.

Ein Satz über Unikohärenz

von

Karol Borsuk (Warszawa).

Eine topologische Eigenschaft E möge K-Eigenschaft heissen wenn folgendes gilt: ist sowohl die Vereinigungs- als die Durchschnittsmenge irgend zweier relativ zueinander abgeschlossener Punktmengen von der Eigenschaft E, so ist auch jede der beiden letzten Punktmengen von der Eigenschaft E. Es folgt unmittelbar aus dieser Definition, dass insbesondere das logische Produkt von beliebig vielen K-Eigenschaften wieder eine K-Eigenschaft ist.

Die Eigenschaften: Kontinuum, Streckenbild [1]), absoluter Retrakt, haben sich als lauter K-Eigeschaften erwiesen [2]). Es entsteht die Frage (um sich wenigstens auf topologisch wichtige Begriffe zu beschränken), ob auch *unikohärentes* [3]) *Streckenbild eine K-Eigenschaft ist* [4]).

Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist nun, einen einfachen Satz zu beweisen, aus welchem sich insbesondere eine *positive* Antwort auf diese Frage ergibt (s. Korollar 1).

[1]) Unter „Streckenbild" wird hier *stetiges* Bild der Strecke $0 \leqslant t \leqslant 1$ verstanden.

[2]) Z. Janiszewski und K. Kuratowski, *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, S. 211, Th. I; S. Nikodym, *Sur quelques propriétés des ensembles partout localement connexes*, Fund. Math. XII, S. 240, Th. I; N. Aronszajn und K. Borsuk, *Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus*, Fund. Math. XVIII, S. 194, 2.

[3]) Ein zusammenhängender Raum Z heisst *unikohärent* („henkellos" im Sinne von L. Vietoris), wenn die Durchschnittsmenge je zweier zusammenhängender in Z abgeschlossener Mengen, deren Vereinigungsmenge Z ist, zusammenhängend ist.

[4]) Dieses Problem wurde mir von Herrn B. Knaster mitgeteilt.

Mit S_n wird die euklidische n-dimensionale Sphäre, d. h. die Oberfläche einer Vollkugel des euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raumes R_{n+1} bezeichnet. Ist M ein metrischer Raum, so soll S_n^M den Raum bezeichnen, der als Elemente alle stetige Abbildungen von M *in* [5] S_n hat und durch die Formel

$$\varrho\,(f_1, f_2) = \sup_{x \varepsilon M} \varrho\,[f_1(x), f_2(x)]$$

metrisiert ist. Eine Abbildung $f \varepsilon S_n^M$ soll *wesentlich* [6] heissen, wenn die f enthaltende Komponente von S_n^M keine Abbildung f_0 von der Gestalt $f_0(x) = const.$ enthält. Es folgt aus dieser Definition, dass durch jede unwesentliche Abbildung von M in S_n eine beliebige Teilmenge von M auch unwesentlich in S_n abgebildet wird. Ist T eine Teilmenge von M und $\varphi \varepsilon S_n^T$, so heisst eine Funktion f *Erweiterung von φ auf M relativ zu S_n*, wenn $f \varepsilon S_n^M$ und $f(x) = \varphi(x)$ für jedes $x \varepsilon T$ ist. Ist insbesondere T in M abgeschlossen, so ist die aus allen einer Erweiterung auf M rel. zu S_n fähigen Funktionen $\varphi \varepsilon S_n^T$ bestehende Menge eine offene und zugleich abgeschlossene Teilmenge von S_n^T [7]). Daraus, und da eine konstante Funktion $\varphi_0 \varepsilon S_n^T$ offenbar erweiterungsfähig auf M rel. zu S_n ist, ergibt sich folgender

Hilfssatz. *Ist T eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes M, so lässt sich jede unwesentliche Abbildung $\varphi \varepsilon S_n^T$ auf M rel. zu S_n erweitern.*

Wir wenden diesen Hilfssatz an, um folgenden Satz zu beweisen:

Hauptsatz. *Die Nichtexistenz einer wesentlichen Abbildung eines metrischen Raumes in die n-dimensionale Sphäre S_n ist eine K-Eigenschaft.*

Beweis. Es seien A und B zwei relativ zueinander abgeschlossene metrische Mengen, derart dass jede Abbildung $f \varepsilon S_n^{A+B}$, sowie jede Abbildung $\varphi \varepsilon S_n^{A \cdot B}$, eine unwesentliche ist. Wir haben zu zeigen, dass dann jede Abbildung $f_1 \varepsilon S_n^A$ und jede Abbildung $f'_1 \varepsilon S_n^B$ unwesentliche Abbildungen sind. Aus Symmetriegründen genügt es, das erste zu beweisen.

Setzen wir $\varphi(x) = f_1(x)$ für jedes $x \varepsilon A \cdot B$, so gibt es dem Hilfssatze nach, da $\varphi \varepsilon S_n^{A \cdot B}$ und somit φ unwesentlich ist, eine Erweiterung f_2 von φ auf B rel. zu S_n. Es folgt daraus, da A und B in $A+B$ abgeschlossen sind, dass die folgendermassen definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \textit{für jedes } x \varepsilon A \\ f_2(x) & \textit{für jedes } x \varepsilon B \end{cases}$$

die Menge $A+B$ in S_n stetig abbildet. Nach der Voraussetzung ist aber eine solche Abbildung unwesentlich und somit bildet auch die mit f in A identische Funktion f_1 die Menge A in S_n unwesentlich ab, w. z. b. w.

Korollar 1. *Unikohärentes Streckenbild ist eine K-Eigenschaft.*

Da nämlich Streckenbild eine K-Eigenschaft ist [8]) und da Unikohärenz eines Streckenbildes mit der Nichtexistenz von dessen wesentlichen Abbildungen in die Kreislinie S_1 gleichbedeutend ist [9]), so ist dieses Korollar in dem Hauptsatze für $n=1$ enthalten.

Korollar 2. *Kompakter Raum mit verschwindender erster Bettischer Zahl ist eine K-Eigenschaft.*

Da auch Kompaktheit offenbar eine K-Eigenschaft und das Verschwinden der ersten Bettischen Zahl mit der Nichtexistenz von wesentlichen Abbildungen des gegebenen Raumes in S_1 äquivalent ist [10]), so ist auch dieses Korollar in dem Hauptsatze für $n=1$ enthalten.

Korollar 3. *Kompakte den Raum R_{n+1} nicht zerschneidende Teilmenge von R_{n+1} ist eine K-Eigenschaft.*

[5]) Eine Funktion f bildet M *in* S_n ab, falls $f(M) \subset S_n$ ist.

[6]) Vgl. H. Hopf, *Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen*, Moskauer Mathematische Sammlung, S. 53, Def. I.

[7]) K. Borsuk, *Sur un espace des transformations continues et ses applications topologiques*, Monatsh. Math. u. Phys XXXVIII, S. 382, **4**, und *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. XIX, S. 229, **12**.

[8]) S. Nikodym, loc. cit.

[9]) Die Unikohärenz eines Streckenbildes L ist mit dem Zusammenhange des Raumes S_1^L äquivalent (s. K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XVII, S. 195, **38**), Die letzte Eigenschaft ist mit der Nichtexistenz von wesentlichen Abbildungen von L in S_1 äquivalent (s. z. B. K. Borsuk und S. Ulam, *Über gewisse Invarianten der ε-Abbildungen*, Math. Ann. 108, S. 316).

[10]) Vgl. K. Borsuk, *Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. XX, S. 224 und E. Čech, *Sur les continus péaniens unicohérents*, Fund. Math. XX, S. 232.

Der Beweis dieser (übrigens auch auf direktem Wege leicht beweisbaren Behauptung) ergibt sich aus dem Hauptsatze, indem man folgenden Satz anwendet: *Eine in sich kompakte Teilmenge von* R_{n+1} *lässt sich dann und nur dann wesentlich in* S_n *abbilden, wenn sie* R_{n+1} *zerschneidet* [11].

Es ist zum Schluss zu bemerken, dass der Satz, nach welchen der Zusammenhang eine K-Eigenschaft ist [12], auch aus dem Hauptsatze folgt und zwar, wenn man $n=0$ setzt.

[11]) Vgl. K. Borsuk, *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. 106, S. 247, und die vorangehende Fussnote [9]).

[12]) Z. Janiszewski und K. Kuratowski, loc. cit.

Sur le recouvrement du plan par une infinité dénombrable de courbes congruentes.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Nicolas Lusin).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

...Dans votre lettre du 6 Mars 1933 vous m'avez posé le problème suivant:

Existe-t-il une fonction d'une variable réelle $f(x)$, *telle que le plan soit une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble de tous les points de la courbe* $y=f(x)$?

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, je prouverai que *la réponse y est affirmative.*

Du théoreme que j'ai démontré en 1919 [1]) résulte tout de suite que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, l'ensemble K de tous les points du carré ouvert $(0<x<1, 0<y<1)$ est une somme de deux ensembles $K=A+B$, où A est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et B est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses.

Soit A_1 l'ensemble obtenu de l'ensemble A par une rotation autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$ d'un angle $=-90^0$, et soit B_1 l'ensemble obtenu de B par une rotation autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$ d'un angle $=+90^0$. Soit H_1 l'ensemble de tous les points du plan $(x, 0)$, où $0\leqslant x<1$ et soit H_2 l'ensemble de tous les points du plan $(0, y)$ où $0<y\leqslant 1$.

[1]) *Bull. Acad. Cracovie*, note du 24 février 1919; aussi: *Fund. Math.* t. V, p. 179; cf. aussi *Fund. Math.* t. XX, p. 165.