Le théorème d'unicité de M. Lusin pour les espaces abstraits [1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit qu'on a défini un *système déterminant* $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ d'ensembles, lorsqu'on a fait correspondre à tout système fini d'indices $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ un ensemble (formé d'éléments quelconques) $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Un système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est dit *système d'unicité*, si, $m_1, m_2, m_3, \dots$ et $n_1, n_2, n_3, \dots$, étant deux suites infinies distinctes (au moins dans un terme) de nombres naturels, on a toujours

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1, m_2, \dots, m_k} E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = 0.$$

On appelle *noyau* du système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ et on désigne par $N\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ l'ensemble

$$N\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\} = \sum_{(n_1, n_2, n_3, \dots)} E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \cdots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \dots$

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, désignons par $A(F)$ la famille de tous les ensembles qui sont noyaux de systèmes déterminants $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$, formés d'ensembles $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de la famille F, et désignons par $U(F)$ la famille de tous les ensembles qui sont noyaux de systèmes d'unicité $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ formés d'ensembles $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de la famille F.

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie, le 21 octobre 1932.

On a évidemment

$$F \subset A(F)$$

(puisqu'on a, pour tout ensemble E,

$$E = N\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\},$$

où $E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E$ pour tout système fini $n_1, n_2, \dots, n_k$ de nombres naturels) et

$$U(F) \subset A(F).$$

Théorème I. [1]) *Quelle que soit la famille F d'ensembles, si*

(1) $$E^i \in U(F) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

et

(2) $$E^i E^j = 0 \quad pour \quad i \neq j,$$

on a

(3) $$\sum_{i=1}^{\infty} E^i \in U(F).$$

Démonstration. D'après (1) il existe pour tout i naturel un système d'unicité $\{E^i_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$, formé d'ensembles de la famille F, tel que

(4) $$E^i = N\{E^i_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}.$$

Il existe, comme on sait, pour tout nombre naturel k deux nombres naturels p_k et q_k bien déterminés, tels que

(5) $$k = 2^{p_k - 1}(2q_k - 1),$$

et on a évidemment pour tous les nombres naturels r et s:

(6) $$p_{2^{r-1}(2s-1)} = r \quad \text{et} \quad q_{2^{r-1}(2s-1)} = s.$$

Posons (pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$):

(7) $$E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E^{p_{n_1}}_{q_{n_1}, n_2, n_3, \dots, n_k}$$

— ce seront évidemment des ensembles de la famille F.

[1]) Cf. H. Hahn, *Reelle Funktionen* Erster Teil. Leipzig 1932, p. 370 (42. 2. 1).

Je dis que $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ et un système d'unicité.

En effet, admettons que ce n'est pas le cas: il existe donc deux suites infinies différentes d'indices: $r_1, r_2, r_3, \ldots$ et $s_1, s_2, s_3, \ldots$, telles que

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{r_1, r_2, \ldots, r_k} E_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \neq 0,$$

ce qui donne, d'après (7):

$$\prod_{k=1}^{\infty} E^{p_{r_1}}_{q_{r_1}, r_2, \ldots, r_k} \cdot E^{p_{s_1}}_{q_{s_1}, s_2, \ldots, s_k} \neq 0 \tag{8}$$

D'après (4), la formule (8) prouve (vu la définition du noyau N) que

$$E^{p_{r_1}} E^{p_{s_1}} \neq 0,$$

ce qui donne, d'après (2):

$$p_{r_1} = p_{s_1}. \tag{9}$$

Les suites infinies d'indices $r_1, r_2, r_3, \ldots$ et $s_1, s_2, s_3, \ldots$ étant distinctes, il résulte de (9) que les suites $q_{r_1}, r_2, r_3, \ldots$ et $q_{s_1}, s_2, s_3, \ldots$ sont distinctes et la formule (8) prouve, d'après (9), que $\{E^{p_{r_1}}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ n'est pas un système d'unicité, contrairememt à l'hypothèse.

Le système $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est donc un système d'unicité, c. q. f. d.

Nous prouverons maintenant que

$$\sum_{i=1}^{\infty} E^i = N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}. \tag{10}$$

Soit $p \in \sum_{i=1}^{\infty} E^i$. Il existe donc un indice j, tel que $p \in E^j$. D'après (4) il existe donc une suite infinie d'indices $r_1, r_2, r_3, \ldots$, telle que

$$p \in E^j_{r_1, r_2, \ldots, r_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Or, d'après (7) et la définition des suites p_k et q_k $(k = 1, 2, \ldots)$, on a

$$E_{2^{j-1}(2r_1 - 1), r_2, r_3, \ldots, r_k} = E^j_{r_1, r_2, \ldots, r_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots):$$

la formule (11) donne donc: $p \in N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$.

D'autre part, soit p un élément de l'ensemble $N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$. Il existe donc une suite infinie d'indices $r_1, r_2, r_3, \ldots$, telle que

$$p \in E_{r_1, r_2, \ldots, r_k} \qquad (\text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et les formules (7) et (4) donnent tout de suite $p \in E^{p_{r_1}}$, donc $p \in \sum_{i=1}^{\infty} E^i$.

La formule (10) est ainsi démontrée. $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ étant un système d'unicité, et $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant tous des ensembles de la famille F, la formule (10) entraîne la formule (3). Le théorème I est ainsi démontré.

Théorème I^a. *Quelle que soit la famille F d'ensembles, si*

$$E^1 \in U(F) \quad \textit{et} \quad E^2 \in U(F)$$

et

$$E^1 E^2 = 0,$$

on a

$$E^1 + E^2 \in U(F).$$

La démonstration du théorème I^a est tout à fait analogue à celle du théorème I, il faut seulement au lieu de la formule (7) partir de la formule

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E^{\varphi(n_1)}_{\psi(n_1), n_2, \ldots, n_k},$$

où

$$\varphi(n_1) = 1 \text{ et } \psi(n_1) = \frac{n_1 - 1}{2} \text{ si } n_1 \text{ est impair}$$

et

$$\varphi(n_1) = 2 \text{ et } \psi(n_1) = \frac{n_1}{2} \text{ si } n_1 \text{ est impair.}$$

Théorème II[1]: *Quelle que soit la famille F d'ensembles, si*

$$E^i \in U(F), \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

on a

$$\prod_{i=1}^{\infty} E^i \in U(F). \tag{13}$$

[1]) Cf. H. Hahn, l. c., p. 371 (42. 2. 11.)

Démonstration. D'après (12) il existe pour tout i naturel un système d'unicité $\{\overset{i}{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ formé d'ensembles de la famille F, tel qu'on a la formule (4). Posons (pour tout système $n_1, n_2, \dots, n_k$):

$$(14) \qquad E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \overset{p_k}{E}_{n_{2^{p_k-1}}, n_{2^{p_k}\cdot 3}, \dots, n_{2^{p_k-1}(2q_k-1)}}$$

— ce seront des ensembles de la famille E.

Je dis que $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est un système d'unicité.

En effet, admettons que ce n'est pas le cas: il existe donc deux suites infinies différentes d'indices: $r_1, r_2, \dots$ et $s_1, s_2, \dots$, p. e. où

$$(15) \qquad r_h \neq s_h,$$

telles que

$$(16) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} E_{r_1, r_2, \dots, r_k} E_{s_1, s_2, \dots, s_k} \neq 0.$$

Soit

$$(17) \qquad p_h = l \quad \text{et} \quad q_h = m.$$

D'après (14) on a

$$E_{r_1, r_2, \dots, r_{2^{l-1}(2j-1)}} = \overset{l}{E}_{r_{2^{l-1}}, r_{2^{l-1}\cdot 3}, \dots, r_{2^{l-1}(2j-1)}}$$

et

$$E_{s_1, s_2, \dots, s_{2^{l-1}(2j-1)}} = \overset{l}{E}_{s_{2^{l-1}}, s_{2^{l-1}\cdot 3}, \dots, s_{2^{l-1}(2j-1)}}$$

pour $j = 1, 2, 3, \dots$, d'où, d'après (16):

$$\prod_{j=1}^{\infty} \overset{l}{E}_{r_{2^{l-1}}, r_{2^{l-1}\cdot 3}, \dots, r_{2^{l-1}(2j-1)}} \overset{l}{E}_{s_{2^{l-1}}, s_{2^{l-1}\cdot 3}, \dots, s_{2^{l-1}(2j-1)}} \neq 0,$$

ce qui est impossible, puisque, d'après (17) et (16)

$$r_{2^{l-1}(2m-1)} = r_h \neq s_h = s_{2^{l-1}(2m-1)} \quad \text{et} \quad \{\overset{l}{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$$

est un système d'unicité.

$\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est donc un système d'unicité, c. q. f. d.

Nous prouverons maintenant que

$$(18) \qquad \prod_{i=1}^{\infty} \overset{i}{E} = N\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}.$$

Soit $p \in \prod_{i=1}^{\infty} \overset{i}{E}$. On a donc $p \in \overset{i}{E}$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$ et il existe, d'après (4), pour tout indice i donné une suite infinie d'indices $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, r_3^{(i)}, \dots$, telle que

$$(19) \qquad p \in \overset{i}{E}_{r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \dots, r_k^{(i)}}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Posons

$$s_j = r_{q_j}^{(p_j)} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3, \dots :$$

d'après (14) nous aurons:

$$E_{s_1, s_2, \dots, s_k} = \overset{p_k}{E}_{r_1^{(p_k)}, r_2^{(p_k)}, \dots, r_{q_k}^{(p_k)}}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots,$$

ce qui donne, d'après (19):

$$p \in E_{s_1, s_2, \dots, s_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

et prouve que $p \in N\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$.

D'autre part, soit $p \in \{N_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. Il existe donc une suite infinie d'indices $r_1, r_2, r_3, \dots$, telle que

$$(20) \qquad p \in E_{r_1, r_2, \dots, r_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Soit i un indice donné. D'après (20) on a

$$p \in E_{r_1, r_2, \dots, r_{2^{i-1}(2j-1)}} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

ce qui donne, d'après (14):

$$p \in \overset{i}{E}_{r_{2^{i-1}}, r_{2^{i-1}\cdot 3}, \dots, r_{2^{i-1}(2j-1)}} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots,$$

d'où:

$$p \in N\{\overset{i}{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$$

et, d'après (4): $p \in \overset{i}{E}$. On a donc $p \in \overset{i}{E}$ pour $i = 1, 2, \dots$

La formule (18) est ainsi établie. $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ étant un système d'unicité, formé d'ensembles de la famille F, le théorème II est ainsi démontré.

Théorème III. *Quelle que soit la famille F d'ensembles, on a l'égalité*

$$(21) \qquad U\,U(F) = U(F).$$

Démonstration. Soit

$$E \in UU(F). \tag{22}$$

On a donc

$$E = N\{E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}\}, \tag{23}$$

où, pour tout système fini d'indices $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$, $\{E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}\}$ est un système d'unicité, formé d'ensembles de la famille $U(F)$. Il existe donc pour tout système fini donné d'indices $r_1, r_2, \ldots, r_s$ un système d'unicité $\{E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, formé d'ensembles de la famille F, tel que

$$E^{r_1, r_2, \ldots, r_s} = N\{E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\} \tag{24}$$

Posons, pour tout système fini $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de nombres naturels:

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n} = E^{p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_{q_k}}}_{q_{n_{2q_k-1}}, q_{n_{2(2q_k-1)}}, \ldots, q_{n_{2^{p_k-1}(2q_k-1)}}} \tag{25}$$

— ce seront évidemment des ensembles de la famille F.

Je dis que $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est un système d'unicité. En effet, admettons que ce n'est pas le cas: il existe donc deux suites infinies d'indices $r_1, r_2, r_3, \ldots$ et $s_1, s_2, s_3, \ldots$, et un indice h, tels qu'on a les formules (15) et (16).

Distinguons deux cas:

1) $p_{r_j} = p_{s_j}$ pour $j = 1, 2, 3, \ldots$

Soit

$$h = 2^{m-1}(2l-1) \tag{26}$$

On a, d'après 1) (pour $j = h$), (5) et (15):

$$q_{r_h} \neq q_{s_h} \tag{27}$$

Posons:

$$a_j = q_{r_{2^{j-1}(2l-1)}}, \quad b_j = q_{s_{2^{j-1}(2l-1)}}, \quad c_j = p_{r_j}, \text{ pour } j = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

D'après (28), (25) et (6) on trouve, pour $j = 1, 2, 3, \ldots$:

$$E_{r_1, r_2, \ldots, r_{2^{j-1}(2l-2)}} = E^{c_1, c_2, \ldots, c_l}_{a_1, a_2, \ldots, a_j} \text{ et } E_{s_1, s_2, \ldots, s_{2^{j-1}(2l-1)}} = \\ = E^{c_1, c_2, \ldots, c_l}_{b_1, b_2, \ldots, b_j}. \tag{29}$$

Or, d'après (28), (26) et (27) on a

$$a_m \neq b_m$$

et, d'après (29) et (16) on trouve

$$\prod_{j=1}^{\infty} E^{c_1, c_2, \ldots, c_l}_{a_1, a_2, \ldots, a_j} E^{c_1, c_2, \ldots, c_l}_{b_1, b_2, \ldots, b_j} \neq 0,$$

ce qui est impossible, $\{E^{c_1, c_2, \ldots, c_l}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ étant un système d'unicité.

2) Il existe un indice g, tel que

$$p_{r_g} \neq p_{s_g}. \tag{30}$$

Posons

$$t_j = p_{r_j} \quad \text{et} \quad u_j = p_{s_j} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{31}$$

et

$$a_j^{(i)} = q_{r_{2^{j-1}(2i-1)}}, \quad b_j^{(i)} = q_{s_{2^{j-1}(2i-1)}} \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots \\ j = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \tag{32}$$

D'après (31), (32), (25) et (6) nous avons:

$$E_{r_1, r_2, \ldots, r_{2^{j-1}(2i-1)}} = E^{t_1, t_2, \ldots, t_i}_{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_j^{(i)}}, \quad E_{s_1, s_2, \ldots, s_{2^{j-1}(2i-1)}} = \\ = E^{u_1, u_2, \ldots, u_i}_{b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \ldots, b_j^{(i)}} \tag{33}$$

pour i et j naturels, d'où, d'après (15) et (24):

$$\prod_{i=1}^{\infty} E^{t_1, t_2, \ldots, t_i} E^{u_1, u_2, \ldots, u_i} \neq 0,$$

ce qui est impossible, puisque, d'après (30) et (31) $t_g \neq u_g$, et $\{E^{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est un système d'unicité.

La formule (16) certaîne donc toujours une contradiction. Nous avons ainsi démontré que $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est un système d'unicité.

Je dis maintenant que

$$E = N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\} \tag{34}$$

En effet, soit $p \in E$. D'après (23) il existe une suite infinie d'indices $r_1, r_2, r_3, \ldots$, telle que

$$p \in E^{r_1, r_2, \ldots, r_j} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{35}$$

D'après (24) et (35) il existe pour tout j naturel une suite infinie d'indices $m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, m_3^{(j)}, \ldots$, telle que

$$(35)\qquad p \in E^{r_1, r_2, \ldots, r_j}_{m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \ldots, m_k^{(j)}} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, 3, \ldots \\ k = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

Posons

$$(37)\qquad s_h = 2^{r_h - 1}(2 m_{p_h}^{(q_h)} - 1), \quad \text{pour} \quad h = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après (37) on a

$$(38)\qquad p_{s_h} = r_h \quad \text{et} \quad q_{s_h} = m_{p_h}^{(q_h)} \quad \text{pour} \quad h = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'après (6):

$$(39)\qquad q_{s_{2^{j-1}(2q_k - 1)}} = m_j^{(q_k)} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots$$

Les formules (25), (38) et (39) donnent:

$$E_{s_1, s_2, \ldots, s_k} = E^{r_1, r_2, \ldots, r_{q_k}}_{m_1^{(q_k)}, m_2^{(q_k)}, \ldots, m_{p_k}^{(q_k)}} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

ce qui donne, d'après (36)

$$(40)\qquad p \in E_{s_1, s_2, \ldots, r_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc $p \in N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$.

D'autre part, soit $p \in N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$. Il existe donc une suite infinie d'indices $s_1, s_2, s_3, \ldots$, telle qu'on a les formules (40), Posons

$$(41)\qquad r_j = p_{s_j} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

et

$$(42)\qquad m_j^{(i)} = q_{s_{2^{j-1}(2i-1)}} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ j = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

D'après (25), (41), (42) et (6) nous avons:

$$E_{s_1, s_2, \ldots, s_{2^{j-1}(2i-1)}} = E^{r_1, r_2, \ldots, r_i}_{m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \ldots, m_j^{(i)}} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ j = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

ce qui donne, d'après (40):

$$p \in E^{r_1, r_2, \ldots, r_i}_{m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \ldots, m_j^{(i)}} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ j = 1, 2, 3, \ldots, \end{matrix}$$

d'où, d'après (24):

$$p \in E^{r_1, r_2, \ldots, r_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

et. d'après (23): $p \in E$.

La formule (34) et ainsi établie. $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ étant un système d'unicité, formé d'ensembles de la famille F, nous avons ainsi démontré que $E \in U(F)$.

Nous avons donc prouvé que si $E \in UU(F)$, on a $E \in U(F)$, c'est-à-dire que

$$(43)\qquad UU(F) \subset U(F).$$

Nous prouverons maintenant l'inclusion inverse. Soit donc $E \in U(F)$. Il existe donc un systéme d'unicité $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, formé d'ensembles de la famille F, tel qu'on a la formule (34).

Posons pour toutes les suites finies d'indices $r_1, r_2, \ldots, r_s$ et $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$(44)\qquad E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{2^{r_1-1}(2n_1-1), 2^{r_2-1}(2n_2-1), \ldots, 2^{r_k-1}(2n_k-1)} \quad \text{si } k \leqslant s$$

et

$$(45)\qquad E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \\ = E_{2^{r_1-1}(2n_1-1), 2^{r_2-1}(2n_2-1), \ldots, 2^{r_s-1}(2n_s-1), n_{s+1}, n_{s+2}, \ldots, n_k} \quad \text{si } k > s$$

$\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ étant un système d'unicité, on voit sans peine, d'après (44) et (45) que, pour toute suite finie donnée d'indices $r_1, r_2, \ldots, r_s$, $\{E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est un système d'unicité. En posant (pour tout système fini donné d'indices $r_1, r_2, \ldots, r_s$)

$$(46)\qquad E^{r_1, r_2, \ldots, r_s} = N\{E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\},$$

nous aurons donc

$$(47)\qquad E^{r_1, r_2, \ldots, r_s} \in U(F).$$

Je dis que $\{E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}\}$ est un système d'unicité. En effet, admettons que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sont deux suites infinies différentes d'indices, p. e. telles que

$$(48)\qquad a_k \neq b_k$$

et que

(49) $$\prod_{k=1}^{\infty} E^{a_1,a_2,\dots,a_k} E^{b_1,b_2,\dots,b_k} \neq 0.$$

De (49) résulte que

$$E^{a_1,a_2,\dots,a_k} E^{b_1,b_2,\dots,b_k} \neq 0.$$

et, d'après (46), il existe deux suites infinies d'indices $c_1, c_2, c_3, \dots$ et $d_1, d_2, d_3, \dots$, telles que

$$\prod_{k=1}^{\infty} E^{a_1,a_2,\dots,a_k}_{c_1,c_2,\dots,c_k} E^{b_1,b_2,\dots,b_k}_{d_1,d_2,\dots,d_k} \neq 0.$$

Or, comme on voit sans peine, c'est impossible d'après (44) et (45), $\{E_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$ étant un système d'unicité.

Nous avons ainsi démontré que $\{E^{r_1,r_2,\dots,r_s}\}$ est un système d'unicité.

Je dis maintenant que

(50) $$E = N\{E^{r_1,r_2,\dots,r_s}\}$$

Soit $p \in E$. D'après (34) il existe donc une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \dots$, telle que

(51) $$p \in E_{m_1,m_2,\dots,m_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

Or, d'après (44) et (45), pour tout indice s donné:

$$E_{m_1,m_2,\dots,m_k} = E^{p_{m_1},p_{m_2},\dots,p_{m_s}}_{q_{m_1},q_{m_2},\dots,q_{m_s}} \quad \text{pour} \quad k \leqslant s$$

et

$$E_{m_1,m_2,\dots,m_k} = E^{p_{m_1},p_{m_2},\dots,p_{m_s}}_{q_{m_1},q_{m_2},\dots,q_{m_s},m_{s+1},m_{s+2},\dots,m_k} \quad \text{pour} \quad k > s$$

La formule (51) prouve donc, d'après (46), que

$$p \in E^{p_{m_1},p_{m_2},\dots,p_{m_s}} \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, 3, \dots,$$

d'où: $p \in N\{E^{r_1,r_2,\dots,r_s}\}$.

D'autre part, soit $p \in N\{E^{r_1,r_2,\dots,r_s}\}$. Il existe donc un indice g, tel que $p \in E^g$ et, d'après (46), il existe une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \dots$, telle que

(52) $$p \in E^g_{m_1,m_2,\dots,m_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Or, d'après (44) et (45):

$$E^g_{m_1} = E_{2^{g-1}(2m_1-1)} \quad \text{et} \quad E^g_{m_1,m_2,\dots,m_k} = E_{2^{g-1}(2m_1-1),m_2,m_3,\dots,m_k} \quad \text{pour} \quad k > 1:$$

la formule (52) donne donc, d'après (34): $p \in E$.

La formule (50) est ainsi établie. $E^{r_1,r_2,\dots,r_s}$ étant tous, d'après (47), des ensembles de $U(F)$, et $\{E^{r_1,r_2,\dots,r_s}\}$ étant un système d'unicité, la formule (50) prouve que $E \in UU(F)$.

Nous avons ainsi démontré que la formule $E \in U(F)$ entraîne la formule $E \in UU(F)$, c'est-à-dire que

$$U(F) \subset UU(F).$$

Or, plus haut nous avons démontré la formule (43). On a ainsi la formule (21) et le théorème III est démontré.

Il est à remarquer que notre démonstration de la formule (34) donne en même temps la démonstration du théorème de M. Lusin, d'après lequel

$$AA(F) = A(F)$$

pour toute famille F d'ensembles [1]).

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, désignons par $B(F)$ la plus petite famille Φ d'ensembles satisfaisant à trois conditions suivantes:

1°. $F \subset \Phi$.

2°. Une somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints de Φ ainsi qu'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints de Φ appartient à Φ.

3°. Un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de Φ appartient à Φ.

[1]) Cf. F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 92, W. Sierpiński: *Zarys teorji mnogości* Cz II (Topologja ogólna). Warszawa 1928 (en polonais), p. 156—160.

Des théorèmes I, I' et II résulte tout de suite ce

Théorème IV. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait pour une famille F d'ensembles la formule*

$$B(F) \subset U(F)$$

est l'inclusion

$$F \subset U(F)$$

Nous démontrerons plus loin pour les familles F satisfaisant aux certaines conditions l'égalité $B(F) = U(F)$.

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, désignons par $R(F)$ la famille de tous les ensembles qui sont différences de deux ensembles de la famille F.

Théorème V[1]. *F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, les formules*

(53) $$R(F) \subset B(F)$$

et

(54) $$R(B(F)) \subset B(F)$$

sont équivalentes.

D é m o n s t r a t i o n. D'après $F \subset B(F)$ on a $R(F) \subset R(B(F))$: la formule (54) entraîne donc la formule (53).

Soit maintenant F une famille d'ensembles qui satisfait à la condition (53). Nous prouverons d'abord que

(55) *Si* $M \in F$ *et* $N \in B(F)$, *on a* $M - N \in B(F)$.

Soit donc $M \in F$ et désignons par K la famille de tous les ensembles E, tels que

$$E \in B(F) \quad \text{et} \quad M - E \in B(F).$$

D'après $F \subset B(F)$ et (53) la famille $\Phi = K$ satisfait évidemment à la condition 1°.

Soit maintenant $N = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, où $E_m E_n = 0$ pour $m \neq n$ et $E_n \in K$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ D'après la définition de la famille K on a donc $E_n \in B(F)$ et $M - E_n \in B(F)$ pour $n = 1, 2, \ldots$

[1]) J'ai démontré des théorèmes connexes dans deux notes que j'ai publié dans les *Fund. Math.* t. XII, p. 209—210 et dans les *Annales de la Soc. Polonaise de Math.* t. VI, p. 50—53.

La famille $\Phi = B(F)$ jouissant de la propriété 2°, on a $N \in B(F)$. Or, la famille $\Phi = B(F)$ jouissant de la propriété 3°, la formule

$$M - N = M - (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) = (M - E_1)(M - E_2)(M - E_3)\ldots$$

donne $M - N \in B(F)$. D'après la définition de la famille K on a donc $N \in K$.

Nous avons ainsi démontré que la famille $\Phi = K$ jouit de la propriété 2°.

Soit enfin $N = E_1 E_2 E_3 \ldots$, où $E_n \in K$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

On a donc $E_n \in B(F)$ et, la famille $\Phi = B(F)$ satisfaisant à la condition 3°, on trouve $N \in B(F)$

Or, on a évidemment la formule

(56) $$M - N = M - E_1 E_2 E_3 \ldots = (M - E_1) + E_1(M - E_2) + \\ + E_1 E_2 (M - E_3) + \ldots + E_1 E_2 \ldots E_{n-1}(M - E_n) + \ldots,$$

où les ensembles

(57) $$H_n = E_1 E_2 \ldots E_{n-1}(M - E_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

satisfont à la condition

(58) $$H_m H_n = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n.$$

La famille $\Phi = B(F)$ satisfaisant à la condition 3°, il résulte de $E_n \in B(F)$ et $M - E_n \in B(F)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et de (47) résulte que $H_n \in B(F)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Or, la famille $\Phi = B(F)$ satisfaisant à la condition 2°, il résulte de (56), (57) et (58) que $M - N \in B(F)$. D'après la définition de la famille K on a donc $N \in K$. La famille $\Phi = K$ satisfait donc à la condition 2°.

Nous avons ainsi démontré que la famille $\Phi = K$ satisfait aux conditions 1°, 2° et 3°. D'après la définition de la famille $B(F)$ on a donc $B(F) \subset K$. Donc, si $N \in B(F)$, on a $N \in K$, donc $M - N \in B(F)$. La formule (55) est ainsi établie.

Soit maintenant $N \in B(F)$ et désignons par K_1 la famille de tous les ensembles M, tels que $M - N \in B(F)$. D'après (55) la famille $\Phi = K_1$ satisfait à la condition 1°. Soit maintenant $M = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, où $E_n \in K_1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et $E_m E_n = 0$ pour $m \neq n$. On a donc $E_n - N \in B(F)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Or, on a évidemment

$$M-N=(E_1+E_2+E_3+...)-N=(E_1-N)+(E_2-N)+(E_3-N)+..$$

et, d'après $E_mE_n=0$ pour $m\neq n$, on a $(E_m-N)(E_n-N)=0$ pour $m\neq n$. La famille $\Phi=B(F)$ satisfaisant à la condition 2°, il en résulte que $M-N\epsilon B(F)$, donc $M\epsilon K_1$. La famille $\Phi=K_1$ satisfait donc à la condition 2°.

Soit enfin $M=E_1E_2E_3\ldots$, où $E_n\epsilon K_1$ pour $n=1,2,\ldots$, donc $E_n-N\epsilon B F)$ pour $n=1,2,\ldots$ La famille $\Phi=B(F)$ satisfaisant à la condition 3°, la formule

$$M-N=E_1E_2E_3\ldots-N=(E_1-N)(E_2-N)(E_3-N)\ldots$$

prouve que $M-N\epsilon B(F)$, donc que $M\epsilon K_1$. La famille $\Phi=K_1$ satisfait donc à la condition 3°.

La famille $\Phi=K_1$ satisfait donc aux conditions 1°, 2° et 3°, d'où résulte, comme nous savons, que $B(F)\subset K_1$. Donc, si $M\epsilon B(F)$, on a $M\epsilon K_1$, c'est à dire $M-N\epsilon B(F)$.

Nous avons ainsi démontré que si $M\epsilon B(F)$ et $N\epsilon B(F)$ on a $M-N\epsilon B(F)$. La formule (54) est ainsi établie.

Le théorème V est donc démontré.

Corollaire. *Si F est une famille d'ensembles, telle que $R(F)\subset\subset B(F)$, toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de $B(F)$ appartient à $B(F)$.*

Démonstration. D'après le théorème V, si $R(F)\subset B(F)$, on a $R(B(F))\subset B(F)$. Soit maintenant $E=E_1+E_2+E_3+\ldots$, où $E_n\epsilon B(F)$ pour $n=1,2,3,\ldots$ Nous pouvons écrire:

(59) $$E=E_1+(E_2-E_1)+(E_3-E_1)(E_3-E_2)+\ldots,$$

où les ensembles

(60) $$H_1=E_1,\ H_n=(E_n-E_1)(E_n-E_2)\ldots(E_n-E_{n-1})\ \text{pour}\ n>1$$

satisfont évidemment à la condition (58).

D'après $R(B(F))\subset B(F)$ et $E_n\epsilon B(F)$ pour $n=1,2,\ldots$, on a $E_m-E_n\epsilon B(F)$ pour m et n naturels. La famille $\Phi=B(F)$ jouissant de la propriété 2°, les formules (59) et (60) donnent donc $E\epsilon B(F)$. Notre corollaire est ainsi démontré.

Nous dirons qu'une famille F d'ensembles satisfait à la condition C, si, $E_1, E_2, E_3,\ldots$ étant une suite infinie donnée quelconque d'ensembles de F, telle que

$$E_1E_2\ldots E_n\neq 0,\quad \text{pour}\quad n=1,2,3,\ldots,$$

on a

$$\prod_{n=1}^{\infty}E_n\neq 0.\ ^{1})$$

Théorème. VI. (Théorème de Souslin pour les espaces abstraits) [2].

Si F est une famille d'ensembles satisfaisant à la condition C et telle que $R(F)\subset B(F)$, et si E et H sont deux ensembles, tels que

(61) $$E\epsilon A(F),\ H\epsilon A(F)\ \text{et}\ EH=0,$$

il existe deux ensembles M et N, tels que

(62) $$M\epsilon B(F),\ N\epsilon B(F),\ MN=0,\ E\subset M\ \text{et}\ H\subset N.$$

Démonstration [3].

On dit que deux ensembles E et H sont séparables au moyen des ensembles d'une famille Φ, ou, plus court, qu'il sont *séparables* Φ, s'il existe deux ensembles disjoints de cette famille, dont un contient E et l'autre H [4].

Lemme. *Soit F une famille d'ensembles, telle que $R(F)\subset B(F)$. Si $E_1, E_2, E_3,\ldots$ et $H_1, H_2, H_3,\ldots$, sont deux suites infinies d'ensembles, telles que, pour m et n naturels, les ensembles E_m et H_n sont toujours séparables $B(F)$, les ensenbles*

(63) $$E=E_1+E_2+E_3+\ldots\ \textit{et}\ H=H_1+H_2+H_3+\ldots$$

sont aussi sèparables $B(F)$.

[1]) Pour les familles F d'ensembles fermés compacts d'un espace métrique (ou, plus généralement, d'un espace topologique) la condition C équivaut au *Durchschnittsatz* de G. Cantor.

[2]) Un théorème très voisin est du à M. S. Steckel: *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.* t. VII (1929), p 269.

[3]) La démonstration est basée sur une idée de M. Lusin; cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre* (1927), p. 276; cf. aussi mon livre cité, p. 180.

[4]) La notion de la séparabilité des ensembles est due à M. N. Lusin: voir *Fund. Math.* t. X, p. 51.

Soient, en effet, $E_1, E_2, E_3, \ldots$ et $H_1, H_2, H_3, \ldots$ deux suites infinies d'ensembles, telles que, pour m et n naturels, les ensembles E_m et H_n sont toujours séparables $B(F)$. Il existe donc pour tout système de deux indices (m, n) deux ensembles $M_{m,n}$ et $N_{m,n}$, tels que

(64) $M_{m,n} \in B(F)$, $N_{m,n} \in B(F)$, $M_{m,n} N_{m,n} = 0$, $E_m \subset M_{m,n}$ et $H_n \subset N_{m,n}$.

Posons:

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} M_{m,n}, \qquad N = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} M_{m,n}. \tag{65}$$

La famille F satisfaisant à la condition $R(F) \subset B(F)$, il résulte, d'après (64) et (65), du corollaire du théorème V et de la propriété 3° de la famille $\Phi = B(F)$ que $M \in B(F)$ et $N \in B(F)$. Or, de (63), (64) et (65) nous concluons sans peine que $E \subset M$, $H \subset N$ et $MN = 0$. On a donc les formules (62) et notre lemme est démontré.

Soient maintenant E et H deux ensembles satisfaisant aux formules (61). Il existe donc deux systèmes déterminants $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ et $\{H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formés d'ensembles de la famille F, tels que

$$E = N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\} \quad \text{et} \quad H = N\{H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}. \tag{66}$$

$r_1, r_2, \ldots, r_s$ étant un système fini donné quelconque d'indices, posons

$$E^{r_1, r_2, \ldots, r_s} = E_{r_1} E_{r_1, r_2} \ldots E_{r_1, r_2, \ldots, r_s} \sum_{n_1, n_2, \ldots} E_{r_1, r_2, \ldots, r_s, n_1} E_{r_1, r_2, \ldots, r_s, n_1, n_2} \ldots, \tag{67}$$

et

$$H^{r_1, r_2, \ldots, r_s} = H_{r_1} H_{r_1, r_2} \ldots H_{r_1, r_2, \ldots, r_s} \sum_{n_1, n_2, \ldots} H_{r_1, r_2, \ldots, r_s, n_1} E_{r_1, r_2, \ldots, r_s, n_1, n_2} \ldots \tag{68}$$

Des formules (66), (67) et (68) résulte tout de suite que

$$E = E^1 + E^2 + E^3 + \ldots, \quad H = H^1 + H^2 + H^3 + \ldots \tag{69}$$

et, pour toute suite finie d'indices $r_1, r_2, \ldots, r_s$:

$$E^{r_1, r_2, \ldots, r_s} = \sum_{n=1}^{\infty} E^{r_1, r_2, \ldots, r_s, n} \quad \text{et} \quad H^{r_1, r_2, \ldots, r_s} = \sum_{n=1}^{\infty} H^{r_1, r_2, \ldots, r_s, n}. \tag{70}$$

Admettons maintenant que les ensembles E et H ne sont pas séparables $B(F)$. D'après notre lemme et d'après (69) nous concluons qu'il existe deux indices k_1 et l_1, tels que les ensembles E^{k_1} H^{l_1} ne sont pas séparables $B(F)$.

D'après (70) nous avons

$$E^{k_1} = \sum_{n=1}^{\infty} E^{k_1, n} \quad \text{et} \quad H^{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} H^{l_1, n}$$

et nous concluons qu'il existe deux indices k_2 et l_2, tels que les ensembles E^{k_1, k_2} et H^{l_1, l_2} ne sont pas séparables $B(F)$. En raisonnant ainsi de suite, nous obtenons deux suites infinies d'indices $k_1, k_2, k_3, \ldots,$ et $l_1, l_2, l_3, \ldots,$ telles que, pour $s = 1, 2, 3, \ldots,$ les ensembles

$$E^{k_1, k_2, \ldots, k_s} \quad \text{et} \quad H^{l_1, l_2, \ldots, l_s} \tag{71}$$

ne sont pas séparables $B(F)$.

O, d'après (67) et (68):

$$E^{k_1, k_2, \ldots, k_s} \subset \prod_{n=1}^{s} E_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \quad \text{et} \quad H^{l_1, l_2, \ldots, l_s} \subset \prod_{n=1}^{s} H_{l_1, l_2, \ldots, l_n}. \tag{72}$$

Si l'on avait pour un indice s

$$\prod_{n=1}^{s} E_{k_1, k_2, \ldots, k_n} H_{l_1, l_2, \ldots, l_n} = 0,$$

les ensembles (71) seraient, d'après (72) (et la propriété 3° de la famille $\Phi = B(F)$) séparables $B(F)$, ce qui n'est pas le cas. On a donc

$$\prod_{n=1}^{s} E_{k_1, k_2, \ldots, k_n} H_{l_1, l_2, \ldots, l_n} \neq 0 \quad \text{pour } s = 1, 2, 3, \ldots \tag{73}$$

La famille F satisfaisant à la condition C, la formule (73) donne

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{k_1, k_2, \ldots, k_n} H_{l_1, l_2, \ldots, l_n} \neq 0,$$

ce qui est impossible d'après (66), puisque, d'après (61), on a $EH=0$.

L'hypothèse que les ensembles E et H ne sont pas séparables $B(F)$ entraîne donc une contradiction. Les ensembles E et H sont donc séparables $B(F)$, c'est-à-dire il existe deux ensembles M et N, tels qu'on a la formule (62).

Le théorème VI est ainsi démontré.

Corollaire. *Si F est une famille d'ensembles satisfaisant à la condition C et telle que $R(F) \subset B(F)$ et si E_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie d'ensembles, telle que*

(74) $E_n \in A(F)$ *pour* $n=1, 2, 3, \ldots$ *et* $E_m E_n = 0$ *pour* $m \neq n$,

il existe une suite infinie d'ensembles M_n $(n=1, 2, \ldots)$, telle que

(75) $M_n \in B(F)$, $E_n \subset M_n$ *pour* $n=1, 2, 3, \ldots$ *et* $M_m M_n = 0$ *pour* $m \neq n$.

Démonstration. Soient m et n deux nombres naturels différents. D'après (74) et d'après le théorème VI, il existe deux ensembles $M_{m,n}$ et $M_{n,m}$, tels que

(76) $$M_{m,n} \in B(F), \quad M_{n,m} \in B(F), \quad M_{m,n} M_{n,m} = 0$$

et

(77) $$E_m \subset M_{m,n}, \quad E_n \subset M_{n,m}.$$

On a donc les formules (76) et (77) pour tout système de deux nombres différents m et n.

Posons, pour tout k naturel:

(78) $$M_k = \prod_{n \neq k} M_{k,n},$$

où le produit $\prod\limits_{n \neq k}$ s'étend à tous les nombres naturels $n \neq k$. De (76) et de la propriété 3° de la famille $\Phi = B(F)$ résulte que $M_k \in B(F)$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$

D'après (77) et (78) nous trouvons $E_n \subset M_n$ pour $n=1, 2, \ldots$ et d'après (76) et (78) on a $M_m M_n = 0$ pour $m \neq n$ (puisque, d'après (78) on a, pour $m \neq n$: $M_m \subset M_{m,n}$ et $M_n \subset M_{n,m}$ et, d'après (76), $M_{m,n} M_{n,m} = 0$).

On a donc les formules (75) et notre corollaire est démontré.

Théorème VII. *Si F est une famille d'ensembles satisfaisant à la condition C et telle que $R(F) \subset B(F)$, on a*

$$U(F) \subset B(F).$$

Démonstration[1]. Soit $E \in U(F)$: il existe donc un système d'unicité $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé d'ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ de F tel que

(79) $$E = N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}.$$

Définissons les ensembles $E^{r_1, r_2, \ldots, r_s}$ par la formule (67): ce seront donc des ensembles de la famille $A(F)$.

Soit s un nombre naturel donné. $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ étant un système d'unicité, on a évidemment

$$E^{a_1, a_2, \ldots, a_s} E^{b_1, b_2, \ldots, b_s} = 0$$

si $a_1, a_2, \ldots, a_s$ et $b_1, b_2, \ldots, b_s$ sont deux suites différentes de s indices.

D'après le corollaire du théorème VI il existe donc un système déterminant $\{M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, tel que pour tout système $r_1, r_2, \ldots, r_s$ de s indices:

(80) $$M_{r_1, r_2, \ldots, r_s} \in B(F), \quad E^{r_1, r_2, \ldots, r_s} \subset M_{r_1, r_2, \ldots, r_s}$$

et

(81) $$M_{a_1, a_2, \ldots, a_s} M_{b_1, b_2, \ldots, b_s} = 0$$

si $a_1, a_2, \ldots, a_s$ et $b_1, b_2, \ldots, b_s$ sont deux suites différentes de s indices.

[1]) Ici aussi l'idée de la démonstration est due à M. Lusin. Cf. F. Hausdorff l. c., p. 277.

Posons, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

(82) $$S_n = \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_n} E_{r_1, r_2, \ldots, r_n} M_{r_1} M_{r_1, r_2} \ldots M_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$$

la sommation s'étendant à tout système de n nombres naturels $r_1, r_2, \ldots, r_n$. La famille $B(F)$ satisfaisant aux conditions 2° et 3°, on conclut de (80) que $S_n \epsilon B(F)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Je dis que

(83) $$E = S_1 S_2 S_3 \ldots$$

En effet, soit $p \epsilon E$. De (79) résulte qu'il existe une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, telle que $p \epsilon E_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, d'où, d'après (67), $p \epsilon E^{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, et, d'après (80) et (82): $p \epsilon S_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc $p \epsilon S_1 S_2 S_3 \ldots$

Soit d'autre part, $p \epsilon S_1 S_2 S_3 \ldots$ On a donc $p \epsilon S_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et, d'après (82), il existe pour tout indice n un système de n nombres naturels $m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_n^{(n)}$, tels que

(84) $$p \epsilon E_{m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_n^{(n)}}$$

et

(85) $$p \epsilon M_{m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)}} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $j > i$, il résulte de (85) que

$$p \epsilon M_{m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \ldots, m_i^{(i)}} \quad \text{et} \quad p \epsilon M_{m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \ldots, m_i^{(j)}},$$

d'où, d'après (81):

(86) $$m_k^{(i)} = m_k^{(j)} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, i; \quad i < j.$$

Posons

(87) $$m_i = m_i^{(i)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après (86) et (87) nous aurons

$$m_k^{(n)} = m_k \quad \text{pour} \quad k \leqslant n$$

et, d'après (84):

$$p \epsilon E_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où, d'après (79), $p \epsilon E$.

La formule (83) est ainsi établie.

De (80), (81), (82), (83) et des propriétés 1° 2° et 3° de la famille $\Phi = B(F)$ résulte que $E \epsilon B(F)$ et le théorème VII est démontré.

Des théorèmes VII et IV résulte tout de suite ce

Théorème VIII. (Théorème d'unicité de M. Lusin pour les ensembles abstraits): *Si F est une famille d'ensembles satisfaisant à la condition C et telle que $R(F) \subset B(F)$ et $F \subset U(F)$, on a:*

(88) $$U(F) = B(F).$$

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, appellons *boreliens relativement à F* les ensembles de la famille $B(F)$. Le théoréme VIII donne donc, pour les familles F satisfaisant à la condition C et aux inclusions $R(F) \subset B(F)$ et $F \subset U(F)$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit borelien relativement à F: cette condition est notamment que E soit noyau d'un système d'unicité, formé d'ensembles de la famille F.

Soit maintenant F une famille d'ensembles satisfaisant aux conditions du théorème VIII. D'après le théorème III, on a $UU(F) = U(F)$, ce qui donne, d'après (88): $U(B(F)) = B(F)$. On a ainsi ce

Théorème VIII^a. *Si F est une famille d'ensembles satisfaisant à la condition C et telle que $R(F) \subset B(F)$ et $F \subset U(F)$, on a*

$$U(B(F)) = B(F).$$

Donc, pour les familles F satisfaisant aux conditions du théorème VIII les noyaux des systèmes d'unicité formés d'ensembles de la famille $B(F)$ appartiennent encore à $B(F)$.

Nous allons maintenant à démontrer que les conditions des théorèmes VI et VII sont vérifiées lorsque F est la famille de tous les ensembles fermés d'un ensemble métrique compact.

Théorème IX: *Si F est la famille de tous les ensembles fermés d'un espace métrique compact*[1]*, on a la formule*

(88) $$R(F) \subset B(F).$$

[1] La condition de compacticité peut être ici remplacée par celle de séparabilité.

Lemme I: *Si F est la famille de tous les ensembles fermés d'un espace métrique, toute sphère ouverte de cet espace appartient à la famille $B(F)$.*

Démonstration. Soit $S = K(p_0, r)$ une sphère ouverte au centre p_0 et au rayon r (de l'espace métrique donné).

Soit

(89) $$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \qquad (\delta_n = (a_n, b_n))$$

une suite infinie d'intervalles fermés disjoints, situés à l'intérieur de l'intervalle $(0, r)$ et dense dans cet intervalle. Soit d_n l'intérieur de l'intervalle δ_n (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). L'ensemble H de tous les points p de la sphère fermée $\overline{S} = S + S'$, tels que

$$\varrho(p, p_0) \text{ non } \epsilon\, d_n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

(où $\varrho(p, p_0)$ désigne la distance du point p au point p_0) est évidemment fermé.

Soit a un nombre réel, tel que $0 < a \leqslant r$ et soit T l'ensemble de tous les points p de $\overline{S}$, tels que

$$\varrho(p, p_0) = a.$$

Je dis que l'ensemble $H - T$ est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints.

En effet, les intervalles (89) étant denses dans l'intervalle $(0, r)$, il existe, comme on voit sans peine, une suite infinie $g_1 < g_2 < g_3 < \ldots$ de points de $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$ et (si $a < r$) une suite infinie $h_1 > h_2 > h_3 > \ldots$ de points de $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$, telles que $\lim\limits_{n=\infty} g_n = \lim\limits_{n=\infty} h_n = a$. Posons encore $g_0 = 0$ et, si $a < r$, $h_0 = r$. Désignons, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, par P_n resp. Q_n l'ensemble de tous les points p de H, tels que

$$g_{n-1} \leqslant \varrho(p, p_0) < g_n, \quad \text{resp.} \quad h_n < \varrho(p, p_0) \leqslant h_{n-1}.$$

De $g_n \epsilon\, d_1 + d_2 + \ldots$ et $h_n \epsilon\, d_1 + d_2 + \ldots$ (pour $n = 1, 2, \ldots$) et de la définition de l'ensemble H résulte tout de suite que les ensembles P_n et Q_n sont fermés (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). Or, ils sont évidemment disjoints, et on a

$$H - T = \sum_{n=1}^{\infty} P_n + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$$

(resp. $H - T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, si $a = r$) L'ensemble $H - T$ est donc une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints, c. q. f. d.

Désignons par $T(c)$ l'ensemble de tous les points p de $\overline{S}$, tel que $\varrho(p, p_0) = c$, et désignons (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) par M_n l'ensemble de tous tes points de $\overline{S}$, tels que

$$\varrho(p, p_0) \,\epsilon\, \delta_n$$

— ce seront évidemment des ensembles fermés.

On a évidemment:

(90) $$S = (H - T(r)) \prod_{n=1}^{\infty} (H - T(a_n)) \prod_{n=1}^{\infty} (H - T(b_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Les ensembles $H - T(r)$, $H - T(a_n)$ et $H - T(b_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ appartenant, d'après ce que nous venons de démontrer, à la famille $B(F)$ (en tant que sommes d'infinités dénombrables d'ensembles disjoints de la famille F), ainsi que leur produit (d'après la propriété 3° de la famille $\Phi = B(F)$), la formule (90) prouve que S est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints de la famille $B(F)$: d'après la propriété 2° de la famille $\Phi = B(F)$, S appartient donc à $B(F)$ et notre lemme est démontré.

Lemme II. *Si F est la famille de tous les ensembles fermés d'un espace métrique, toute somme d'une infinité dénombrable de sphères ouvertes de cet espace appartient à la famille $B(F)$.*

Démonstration. Soit $S_1, S_2, S_3, \ldots$ une suite infinie de sphères ouvertes. Posons $P_1 = S_1$ et, pour $n > 1$, $P_n = S_n - (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1})$. On a évidemment:

(91) $$P_n = [\overline{S}_n - (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1})]\, S_n.$$

L'ensemble $\overline{S}_n - (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1})$ est évidemment fermé et, d'après le lemme I, $S_n \,\epsilon\, B(F)$. La formule (91) prouve donc, d'après la propriété 3° de la famille $\Phi = B(F)$ que $P_n \,\epsilon\, B(F)$. Or, on a évidemment

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$

et les ensembles P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont disjoints. D'après la propriété 2° de la famille $\Phi = B(F)$ on a donc

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots \in B(F)$$

et le lemme II est démontré.

Soient maintenant E_1 et E_2 deux ensembles fermés d'un espace métrique compact. L'ensemble $E = E_1 - E_2$ est donc compact et il existe une suite infinie de points de E, $p_1, p_2, \ldots$, dense dans E.

Soit $S_1, S_2, S_3, \ldots$ une suite infinie, formée de toutes les sphères ouvertes aux centres en points de la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$, et aux rayons rationnels et qui ne contiennent aucun point de E_2. Posons

$$U = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$$

Je dis que

$$E \subset U.$$

En effet, soit $p \in E$. L'ensemble E_2 étant fermé, et la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ étant dense dans E, il résulte de $p \in E = E_1 - E_2$ qu'il existe une sphère ouverte contenant p, dont le centre est un point de la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ et dont le rayon est rationnel et qui ne contient aucun point de E_2. Une telle sphère faisant partie de l'ensemble U, on a donc $p \in U$, c. q. f. d.

Or, de la définition de l'ensemble U résulte que $UE_2 = 0$.

Les formules $E \subset U$, $E = E_1 - E_2$ et $UE_2 = 0$ donnent tout de suite

$$E = UE = UE_1 - UE_2 = UE_1.$$

On a donc $E = UE_1$. Or on a $E_1 \in F \subset B(F)$ et de la définition de l'ensemble U et d'après le lemme II on a $U \in B(F)$. La formule $E = UE_1$ prouve donc, d'après la propriété 3° de la famille $\Phi = B(F)$, que $E \in B(F)$. La formule (88) est ainsi étsblie et le théorème IX est démontré.

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, désignons par $B^*(F)$ la plus petite famille Φ d'ensembles satisfaisant aux trois conditions suivantes: 1) $F \subset \Phi$, 2) $R(\Phi) \subset \Phi$ et 3) toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de Φ appartient à Φ.

Des théorèmes V et IX résulte tout de suite que *si F est la famille de tous les ensembles fermés d'un espace métrique compact* (*ou, plus généralement, séparable*), *on a la formule*

$$B(F) = B^*(F).$$

En particulier, pour l'espace linéare j'ai signalé ce théorème en 1925 [1])

La famille F de tous les ensembles fermés d'un espace métrique compact satisfait, comme on sait, à la condition C: d'après le théorème IX nous concluons donc qu'une telle famille vérifie les conditions des théorèmes VI et VII.

[1]) Dans mon livre *Funkcje przedstawialne analitycznie* (en polonais) Lwów 1925, p. 51.