Über stetige Abbildungen der euklidischen Räume.

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es seien A und B zwei metrische Räume. Die Gesamtheit aller stetigen Abbildungen von A in B wird mit B^A bezeichnet. Falls mindestens einer von den Räumen A und B kompakt ist werden wir B^A als metrischen Raum auffasen und zwar, den Elementen f und φ von B^A den Abstand $\varrho(f, \varphi) = \operatorname{Sup}_{x \in A} \varrho(f(x), \varphi(x))$ zuschreiben.

Ist ε eine positive Zahl, so wird $f \in B^A$ eine *ε-Abbildung* genannt, wenn für jeden Punkt $y \in f(A)$ die Urbildmenge $f^{-1}(y)$ von y einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat[1]). Gibt es ferner ein $\eta > 0$ derart, dass für jede Menge $C \subset f(A)$ mit dem Durchmesser $< \eta$ die Urbildmenge $f^{-1}(C)$ einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat, so wird f eine *ε-Abbildung in dem engeren Sinne* genannt.

In der vorliegenden Arbeit soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz. *Ist $f \in R_n^{R_n}$[2]) eine ε-Abbildung, so ist die Bildmenge $f(R_n)$ ein Teilgebiet von R_n, dessen $(n-1)$-dimensionale Bettische Zahl*[3])

[1]) Vgl. P. Alexandroff, Annals of Math. 30 (1928), S. 103, wo übrigens anstatt der Ungleichung $\delta[f^{-1}(y)] < \varepsilon$ die Ungleichung $\delta[f^{-1}(y)] \leqslant 2\varepsilon$ vorausgesetzt ist.

[2]) R_n bezeichnet hier, wie üblich, den euklidischen n-dimensionalen Raum. Dabei werden wir jeden Punkt $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ von R_n als mit dem Punkte $(x_1 x_2 \ldots x_n 0)$ von R_{n+1} identischen auffassen. Hieraus ergibt sich auch die Inklusion $R_n \subset R_{n+1}$. Den Koordinatenanfang $(0\,0 \ldots 0)$ von R_n werden wir einfach mit 0 bezeichnen.

[3]) Wegen der Definition von Bettischen Zahlen siehe z. B. das Buch von P. Alexandroff. Einfachste Grundbegriffe der Topologie (Berlin, Springer, 1932), S. 22.

verschwindet[4]). *Ist f eine ε-Abbildung im engeren Sinne, so ist $f(R_n) = R_n$.*

1. Ordnen wir jedem nichtverschwindenden Vektor V im Raume R_n seinen Anfangspunkt $\alpha(V)$, seine Lange $\beta(V)$ und den Endpunkt $\gamma(V)$ des zu V parallelen Einheitsvektors $\overrightarrow{O\gamma(V)}$ zu. Es ist leicht zu bemerken, dass die auf diese Weise definierten Funktionen α, β und γ einen Homöomorphismus zwischen dem Raume der nichtverschwindenden Vektoren in R_n[5]) und dem Produkte[6]) dreier Räume: des R_n, der Menge der positiven Zahlen und der $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Sphäre[7]) $S_{n-1}^{(0)}$ vom Radius $r = 1$ und dem Mittelpunkte O bestimmen.

2. Es sei Q_n eine n-dimensionale euklidische Vollkugel im R_n und a ein innerer Punkt von Q_n, welcher um ε von der Oberfläche S_{n-1} dieser Vollkugel entfernt ist. Es sei ferner f eine ε-Abbildung von Q_n in R_n. Aus der Definition der ε-Abbildung ergibt sich dann, dass $f(a) \,\bar{\epsilon}\, f(S_{n-1})$ gilt. Somit ist der Vektor $V(x) = \overrightarrow{f(a) f(x)}$ als Funktion des Punktes x betrachtet, eine stetige und in der Menge S_{n-1} nicht verschwindende Verktorfunktion. Es gilt nun folgender:

[4]) Ohne Gebrauch von kombinatorischen Begriffen lässt sich diese letzte Eigenschaft des Gebietes $f(R_n)$ folgendermassen formulieren: *Die Menge* $(R_n - f(R_n)) + (p_\infty)$, wo p_∞ den unendlich fernen Punkt von R_n bezeichnet, *ist ein Kontinuum.* Es ist zu bemerken, dass in unserem Beweise die kombinatorischen Mittel nur bei Herstellung der Äquivalenz zwischen der obigen elementaren Eigenschaft des Gebietes $f(R_n)$ und dem Verschwinden seiner $(n-1)$-dimensionalen Bettischen Zahl hervortreten. Sonst ist unser ganze Beweis elementar.

[5]) Die Gesamtheit der Vektoren in R_n werden wir als einen topologischen Raum auffassen, und zwar für Umgebung von $V = \overrightarrow{ab}$ die Gesamtheit aller Vektoren $\overrightarrow{xy}$ erklären, wo x irgendeine Umgebung von a in R_n und y irgendeine Umgebung von b in R_n durchläuft.

[6]) Das Produkt der metrischen Räume $A_1, A_2, \ldots A_k$ heisst der Raum, der als Elemente alle n-Tupeln $(x_1 x_2 \ldots x_k)$ hat, wo $x_i \in A_i$ für $i = 1, 2, \ldots h$ gilt, und der durch die Formel $\varrho\left|(x_1 x_2 \ldots x_k), (y_1 y_2 \ldots y_k)\right| = \sqrt{\sum_{l=1}^{k} (\varrho(x_i, y_i))^2}$ metrisiert ist.

[7]) $(n-1)$-dimensionale euklidische Sphäre $=$ die Oberfläche einer geometrischen Vollkugel im R_n.

Hilfssatz. *Unter den obigen Voraussetzungen bildet die stetige Funktion $\varphi(x) = \gamma\, V(x)$ die Sphäre S_{n-1} in die Sphäre $S_{n-1}^{(0)}$ wesentlich*[8]) *ab.*

Beweis. Wir bezeichnen mit x^*, wo x ein beliebiger Punkt von S_{n-1} ist, den zu x *antipodischen*, d. h. symmetrisch zu x rel. zum Mittelpunkte von S_{n-1} gelegenen Punkt. Aus $\varrho(a, S_{n-1}) = \varepsilon$ folgt dann. dass die Entfernung zwischen irgendeinem Punkte $x \in S_{n-1}$ und der Strecke $\overline{a\,x^*}$ mindestens gleich ε ist. Da aber f eine ε-Abbildung ist, folgt hieraus

(1) $\qquad f(x)\,\bar{\epsilon}\,f(\overline{a\,x^*}) \qquad$ für jedes $x \in S_{n-1}$.

Wir setzen nun für jedes $x \in S_{n-1}$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$V_t(x) = \overrightarrow{f(a_t(x))\,f(x)},$$

wo $a_t(x)$ den Punkt, welcher die Strecke $\overline{a\,x^*}$ im Verhältnisse $t : 1 - t$ teilt bezeichnet. Nach (1) ist der Vektor $V_t(x)$ eine stetige, nicht verschwindende Funktion beider Variablen x und t, woraus sich ergibt, dass die Abbildungen $\gamma\, V_t$ eine einparametrige stetige Funktionenschar im Raume $S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ bilden. Da $\gamma\, V_0 = \gamma\, V = \varphi$ gilt, folgt hieraus

(2) φ und $\gamma\, V_1$ gehören einer und derselben Komponente von $S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ an.

Da die Funktion $V_1(x) = \overrightarrow{f(a_1(x))\,f(x)} = \overrightarrow{f(x^*)\,f(x)}$ nicht verschwindet, so nimmt die stetige Funktion $\beta\, V_1(x)$ nur positive Werte auf S_{n-1} an. Hieraus ergibt sich, dass eine stetige reelle Funktion $\lambda(x)$ existiert, sodass

(3) $\lambda(x)$ ist eine Erweiterung von $\beta\, V_1(x)$ auf Q_n rel. zur Menge der positiven Zahlen[9]).

[8]) Eine Abbildung $f \in S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ heisst, nach H. Hopf, *wesentlich*, wenn für jede Abbildung $\varphi \in S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$, welche mit f zu einer und derselber Komponente von $S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ gehört die Beziehung $\varphi(S_{n-1}) = S_{n-1}$) gilt.

[9]) d. h. $\lambda(x)$ ist eine stetige Funktion mit den positiven Werten, welche in der Menge Q_n definiert ist und die Bedingung $\lambda(x) = \beta\, V_1(x)$ für jedes $x \in S_{n-1}$ erfüllt. Da die Menge sämtlicher positiven Zahlen mit der Menge sämtlicher reellen Zahlen homöomorph ist, so ist die Existenz einer derartigen Funktion λ eine unmittelbare Folgerung des allgemeinen Satzes über die Erweiterung der reellen Funktionen. Siehe z. B. F. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin u. Leipzig, de Gruyter, 1927), S. 248.

Man nehme nun an, dass die Behauptung unseres Hilfssatzes falsch sei, d. h. $\varphi \in S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ eine unwensentliche Abbildung sei. Nach (2), wäre dann die Abbildung $\varphi_1 \in S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ ebenfalls unwesentlich, es existierte also[10]) eine Erweiterung ψ von φ_1 auf Q_n rel. zu $S_{n-1}^{(0)}$. Es sei nun S_n die n-dimensionale euklidische Sphäre in R_{n+1}, welche mit S_{n-1} konzentrisch ist und die Bedingung $S_n \cdot R_n = S_{n-1}$ erfüllt. S_{n-1} zerschneidet dann die Sphäre S_n in zwei halbsphärische Gebiete Γ_1 und Γ_2 von der Eigenschaft, dass für jeden Punkt $x \in \Gamma_1$ der antipodische Punkt x^* in Γ_2 liegt. Wir bezeichnen ferner mit $g(x)$ die orthogonale Projektion des Punktes $x \in S_n$ auf R_n. Es ist klar, dass durch g die Sphäre S_n stetig auf Q_n abgebildet ist, wobei sämtliche Punkte von S_{n-1} invariant bleiben.

Wir betrachten nun die Funktion $\Phi(x)$, welche in der Sphäre S_n folgendermassen definiert ist:

(4) $\quad \Phi(x) = f\,g(x)$ für jedes $x \in \Gamma_1 + S_{n-1}$,
$\quad\;\;\; \Phi(x) =$ Endpunkt des Vektors $V'(x)$ für jedes $x \in \Gamma_2$,

wo der, in R_n liegende Vektor $V'(x)$ durch folgende Formeln gegeben ist:

(5) $\quad \alpha\, V'(x) = f\,g(x^*), \quad \beta\, V'(x) = \lambda\, g(x), \quad \gamma\, V'(x) = \psi\, g(x).$

Aus den Formeln (4) ergibt sich, dass die Werte der Funktion Φ Punkte von R_n sind, wobei sie offenbar in der Menge $\Gamma_1 + \Gamma_2$ stetig ist. Um ihre Stetigkeit in der ganzen Menge S_n zu beweisen, bleibt es nur zu zeigen, dass der Punkt $f\,g(x)$ für jedes $x \in S_{n-1}$ den Endpunkt des durch die Formeln (5) definierten Vektors $V'(x)$ bildet. In der Tat, ist $x \in S_{n-1}$, so gilt $g(x) = x$ und $g(x^*) = x^* \in S_{n-1}$, woraus $\alpha\, V'(x) = f\,g(x^*) = f(x^*)$, $\beta\, V'(x) = \lambda\, g(x) = \beta\, V_1(x)$ und $\gamma\, V'(x) = \psi\, g(x) = \varphi_1(x) = \gamma\, V_1(x)$ folgt, d. h. der Vektor $V'(x)$ mit dem Vektor $V_1(x) = \overrightarrow{f(x^*)\,f(x)}$ und insbesondere sein Endpunkt mit $f(x) = f\,g(x)$ identisch ist.

Es ist lso $\Phi \in R_n^{S_n}$, wobei nach (1) und (4), $\Phi(x) \neq \Phi(x^*)$ für jedes $x \in S_n$ gilt. Da aber die Gleichung $\Phi(x) = \Phi(x^*)$ mindestens eine Wurzel in S_n hat[11]), so gibt es einen Punkt $x_0 \in \Gamma_1$, für welchen $\Phi(x_0) = \Phi(x_0^*)$ ist. Das bedeutet, mit Rücksicht auf (4),

[10]) Siehe z. B. Fund. Math. dieser Band S. 36.
[11]) K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), S. 178, Satz 11.

dass der Endpunkt des Vektors $V'(x_0)$ mit dem Punkte $fg(x_0)$ übereinstimmt. Hieraus und aus den Formeln (5) ergibt sich, dass der Vektor $V'(x_0)$ verschwindet. d. h. $\lambda g(x_0)=0$ ist, was der Definition (3) der Funktion λ widerspricht. Hiermit ist der Beweis unseres Hilfssatzes vollendet

3. ***Hilfssatz.*** *Ist $f \epsilon R_n^{R_n}$ eine ε Abbildung (bzw. eine ε-Abbildung im engeren Sinne), so gibt es für jedes $x_0 \epsilon R_n$ eine Zahl $\varkappa(x_0)>0$ (bzw. $\varkappa(x_0)>\eta$, wo η eine von x_0 unabhängige positive Zahl ist) derart, dass folgendes gilt:*

(6) *Ist $y \epsilon R_n$ und $\varrho(f(x_0),y)<\varkappa(x_0)$, so gibt es ein $x \epsilon R_n$ für welches $\varrho(x_0,x)<\varepsilon$ und $y=f(x)$ gilt.*

Beweis. Es bezeichne Q_n die Vollkugel im Raume R_n mit dem Mittelpunkte x_0 und der Radiuslänge ε und S_{n-1} die Oberfläche von Q_n. Da f eine ε-Abbildung ist, gehört $f(x_0)$ der Menge $f(S_{n-1})$ nicht an, d. h, die Zahl

$$\varkappa(x_0)=\varrho(f(x_0),f(S_{n-1})) \tag{7}$$

ist positiv. Die untere Schranke von $\varkappa(x)$, wo x den Raum R_n durchläuft, kann im allgemeinen gleich Null sein, im Falle aber wo f eine ε-Abbildung im engeren Sinne ist, gibt es ein $\eta>0$ derart, dass für jede $x,x' \epsilon R_n$ die Ungleichung $\varrho(f(x),f(x'))<\eta$ die Ungleichung $\varrho(x,x')<\varepsilon$ zur Folge hat; woraus und aus der Beziehung $\varrho(x_0,S_{n-1})=\varepsilon$ sich ergibt, dass in dierem Falle die durch die Formel (7) definierte Zahl $\varkappa(x_0)$ für jedes $x_0 \epsilon R_n$ grösser als η ist.

Um unseren Beweis zu vollenden, bleibt es nur übrig zu zeigen, dass die Zahl $\varkappa(x_0)$ die Bedingung (6) erfüllt. Zu diesem Zweck setzen wir — wie in der letzten Nr. — $V(p)=\overrightarrow{f(x_0)f(p)}$ und $\varphi(p)=\gamma V(p)$ für jedes $p \epsilon S_{n-1}$. Nach dem letzten Hilfssatze gilt dann:

(8) Die Abbildung $\varphi \epsilon S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ ist wesentlich.

Es sei nun y ein beliebiger Punkt von R_n, für welchen $\varrho(f(x_0),y)<\varkappa(x_0)$ gilt. Wir setzen für jedes $p \epsilon S_{n-1}$ und $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$V_t(p)=\overrightarrow{y_t f(p)},$$

wo y_t den Punkt bezeichnet, welcher die Strecke $\overline{f(x_0)\,y}$ im Verhältnisse $t:1-t$ teilt. Der Vektor $V_t(p)$ ist eine stetige Funktion

beider Variablen p und t, welche wegen (7) niemals den Wert Null annimmt. Hieraus folgt, dass die Funktionen γV_t eine stetige einparametrige Schar im Raume $S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ bilden, wobei $\gamma V_0=\varphi$ gilt. Mit Rücksicht auf (8) folgt daraus:

(9) Die Abbildung $\gamma V_1 \epsilon S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$, wo $V_1(p)=\overrightarrow{y\,f(p)}$, ist wesentlich.

Man nehme nun an, der Beziehung (6) zuwider, dass

$$y \,\overline{\epsilon}\, f(Q_n) \tag{10}$$

gelte. Es bezeichne p_t, für jedes $p \epsilon S_{n-1}$ und $0\leqslant t\leqslant 1$, den Punkt, welcher die Strecke $\overline{p\,x_0}$ im Verhältnisse $t:1-t$ teilt. Auf Grund von (10) bilden dann die Vektoren $V^{(t)}(p)=\overrightarrow{y\,f(p_t)}$ eine stetige einparametrige Schar der stetigen, in S_{n-1} definierten und nichtverschwindender Vektorfunktionen. Hieraus folgt, dass die Funktionen $\gamma V^{(t)}$ eine stetige Schar im Raume $S_{n-1}^{(0)\,S_{n-1}}$ bilden, durch welche Schar die Abbildung $\gamma V^{(0)}=\gamma V_1$ mit der Abbildung $\gamma V^{(1)}==\gamma(\overrightarrow{y\,f(x_0)})=\text{const.}$ verbunden ist. Das bedeutet, dass durch γV_1 die Sphäre S_{n-1} in die Sphäre $S_{n-1}^{(0)}$ unwesentlich abgebildet ist, was der Beziehung (9) widerspricht. Somit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung. Indem wir berücksichtigen, dass in dem Beweise der Tatsache, dass die durch (7) definierte Zahl $\varkappa(x_0)$ die Bedingung (6) erfüllt, nur die Voraussetzung dass f eine *ε-Abbildung der Kugel Q_n in R_n* ist eine wesentliche Rolle gespielt hatte, so sind wir zur folgender Behauptung berechtigt:

Sind A und B zwei Teilmengen von R_n, wobei $\underset{x \epsilon R_n}{E}[\varrho(x,A)\leqslant\varepsilon]\subset B$ [12]*) gilt und ist $f \epsilon R_n^B$ eine ε-Abbildung, so bildet $f(B)$ eine Umgebung von $f(A)$.*

4. ***Hilfssatz.*** *Ist $f \epsilon R_n^{R_n}$ eine ε-Abbildung, so ist die Urbildmenge jeder in sich kompakten Teilmenge von $f(R_n)$ in sich kompakt.*

Beweis. Es sei K eine in sich kompakte Teilmenge von $f(R_n)$. Da f stetig ist, ist die Urbildmenge $f^{-1}(K)$ von K eine abgeschlos-

[12]) $\underset{x \epsilon R_n}{E}[\;]$ bedeutet die aus allen Punkten x von der Eigenschaft $[\;]$ bestehende Teilmenge von R_n.

sene Teilmenge von R_n[13]). Es bleibt also, um unseren Beweis durchzuführen, nur zu zeigen, dass die Menge $f^{-1}(K)$ beschränkt ist. Im anderen Falle existierte in $f^{-1}(K)$ eine Punktfolge $\{a_k\}$, welche in R_n keinen Häufungspunkt besässe. Da K kompakt ist, können wir dabei annehmen, dass die Folge $\{f(a_n)\}$ konvergent ist d. h, dass es einen Punkt $a \in f^{-1}(K)$ gibt, für welchen $f(a) = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k)$ gilt. Daraus aber und aus dem Hilfssatze 3 folgt, dass fast alle Punkte a_k einen Abstand $< 2\varepsilon$ von a haben, was der Definition der Folge $\{a_k\}$ widerspricht.

5. Jetzt sind wir im Besitze aller Hilfsmittel, die uns gestatten unseren Satz in wenigen Worten zu beweisen. Ist $f \in R_n^{R_n}$ eine ε-Abbildung, so folgt aus dem Hilfssatz 3, dass, zusammen mit irgendeinem Punkte, eine Umgebung dieses Punktes zu der Bildmenge $f(R_n)$ gehört. d. h. die Menge $f(R_n)$ offen ist. Als stetiges Bild von R_n ist ferner die Menge $f(R_n)$ zusammenhängend, also ein Gebiet. Im Falle, wo f eine ε-Abbildung in dem engeren Sinne ist, folgt aus dem Hilfssatze 3 die Existenz einer Zahl $\eta > 0$ von der Art, dass für je zwei Punkte $x \in f(R_n)$ und $x' \in R_n - f(R_n)$ die Bedingung $\varrho(x, x') \geqslant \eta$ erfüllt ist. Daraus und da R_n zusammenhängend und $f(R_n) \neq 0$ ist ergibt sich die Gleichung $f(R_n) = R_n$.

Es bleibt übrig zu beweisen, dass die $(n-1)$-dimensionale Bettische Zahl des Gebietes $f(R_n)$ verschwindet. Da diese Behauptung für $n = 1$ mit dem Zusammenhange von $f(R_n)$ gleichbedeutend also erfüllt ist, können wir uns auf den Fall $n \geqslant 2$ beschränken. Auf Grund des Alexanderschen Dualitätssatzes[14]), das Verschwinden der $(n-1)$- dimensionalen Bettischen Zahl von $f(R_n)$ ist mit dem Zusammenhange der in sich kompakten Menge $(R_n - f(R_n)) + (p_\infty)$, wo p_∞ den unendlich fernen Punkt von R_n bezeichnet, gleichbedeutend[15]).

Man nehme an, dass unser Satz falsch sei, d. h dass die Menge $(R_n - f(R_n)) + (p_\infty)$ in zwei abgeschlossene, nicht leere punktfremde Teilmengen A und B zerlegbar ist. Wir können annehmen, dass

[13]) Siehe z. B. das zitierte Buch von F. Hausdorff, S. 194.

[14]) J. W. Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), S. 333—349 wo der Dualitätssatz für die Polyeder bewiesen ist. Der Beweis im allgemeinen Falle der beliebigen abgeschlossenen Mengen wurde von Alexandroff, Frankl und Lefschetz geliefert. Siehe P. Alexandroff, Gött. Nachr. 25 (1927); F. Frankl, Wien. Ber. (1927), S. 689; S. Lefschetz, Ann. of Math. (2) 29 (1928), S. 232.

[15]) Vgl. die Anmerkung [4]).

$p_\infty \in B$ gilt. Es gibt dann ein $\delta > 0$ so klein, dass jeder Punkt der Menge $R_n - f(R_n) - A$ einen von δ grösseren Abstand von A hat. Wir setzen nun:

$$C = \underset{x \in R_n}{E}\, [\varrho(x, A) = \delta]\ ^{12})$$

C ist dann eine in sich kompakte Teilmenge des Gebietes $f(R_n)$, welche dieses Gebiet zwischen jedem hinreichend nahe von A liegendem Punkte $p \in f(R_n)$ und jedem Punkte $q \in f(R_n)$, welcher entweder hinreichend nahe von der Menge $R_n - f(R_n) - A$ oder hinreichend fern von dem Koordinatenanfang O liegt zerschneidet. Es ist leicht zu bemerken, dass für jede in sich kompakte Teilmenge K von $f(R_n)$ derarttge Punkte p und q in der Menge $f(R_n) - K$ gewählt worden können.

Auf Grund des Hilfssatzes 4 ist die Urbildmenge $f^{-1}(C)$ von C eine in sich kompakte Teilmenge von R_n. Daraus und da $n \geqslant 2$ vorausgesetzt war, ergibt sich, dass die Menge $R_n - f^{-1}(C)$ genau eine unbeschränkte Komponente Γ enthält. Die Menge $R_n - \Gamma$ ist dann eine in sich kompakte Obermenge von $f^{-1}(C)$. Hieraus ergibt sich, dass die Menge $K = f(R_n - \Gamma) \subset f(R_n)$ eine in sich kompakte Obermenge von C ist.

Nach der vorigen Bemerkung, gibt es in der Mange $f(R_n) - K$ zwei Punkte p und q derart, dass C das Gebiet $f(R_n)$ zwischen ihnen zerschneidet. Es sei $p = f(a)$ und $q = f(b)$. Die Punkte a und b liegen dann im Gebiete Γ, also lassen sich im Γ durch einen einfachen Bogen L verbinden. Die Menge $f(L)$ ist dann ein Kontinuum, welches p und q in $f(R_n)$ verbindet und welches auf Grund der Inklusion $L \subset \Gamma \subset R_n - f^{-1}(C)$ mit C punktfremd ist. Das aber der Voraussetzung, dass C die Menge $f(R_n)$ zwischen p und q zerschneidet widerspricht. Hiermit ist unser Beweis vollendet.

6. **Korollar.** *Für $n = 1, 2$ ist die Bildmenge einer ε-Abbildung $f \in R_n^{R_n}$ mit dem Raume R_n homöomorph.*

Die Frage nach der Richtigkeit dieser letzten Behauptung für höhere Dimensionen bleibt unentschieden.

Wiązowszczyzna, den 16. September 1933.