Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques.

Par

E. Sélivanowski (Moscou).

L'une des idées fondamentales que nous devons dans la théorie des ensembles analytiques à MM. Lusin et Sierpiński, c'est la notion de *constituante d'un ensemble analytique* lui-même [1]).

On sait que les constituantes d'un *complémentaire analytique* possèdent des propriétés remarquables qui proviennent toutes de la proposition fondamentale:

tout ensemble analytique E_1 contenu dans un complémentaire analytique $\mathcal{E}$ appartient au plus à une infinité dénombrable de constituantes de $\mathcal{E}$.

Parmi ces propriétés nous nous bornons à indiquer:

1° que si $\mathcal{E}$ a une mesure positive, il y a une infinité dénombrable de constituantes de $\mathcal{E}$ dont la mesure totale est précisément égale à celle de $\mathcal{E}$.

2° que si $\mathcal{E}$ est deuxième catégorie sur un ensemble parfait P, il y a une infinité dénombrable de constituantes de $\mathcal{E}$ qui forme un ensemble de deuxième catégorie sur P, la réunion des autres constituantes étant de première catégorie sur P.

On sait d'ailleurs que si $\mathcal{E}$ est non dénombrable, on ne peut conclure rien pour les constituantes de $\mathcal{E}$.

La question se pose de savoir: ces propriétés sont-elles encore vraies pour les constituantes d'un ensemble analytique lui-même?

[1]) *Voir* la Note de MM. Lusin et Sierpiński dans les *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 175, 1922, p. 357; *Sur une décomposition du continu.* Voir aussi N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris, 1930, p. 203.

C'est ici un fait important: la proposition fondamentale indiquée vraie pour les constituantes d'un complémentaire analytique, cesse être vraie pour les constituantes d'un ensemble analytique lui-même [1]).

Néanmoins, les deux propriétés citées des constituantes des complémentaires analytiques appartiennent aux complémentaires des ensembles analytiques ils-mêmes. Mais il y a de plus: si E est un ensemble analytique non mesurable B, il y a une infinité *transfinie* des constituantes de E dont chacune est non dénombrable.

Le but de cet article est d'établir rigoureusement ces faits. C'est M. Lusin qui me guida dans mes recherches sur ce sujet.

1. *Le crible* [2]).

Considérons dans un plan deux axes rectangulaires et un carré dont les côtés ont pour équations

$$x=0, \quad x=1; \quad y=0, \quad y=1.$$

Marquons dans le côté gauche vertical $x=0$ du carré tous les points rationnels $r_1, r_2, \ldots$ et menons à l'intérieur du carré par les points r_n les parallèles à l'axe des x. Plaçons sur chacune des parallèles un segment.

Par définition même, le crible C est la réunion de tous ces segments.

Soit x un point quelconque appartenant à l'intervalle $(0<x<1)$ de l'axe $0X$. Désignons par P_x une perpendiculaire élevée en ce point x à l'axe $0X$ et par R_x un ensemble de points du plan $X0Y$ en lequel cette perpendiculaire P_x coupe le crible C.

Deux cas seulement sont possibles: *ou bien* l'ensemble R_x admet une suite infinie décroissante de points $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ chacun plus bas que le précédent, *ou bien* ce n'est pas le cas. On sait que l'ensemble E formé des points x de l'intervalle $(0, 1)$ qui vérifient le premier cas est un *ensemble analytique.*

Les autres points d'intervalle, pour lequel l'ensemble R_x forme, par suite, sur la perpendiculaire P_x un ensemble *bien ordonnée* suivant la direction positive de l'axe $0Y$, constituent un ensemble $\mathcal{E}$ complémentaire de E, dit brièvement *complémentaire analytique.*

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Fund. Math.*, t. XVII, p. 91.

[2]) Voir N. Lusin, *Fund. Math.*, t. X, p. 9.

2. *Les constituantes d'un ensemble analytique et de son complémentaire* [1]).

Si le point x appartient à $\mathcal{E}$, l'ensemble R_x est *bien ordonné*; dans ce cas au point x correspond un nombre transfini bien déterminé que nous désignons par α_x.

Si le point x appartient à E, l'ensemble R_x *n'est plus bien ordonné*, en adoptant la même convention d'ordre. Les points de R_x admettent, dans ce cas, le mouvement rétrograde, et il est clair que, parmi les points limites de R_x dans chacun desquels l'ensemble R_x a le mouvement rétrograde, nous avons un point le plus bas; désignons par $\mu(x)$ l'ordonnée de ce point. Comme ce point N sur la droite P_x est évidemment *unique*, la partie bien ordonnée de R_x enfermée dans $[0 < y \leqslant \mu(x)]$ l'est aussi.

Donc au point x correspond un nombre transfini bien déterminé que nous désignons encore par α_x.

Appelons *partie constituante* (α) *de l'ensemble analytique* E ou simplement constituante E_α, l'ensemble des points x de E qui correspondent à un nombre α donné, $\alpha_x = \alpha$.

Appelons aussi *partie constituante* (α) *du complémentaire analytique* $\mathcal{E}$ ou simplement *constituante* $\mathcal{E}_\alpha$, l'ensemble des points x de $\mathcal{E}$ pour lesquels nous avons encore $\alpha_x = \alpha$, α étant un nombre fixe, donné à l'avance.

On voit bien que les constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ sont sans points communs deux à deux et, par suite, que les ensembles E et $\mathcal{E}$ sont décomposés complétement en leurs constituantes:

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_\omega + \ldots + E_\alpha + \ldots / \Omega$$

et

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots / \Omega.$$

3. *Les cribles dérivés.*

Nous allons d'abord montrer que les constituantes initiales E_0 et $\mathcal{E}_0$ sont *mesurables B*. La chose est évidente pour la constituante $\mathcal{E}_0$ puisque la projection de C sur l'axe $0X$ est mesurable B, or, la constituante $\mathcal{E}_0$ est évidemment la complémentaire de cette projection.

Désignons par H_n le segment du crible C situé sur la parallèle $y = r_n$ et par M_n l'ensemble des points du crible C situés *au-dessous*

[1]) *Voir* N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, p. 187.

du segment H_n. L'ensemble des points de H_n dont les projections sur l'axe $0X$ n'appartiennent pas à la projection de M_n, sur la même l'axe est mesurable B; nous désignerons par θ_n cet ensemble. Comme les ensembles $\theta_1, \theta_2, \ldots$ sont en infinité dénombrable, la réunion S de leurs projections sur l'axe $0X$ est un ensemble mesurable B. Or, les points x de S ont évidemment cette propriété caractéristique que chaque ensemble R_x qui correspond à x possède un *point initial* c'est-à-dire un point dont la coordonnée y est inférieure aux coordonnée y de tous les autres points de R_x. Nous concluons de là que si l'on supprime de l'intervalle $(0, 1)$ les points de $\mathcal{E}_0$ et de S, l'ensemble des points restants coïncide avec E_0. Donc, E_0 est mesurable B.

Pour établir la mesurabilité B des constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$, nous faisons introduire la notion de crible dérivé [1]) C': c'est un crible déduit du crible donné C en enlevant de chaque ensemble H_n tous les points de l'ensemble θ_n, $n = 1, 2, \ldots$ On voit bien que le crible dérivé C' est un crible définissant le même ensemble analytique E et que C' considéré comme un ensemble de points plan $X0Y$ es. contenu dans le crible donné, C. Mais la propriété la plus remarquable du crible dérivé C' est la suivante: on passe de C à C' en supprimant sur chaque perpendiculaire P_x un point initial de l'ensemble R_x (s'il existe un tel point). Ceci nous montre que les constituantes initiales de E et $\mathcal{E}$ déterminées par le crible dérivé C' coïncident respectivement avec $E_0 + E_1$ et $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1$. Ceci étant établi, nous formons une suite transfinie des cribles dérivés successifs [2])

$$C^0, C', C'', \ldots, C^{(n)}, \ldots, C^{(\omega)}, \ldots C^{(\alpha)}, \ldots / \Omega,$$

le crible C^0 étant identique avec le crible donné C. Si α est de première espèce, $\alpha = \alpha^* + 1$, on définit le crible $C^{(\alpha)}$ comme le crible dérivé de $C^{(\alpha^*)}$; si α est de deuxième espèce, on définit le crible $C^{(\alpha)}$ comme la partie commune aux cribles précédemment définis. Avec ces définitions, on voit bien que tous les cribles $C^{(\alpha)}$ définissent le même ensemble analytique E et que, si nous désignons les constituantes (α) d'ensembles E et $\mathcal{E}$ détérminées par le crible $C^{(\beta)}$ respectivement par $E_\alpha^{(\beta)}$ et $\mathcal{E}_\alpha^{(\beta)}$, on a les égalités évidentes:

$$E_0^{(\alpha)} = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_\omega + \ldots + E_\alpha$$
$$\mathcal{E}_0^{(\alpha)} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha.$$

[1]) Voir N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, p. 189.

[2]) Voir N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, p. 190.

Comme les constituantes E_0^α et $\mathcal{E}_0^\alpha$ sont toujours mesurables B, les sommes precédemment écrites les sont aussi. Il en résulte que les constituantes E_α et $\mathcal{E}_\alpha$ sont encore mesurables B.

4. *Mesure des constituantes* E_α.

Si la mesure du complémentaire $\mathcal{E}$ est *positive*, ce complémentaire est la somme de deux ensembles M et M', dont M est un ensemble *mesurable* B et M' un ensemble de mesure 0.

Or, on sait que quel que soit un ensemble analytique E' contenu dans $\mathcal{E}$, il appartient toujours seulement à une infinité dénombrable de constituantes $\mathcal{E}_\alpha$. Il en suit que l'ensemble M est enfermé dans une somme d'une infinité dénombrable de constituantes $\mathcal{E}_\alpha$:

$$M \subset \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_\beta.$$

La somme des mesures de ces constituantes est au moins égale à la mesure de l'ensemble M. Or, d'autre part, cette somme des mesures est évidemment au plus égale à la mesure d'ensemble $\mathcal{E}$, et comme mes $M =$ mes $\mathcal{E}$, nous concluons que

$$\text{mes}\, \mathcal{E} = \text{mes}\, \mathcal{E}_0 + \text{mes}\, \mathcal{E}_1 + \text{mes}\, \mathcal{E}_2 + \ldots + \text{mes}\, \mathcal{E}_\beta.$$

Cette égalité nous montre que les autres constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ $(\alpha > \beta)$ ont la mesure nulle, puisque leur réunion l'a aussi.

La même considération ne peut pas être appliquée dans le cas des constituantes E_α, parce qu'un ensemble analytique peut appartenir à une infinité non dénombrable de ces constituantes Un exemple est donné par l'ensemble E lui même. Néanmoins, nous allons démontrer que les constituantes E_α ont la propriété indiquée c'est-à-dire que nous avonsce

Théorème. *Si la mesure d'un ensemble analytique E est positive l y a une infinité dénombrable des constituantes des mesures positives dont la mesure totale est égale à la mesure de l'ensemble E lui-même.*

On peut régarder l'ensemble analytique donné E comme une somme de deux ensembles Q et Q_1, où Q est un ensemble mesurable B tel qu'on ait mes $Q =$ mes E. En remplaçant chaque élément du crible C par l'ensemble des points de cet élément tels que leurs projections sur l'axe $0X$ appartiennent à l'ensemble Q, on a un crible nouveau Γ définissant l'ensemble Q comme un ensemble analytique. Il est évident que les constituantes de Q déterminées par le crible Γ font parti des constituantes correspondantes de E. Or, il est manifeste que si le théorème sera démontré pour l'ensemble Q et pour ses constituantes, il sera démontré aussi pour l'ensemble E.

Formons une suite transfinie des cribles dérivés successifs

$$\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots \Gamma^{(\omega)}, \ldots, \Gamma^{(\alpha)}, \ldots /\Omega.$$

Les éléments de ces cribles situés sur la parallèle $y = r_n$ forment une suite décroissante des ensembles

$$H_n \supset H_n' \supset H_n'' \supset \ldots \supset H_n^{(\omega)} \supset \ldots \supset H_n^{(\alpha)} \supset \ldots /\Omega$$

d'où

$$\text{mes}\, H_n \geqslant \text{mes}\, H_n' \geqslant \ldots \geqslant \text{mes}\, H_n^{(\omega)} \geqslant \ldots \geqslant H_n^{(\alpha)} \geqslant \ldots /\Omega.$$

Il est évident qu'il existe un certain nombre β_n à partir duquel les mesures des ensembles considérés sont toutes égales, c'est-à-dire que l'on a

$$\text{mes}\, H_n^{(\beta_n)} = \text{mes}\, H_n^{(\beta_n+1)} = \text{mes}\, H_n^{(\beta_n+2)} = \ldots /\Omega.$$

Comme un tel nombre β_n existe pour chaque parallèle $y = r_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ il existe un nombre transfini $\alpha > \beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, à partir duquel les éléments des cribles précédents ont la même mesure que les éléments correspondants des cribles suivants, c'est-à-dire que l'on a

$$\text{mes}\, H_n^{(\alpha)} = \text{mes}\, H_n^{(\alpha+1)} = \ldots /\Omega \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Comme les ensembles $H_n^{(\alpha)}$ — mes $H_n^{(\alpha+1)}$ sont en infinité dénombrable, la réunion S de leurs projection sur l'axe $0X$ à la mesure nulle. Il en suit que la mesure de la constituante initiale de Q déterminée par le crible dérivé $C^{(\alpha)}$, cette constituante étant évidemment le complémentaire relativement à Q de l'ensemble S, est égale à la mesure de l'ensemble Q. Or, il est clair que cette constituante coïncide avec l'ensemble-somme de constituantes de Q

$$Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_\alpha.$$

Donc, nous avons

$$\text{mes}\, Q = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \text{mes}\, Q_\beta.$$

ce qui démontre la proposition.

5. *Catégorie des constituantes* E_α.

On sait que tout ensemble analytique possède la propriété de M. **Baire**; ses constituantes étant tous mesurables B, l'ont aussi.

Si un ensemble analytique est de première catégorie dans un segment quelconque, ses constituantes sont évidemment de la même catégorie.

La question se pose de savoir si toutes les constituantes d'un ensemble analytique peuvent être des ensembles de première catégorie, même dans le cas où l'ensemble analytique considéré n'est pas de première catégorie.

Le théorème suivant donne une réponse négative à cette question:

Théorème. *Si un ensemble analytique E est de seconde catégorie dans un intervalle (a, b), il y a au plus une infinité dénombrable des constituantes de E qui ne sont pas de première catégorie dans l'intervalle (a, b) et telles que la réunion de toutes les autres constituantes de E soit de première catégorie dans (a, b).*

Soit E un ensemble analytique que nous supposons de seconde catégorie dans tout segment situé dans l'intervalle donné (a, b).

Formons une suite transfinie des cribles dérivés successifs définissant E:

$$C^0, C', C'', \ldots, C^{(\omega)}, \ldots, C^{(\alpha)}, \ldots / \Omega.$$

Les éléments de ces cribles situés sur la parallèle $y = r_n$ forment une suite décroissante des ensembles

$$H_n^0 \supset H_n' \supset H_n'' \supset \ldots \supset H_n^{(\omega)} \supset \ldots \supset H_n^{\alpha} \supset \ldots / \Omega.$$

Les ensembles de la suite transfinie

$$\text{(I)} \quad H_n^0 - H_n', \; H_n' - H_n'', \ldots, \; H_n^{(\omega)} - H_n^{(\omega+1)}, \ldots, \; H_n^{(\alpha)} - H_n^{(\alpha+1)}, \ldots / \Omega$$

sont disjoints et possèdent la propriété de Baire. Or, d'après M. Sierpiński, toute famille d'ensembles disjoints, de seconde catégorie et possédant la propriété de Baire, est au plus dénombrable [1]).

Il en résulte que, parmi les ensembles de la suite (I) il y a une infinité dénombrable au plus de seconde catégorie dans (a, b), tous les autres ensembles de cette suite, à partir d'un nombre transfini α_n, étant des ensembles de premiàre catégorie dans l'intervalle (a, b). C'est la raison pour laquelle, en prenant un nombre $\alpha > \alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ on peut affirmer que tous les ensembles $H_n^{(\gamma)} - H_n^{(\gamma)}$ $(\gamma \geqslant \alpha;\ n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles de première catégorie dans l'intervalle (a, b). Il est clair que l'ensemble $E_0^{(\alpha)} + \mathcal{E}_0^{(\alpha)}$, est un ensemble de seconde catégorie partout dans (a, b), étant un complémentaire de la somme des projections sur l'axe $0X$ d'une infinité dénombrable des ensembles de première catégorie $H_n^{(\alpha)} - H_n^{(\alpha+1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Or, l'ensemble $\mathcal{E}_0^{(\alpha)}$ est sûrement un ensemble de première catégorie dans (a, b), puisqu'il fait parti de $\mathcal{E}$. Il en résulte que l'ensemble $E_0^{(\alpha)}$ est de seconde catégorie partout dans intervalle (a, b).

Comme cet ensemble est évidemment identique avec l'ensemble somme

$$E_0 + E_1 + \ldots + E_\omega + \ldots + E_\alpha$$

la proposition énoncée est démontrée.

6. *Puissance des constituantes* E_α.

Si un ensemble analytique E est *dénombrable*, toutes les constituantes E_α de E sont évidemment dénombrables ou finies.

La question se pose alors de savoir si un ensemble analytique *non dénombrable* peut être la somme des constituantes dont chacune est dénombrable?

Le théorème suivant donne une réponse négative à cette question:

Théorème. *Si un ensemble analytique E est non mesurable B, il y a une infinité non dénombrable des constituantes dont chacune a la puissance du continu.*

En effet, tout ensemble analytique E non mesurable B contient nécessairement un ensemble parfait P. Or, on peut indiquer une fonction $\varphi(x)$ continue et essentiellement croissante qui possède des propriétés:

1. $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$.
2. L'ensemble des valeurs que prend la fonction $\varphi(x)$ aux points x de l'ensemble P, est un ensemble parfait de *mesure positive*; nous le désignons par $\varphi(P)$.

Il en suit qu'on peut toujours, au moyen d'une transformation indiquée φ du segment $[0, 1]$ en lui même, transformer l'ensemble E dans un nouvel ensemble analytique E^* de mesure positive. D'après

[1]) Cela résulte tout de suite de faits que 1) tout ensemble linéaire de 2^{me} catégorie est de 2^{me} catégorie en tout point d'un intervalle, 2) deux ensembles possédants la propriété de Baire ne peuvent être chacun partout de 2^{me} catégorie dans un même intervalle, et 3) toute famille d'intervalles n'empiétants pas les uns sur les autres est au plus dénombrable.

la proposition de n° 4, l'ensemble E^* a sûrement une constituante de *mesure positive*. Or, la propriété „avoir la puissance du continu" est évidemment invariante par rapport à la transformation indiquée φ. Par conséquent, la constituante correspondante E_α de l'ensemble E à la puissance du continu. Donc l'existence d'une constituante non dénombrable est démontrée.

Or, l'ensemble $E' = E - \sum_{\beta \leq \alpha} E_\beta$ est évidemment un ensemble analytique non mesurable B. D'ailleurs, il est clair que cet ensemble peut être considéré comme un ensemble analytique défini par un crible C' formé de la manière suivante: pour avoir le crible C', il suffit de supprimer de chacun des éléments du crible C définissant l'ensemble analytique donné E tous les points dont les projections appartiennent à l'ensemble $\sum_{\beta \leq \alpha} E_\beta$.

On voit bien que l'ensemble E' est décomposé en constituantes déterminées par le crible C' de manière qu'on ait l'égalité

$$E' = E_{\alpha+1} + E_{\alpha+2} + \ldots / \Omega.$$

Dans ces conditions le même raisonnement que nous avons fait précédemment nous montre qu'une des constituantes E_γ de l'ensemble E' est aussi non dénombrable.

Ceci démontre l'existence au moins de deux constituantes non dénombrables de l'ensemble E, et *ainsi de suite.*

Si l'on opère de la même manière *transfiniment*, on arrive évidemment à la démonstration complète du théorème énoncé.

C. Q. F. D.

Sur les constituantes des ensembles analytiques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans la Note précédente M. E. Sélivanowski a démontré quelques propriétés intéressantes des constituantes des ensembles analytiques en partant de leurs définition à l'aide du crible de M. Lusin et en utilisant les cribles dérivés. Le but de cette Note est de prouver les propriétés de M. Sélivanowski pour les constituantes des ensembles analytiques définies en partant des systèmes déterminants, à l'aide des formules que j'ai donné dans le vol. VIII de ce journal [1]), et d'en tirer quelques conséquences intéressantes. Nous verrons que la démonstration, tout en conservant l'idée de M. Sélivanowski, est ici beaucoup plus simple et courte [2]).

Tout d'abord rappelons les notations.

Soit E un ensemble analytique linéaire donné, noyau du système déterminant $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé d'intervalles. Posons, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\delta^0_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{1}$$

$$\delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n} \tag{2}$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, et

$$\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \prod_{\xi < \alpha} \delta^\xi_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{3}$$

pour tout nombre ordinal α de seconde espèce.

1) *Fund. Math.*, t. VIII, p. 363.

2) La connaissance de la Note de M. Sélivanowski n'est pas nécessaire pour comprendre cette Note.