la proposition de n° 4, l'ensemble E^* a sûrement une constituante de *mesure positive*. Or, la propriété „avoir la puissance du continu" est évidemment invariante par rapport à la transformation indiquée φ. Par conséquent, la constituante correspondante E_α de l'ensemble E à la puissance du continu. Donc l'existence d'une constituante non dénombrable est démontrée.

Or, l'ensemble $E' = E - \sum\limits_{\beta<\alpha} E_\beta$ est évidemment un ensemble analytique non mesurable B. D'ailleurs, il est clair que cet ensemble peut être considéré comme un ensemble analytique défini par un crible C' formé de la manière suivante: pour avoir le crible C', il suffit de supprimer de chacun des éléments du crible C définissant l'ensemble analytique donné E tous les points dont les projections appartiennent à l'ensemble $\sum\limits_{\beta<\alpha} E_\beta$.

On voit bien que l'ensemble E' est décomposé en constituantes déterminées par le crible C' de manière qu'on ait l'égalité

$$E' = E_{\alpha+1} + E_{\alpha+2} + \ldots /\Omega.$$

Dans ces conditions le même raisonnement que nous avons fait précédemment nous montre qu'une des constituantes E_γ de l'ensemble E' est aussi non dénombrable.

Ceci démontre l'existence au moins de deux constituantes non dénombrables de l'ensemble E, et *ainsi de suite*.

Si l'on opère de la même manière *transfiniment*, on arrive évidemment à la démonstration complète du théorème énoncé.

C. Q. F. D.

Sur les constituantes des ensembles analytiques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans la Note précédente M. E. Sélivanowski a démontré quelques propriétés intéressantes des constituantes des ensembles analytiques en partant de leurs définition à l'aide du crible de M. Lusin et en utilisant les cribles dérivés. Le but de cette Note est de prouver les propriétés de M. Sélivanowski pour les constituantes des ensembles analytiques définies en partant des systèmes déterminants, à l'aide des formules que j'ai donné dans le vol. VIII de ce journal [1]), et d'en tirer quelques conséquences intéressantes. Nous verrons que la démonstration, tout en conservant l'idée de M. Sélivanowski, est ici beaucoup plus simple et courte [2]).

Tout d'abord rappelons les notations.

Soit E un ensemble analytique linéaire donné, noyau du système déterminant $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé d'intervalles. Posons, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\delta^0_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{1}$$

$$\delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n} \tag{2}$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, et

$$\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \prod_{\xi<\alpha} \delta^\xi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{3}$$

pour tout nombre ordinal α de seconde espèce.

1) *Fund. Math.*, t. VIII, p. 363.

2) La connaissance de la Note de M. Sélivanowski n'est pas nécessaire pour comprendre cette Note.

De (2) et (3) résulte par l'induction transfinie que

(4) $$\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset \delta^{\beta}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant \beta.$$

Posons ensuite

(5) $$S^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{n}$$

et

(6) $$T^{\alpha} = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} (\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k})$$

la sommation (6) s'étendant à tous les systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Dans la Note citée j'ai démontré les formules

(7) $$E = \sum_{\alpha < \Omega} (S^{\alpha} - T^{\alpha})$$

et

(8) $$E = \prod_{\alpha < \Omega} S^{\alpha}.$$

La propriété de M. Sélivanowski concernant la mesure des constituantes peut être ici exprimée comme il suit:

La mesure de l'ensemble analytique (7) *est égale à celle d'un des termes de la série* (7).

Voici la démonstration.

Les ensembles $\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont tous mesurables B (pour $\alpha < \Omega$) et, d'après (4), on a pour tout système fini donné d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\text{mes}\, \delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \leqslant \text{mes}\, \delta^{\beta}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \text{ pour } \alpha \geqslant \beta,$$

d'où résulte qu'il existe un nombre ordinal $\lambda = \lambda(n_1, n_2, \ldots, n_k) < \Omega$, dépendant du système $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tel que

$$\text{mes}\, \delta^{\xi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \text{mes}\, \delta^{\lambda}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \text{ pour } \xi \geqslant \lambda.$$

L'ensemble des systèmes finis d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant dénombrable, il en résulte tout de suite qu'il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ ne dépendant pas du système $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et tel que

$$\text{mes}\, \delta^{\xi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \text{mes}\, \delta^{\mu}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \text{ pour } \xi \geqslant \mu$$

quel que soit le système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Cela donne (pour $\xi = \mu + 1$), d'après (4):

$$\text{mes}\, (\delta^{\mu}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\mu+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = 0$$

quel que soit le système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$, el il en résulte tout de suite, d'après (6), la formule:

(9) $$\text{mes}\, T^{\mu} = 0.$$

Or, de (8) résulte que $E \subset S^{\mu}$, ce qui donne: $\text{mes}_e E \leqslant \text{mes}\, S^{\mu}$ et d'après (9), aussi

(10) $$\text{mes}_e E \leqslant \text{mes}\, (S^{\mu} - T^{\mu})$$

D'autre part, de (7) résulte que $E \supset S^{\mu} - T^{\mu}$, ce qui donne

(11) $$\text{mes}_i E \geqslant \text{mes}\, (S^{\mu} - T^{\mu})$$

Or, on a

(12) $$\text{mes}_e E \geqslant \text{mes}_i E,$$

Les formules (10), (11) et (12) donnent

$$\text{mes}_e E = \text{mes}_i E = \text{mes}\, (S^{\mu} - T^{\mu}).$$

Notre assertion est ainsi démontrée et en même temps nous avons démontré que *tout ensemble analytique* (*linéaire*) *est mesurable* L.[1])

Pour la catégorie le raisonnement est tout à fait analogue.

On s'appuit sur la proposition que toute famille d'ensembles linéaires disjoints qui sont de deuxième catégorie et qui possèdent la propriété de Baire est au plus dénombrable[2]), et on en conclut, d'après (4), qu'il existe pour tout système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ un nombre ordinal $\lambda = \lambda(n_1, n_2, \ldots, n_k) < \Omega$, tel que, pour $\xi \geqslant \lambda$, l'ensemble

$$\delta^{\lambda}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\xi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

est de première catégorie. Comme plus haut, on en conclut qu'il

[1]) La mesurabilité L des ensembles analytiques a été énoncée par M. N. Lusin dans sa Note du 8 janvier 1917 des *C. R.* t. 164 et démontrée pour la première fois dans la Note de N. Lusin et W. Sierpiński du *Bull. Acad. Cracovie 1918*, p. 44. Cf. aussi *Fund. Math.* t. X, p. 26 et *C. R. de le Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie* XXII (1929), p. 155.

[2]) ce qui résulte tout de suite p. e. du fait que tout ensemble possédant la propriété de Baire est de la forme $(G - K_1) + K_2$ où G est ouvert et K_1 et K_2 sont des ensembles de 1^{re} catégorie.

existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ indépendant du système $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tel que l'ensemble

$$\delta^{\mu}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\mu+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

est de première catégorie, quel que soit le système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$, et il en résulte tout de suite d'après (6) que l'ensemble T^μ est de 1^re^ catégorie.

De $S^\mu - T^\mu \subset E \subset S^\mu$ résulte tout de suite que

$$E - (S^\mu - T^\mu) \subset T^\mu:$$

l'ensemble $E - (S^\mu - T^\mu)$ est donc de 1^re^ catégorie.

On a ainsi la proposition suivante qui exprime la propriéte de M. Sélivanowski concernant la catégorie des constituantes des ensembles analytiques:

Il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ tel que l'ensemble $E - (S^\mu - T^\mu)$ est de 1^re^ catégorie de Baire.

Cette proposition peut être sans peine relativisée pour un ensemble linéaire parfait P donné quelconque.

Les ensembles mesurables B possédant la propriété de Baire, on conclut, comme plus haut, que:

Pour tout ensemble linéaire parfait P il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ (dépendant de P), tel que l'ensemble $E - (S^\mu - T^\mu)$ est de 1^re^ catégorie relativement à P.

Les ensembles S^μ et T^μ possédant la propriété de Baire (en tant que mesurables B), il en résulte tout de suite, d'après (7), que l'ensemble E possède la propriété de Baire.

Nous avons ainsi démontré que *tout ensemble analytique (linéaire) possède la propriété de Baire* [1]).

La somme (7) n'est pas en général disjointe, mais on peut la transformer en une somme disjointe, en retranchant de chacun de leurs termes la somme de tous les termes qui le précèdent.

On obtient ainsi une décomposition de l'ensemble analytique E

$$E = \sum_{\alpha < \Omega} Q^\alpha \tag{13}$$

[1]) Cette proposition a été démontrée pour la première fois dans le Mémoire de N. Lusin et W. Sierpiński, *Journ. de Math.*, 7^e^ série t. II, 68 ss. Cf aussi: O. Nikodym, *Fund. Math.* t. VII, p. 153 et N. Lusin, *Fund. Math.* t. X, p. 26.

en constituantes Q^α $(\alpha < \Omega)$ qui sont toutes mesurables B, et on a pour $\alpha < \Omega$:

$$S^\alpha - T^\alpha = \sum_{\xi \leq \alpha} Q^\xi \tag{14}$$

De la propriété démontrée des ensembles $S^\alpha - T^\alpha$ et de la définition des ensembles Q^α résulte tout de suite qu'il existe pour tout ensemble linéaire parfait P un nombre ordinal $\mu < \Omega$ (dépendant de P), tel que l'ensemble

$$\sum_{\mu < \alpha < \Omega} Q^\alpha \tag{15}$$

est de 1^re^ catégorie sur P.

Si l'ensemble E n'est pas mesurable B, il existe évidemment une infinité non dénombrable de termes Q^α de la série (13) qui sont des ensembles non vides. Prenons dans chacun de ces ensembles un point: on obtient ainsi un ensemble non dénombrable N.

Soit P un ensemble parfait linéaire donné quelconque, μ un nombre ordinal, tel que l'ensemble (15) est de 1^re^ catégorie sur P. D'après (13) on a

$$N = NE = \sum_{\alpha \leq \mu} NQ^\alpha + \sum_{\mu < \alpha < \Omega} NQ^\alpha. \tag{16}$$

Le premier terme du côté droit de la formule (16) est évidemment au plus dénombrable (puisque $\mu < \Omega$ et chacun des ensembles NQ^α contient au plus un point) et le second est de 1^re^ catégorie sur P, en tant que contenu dans l'ensemble (15). La formule (16) prouve donc que l'ensemble N est de 1^re^ catégorie sur P. P pouvant être un ensemble linéaire parfait quelconque, nous arrivons ainsi à la proposition suivante:

Si un ensemble analytique non mesurable B est décomposé en constituantes disjointes et si l'on prend un point de chacune de ces constituantes qui sont non vides, on obtient un ensemble non dénombrable de points qui est de 1^re^ catégorie sur tout ensemble parfait.

Une propriété analogue des constituantes des complémentaires analytiques a été démontrée par M. N. Lusin et par moi en 1928 [1]).

[1]) Rend. Accad. Lincei vol. VII, ser 6 (5 febr. 1928), p. 214—215.

On voit aussi sans peine que *si l'ensemble analytique E n'est pas mesurable B, la série* (15) *contient une infinité non dénombrable de termes Q^α qui sont des ensembles non dénombrables.*

Admettons, en effet, que ce n'est pas le cas: il existe alors un indice ν, tel que les ensembles Q^α sont au plus dénombrables pour $\alpha \geqslant \nu$: soit N leurs somme. On voit sans peine (en raisonnant comme plus haut) que l'ensemble (non dénombrable) N est de 1^re^ catégorie sur tout ensemble parfait. Or, N est évidemment un ensemble analytique (en tant qu'une différence $E - \sum_{\xi<\nu} Q^\alpha$ entre un ensemble analytique et un ensemble mesurable B) et, comme non dénombrable, contient un sous-ensemble parfait, ce qui implique une contradiction.

Nous avons ainsi une nouvelle démonstration de la propriété de M. Sélivanowski concernant la puissance des constituantes analytiques, basée sur une idée différente.

Ein Satz über Unikohärenz

von

Karol Borsuk (Warszawa).

Eine topologische Eigenschaft E möge K-Eigenschaft heissen wenn folgendes gilt: ist sowohl die Vereinigungs- als die Durchschnittsmenge irgend zweier relativ zueinander abgeschlossener Punktmengen von der Eigenschaft E, so ist auch jede der beiden letzten Punktmengen von der Eigenschaft E. Es folgt unmittelbar aus dieser Definition, dass insbesondere das logische Produkt von beliebig vielen K-Eigenschaften wieder eine K-Eigenschaft ist.

Die Eigenschaften: Kontinuum, Streckenbild [1]), absoluter Retrakt, haben sich als lauter K-Eigeschaften erwiesen [2]). Es entsteht die Frage (um sich wenigstens auf topologisch wichtige Begriffe zu beschränken), ob auch *unikohärentes* [3]) *Streckenbild eine K-Eigenschaft ist* [4]).

Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist nun, einen einfachen Satz zu beweisen, aus welchem sich insbesondere eine *positive* Antwort auf diese Frage ergibt (s. Korollar 1).

[1]) Unter „Streckenbild" wird hier *stetiges* Bild der Strecke $0 \leqslant t \leqslant 1$ verstanden.

[2]) Z. Janiszewski und K. Kuratowski, *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, S. 211, Th. I; S. Nikodym, *Sur quelques propriétés des ensembles partout localement connexes*, Fund. Math. XII, S. 240, Th. I; N. Aronszajn und K. Borsuk, *Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus*, Fund. Math. XVIII, S. 194, 2.

[3]) Ein zusammenhängender Raum Z heisst *unikohärent* („henkellos" im Sinne von L. Vietoris), wenn die Durchschnittsmenge je zweier zusammenhängender in Z abgeschlossener Mengen, deren Vereinigungsmenge Z ist, zusammenhängend ist.

[4]) Dieses Problem wurde mir von Herrn B. Knaster mitgeteilt.