que $\xi_{k_n} = \xi_{k_{n'}}$ pour tout $n > n'$. Par conséquent $x_{k_n} \epsilon D_{\xi_{k_{n'}}}$ pour $n > n'$, donc $x_0 \epsilon (D_{\xi_{k_{n'}}})'$, d'où :

$$f(x_{k_n}) = \varrho^2(x_{k_n}, (D_{\xi_{k_{n'}}})') \leqslant (x_{k_n} - x_0)^2 \quad \text{pour} \quad n \geqslant n'.$$

On a donc

$$f(x_n) \leqslant (x_n - x_0)^2 \quad \text{pour} \quad n \geqslant k_{n'}.$$

2°. Supposons $x_0 \epsilon D_\xi - D_{\xi+1}$ (où $0 \leqslant \xi < \gamma$), donc $x_0 \bar{\epsilon} (D_\xi)'$. Par conséquent il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \epsilon D$ les inégalités: $0 < |x - x_0| < \delta$ entraînent: $x \epsilon D_\zeta - D_{\zeta-1}$, où ζ est un nombre ordinal $< \xi$, d'où (en vertu des inclusions: $D_\xi \subset D_{\zeta+1} \subset (D_\zeta)'$):

$$\varrho(x, (D_\zeta)') \leqslant |x - x_0|,$$

donc

$$f(x) \leqslant (x - x_0)^2.$$

La proposition (*) se trouve ainsi démontrée.

Elle entraîne la relation (0) pour tout x réel et la continuité de la fonction $f(x)$ pour tout $x \bar{\epsilon} D$.

Józefów, 18. VIII. 1933.

Sur certains invariants de l'opération (A).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

1. Je démontre dans la note présente certains théorèmes concernant l'opération (A) et appartenant à la Théorie générale des Ensembles [1]). Du théorème 1, ainsi que du corollaire 3, résultent, comme des cas particuliers, les théorèmes connus sur l'invariance de la mesurabilité (L) [2]) et de la propriété de Baire [3]) par rapport à l'opération (A).

2. $\mathbf{K}$ étant une classe arbitraire d'ensembles, je désigne par $\mathbf{N}(\mathbf{K})$ la classe des ensembles dont tous les sous-ensembles appartiennent à $\mathbf{K}$. $\mathbf{K}$ étant une classe fixe (durant un certain raisonnement), la classe $\mathbf{N}(\mathbf{K})$ sera désignée tout court par $\mathbf{N}$.

Soient: R un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions et P un espace métrique. Désignons par $\mathbf{M}$ la classe des sous-ensembles mesurables (L) de R et par $\mathbf{B}$ la classe des sous-ensembles de P qui jouissent de la propriété de Baire (au sens large) [4]). Il est évident que

[1]) J'ai signalé le théorème 1 dans ma communication *O mierzalności i warunku Baire'a*, faite au I[er] Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves (cf. C. R. de ce Congrès, Varsovie 1930, p. 300) et le théorème 2 dans la séance de la Soc. Pol. de Mathématique, section de Varsovie, le 5. V. 1933.

[2]) démontré par MM. Lusin et Sierpiński: *Sur quelques propriétés des ensembles* (A). Bull. Acad. Cracovie 1918. p. 35.

[3]) démontré par M. O. Nikodym: *Sur une propriété de l'opération* (A), Fund. Math. **7** (1925), p. 49. Cf. p. ex. C. Kuratowski: *Topologie* I, Monografje Matematyczne **3**. Warszawa 1933, p. 56.

[4]) Un sous-ensemble E de l'espace P jouit de la propriété de Baire (au sens large) lorsqu'il existe un ensemble ouvert G et deux ensembles K_1 et K_2 de première catégorie (dans P), tels que $E = G - K_1 + K_2$. Cf. p. ex. Kuratowski l. c., p. 49.

(i) *tout sous-ensemble de R, de mesure nulle, appartient à* $\mathbf{N}(\mathbf{M})$;
(ii) *tout sous-ensemble de P, de première catégorie, appartient à* $\mathbf{N}(\mathbf{B})$.

[Remarquons incidemment qu'en supposant l'espace P séparable, complet et dense en soi, l'inversion de (ii) est aussi vraie. Cela résulte du fait qu'un tel espace peut être décomposé en deux ensembles totalement imparfaits[1]). p étant un point isolé de P, l'ensemble (p) est un ensemble de deuxième catégorie, appartenant à $\mathbf{N}(\mathbf{B})$. Par conséquent la densité en soi de l'espace P est une condition nécessaire pour que $\mathbf{N}(\mathbf{B})$ coïncide avec la classe des ensembles de première catégorie dans P. La question reste ouverte si cela est une condition suffissante.

L'inversion de la proposition (i) est vraie et bien connue[2]); d'ailleurs elle résulte aussi du théorème cité sur la décomposition de l'espace en deux ensembles totalement imparfaits.]

I.

3. Considérons une classe $\mathbf{K}$ d'ensembles contenus dans un espace arbitraire 1. Supposons les conditions suivantes satisfaites:

1° *Si* $K_n \in \mathbf{K}$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$, *on a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathbf{K}$.

2° *Si* $K \in \mathbf{K}$, *on a* $1 - K \in \mathbf{K}$.

3° *Chaque ensemble* $E \subset 1$ *est contenu dans un ensemble* $K \in \mathbf{K}$ *tel que la condition* $E \subset M \in \mathbf{K}$ *entraîne*: $K - M \in \mathbf{N}(\mathbf{K})$.

La classe des sous-ensembles *mesurables* (L) d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions satisfait évidemment aux conditions 1° et 2°. Elle remplit aussi la condition 3°: cela résulte du fait que *chaque ensemble E est contenu dans un ensemble H qui est un G_δ tel que* $mes_e E = mes\, H$ et de la proposition (i).

La classe des ensembles (sous-ensembles d'un espace métrique) *possédant la propriété de Baire* (au sens large) satisfait de même aux conditions 1°, 2°, et 3°. La condition 3° résulte de la proposition (ii) et du théorème suivant: *Chaque ensemble E est contenu dans un ensemble K qui est un F_σ tel que B étant un ensemble jouissant de la propriété de Baire et contenant E, la différence $K - B$ est de première catégorie*[3]).

4. ***Théorème 1.*** *Chaque classe $\mathbf{K}$ satisfaisant aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *est un invariant de l'opération* (A).

[1]) Cf. p. ex. H. Hahn: *Reelle Funktionen. I. Punktfunktionen*, Leipzig 1932, p. 140.

[2]) Cf. p. ex. C. Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1927, p. 354.

[3]) Voir ma communication citée, p. 299. Cf. aussi Kuratowski l. c., p. 53.

Démonstration[1]) Soit

$$E = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{1}$$

(la sommation s'étendant sur toutes suites infinies $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels), les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ appartenant à $\mathbf{K}$.

Il résulte de 1° et 2° que le produit d'une suite d'ensembles appartenant à $\mathbf{K}$ appartient à $\mathbf{K}$. Par conséquent, en remplaçant au besoin $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ par $E_{n_1} \cdot E_{n_1, n_2} \cdot \ldots \cdot E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, on peut supposer que

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{2}$$

pour tout système d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Posons pour tout système $m_1, m_2, \ldots, m_l$ (aussi pour „le système vide"):

$$Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1, m_2, \ldots, m_l, n_1, n_2, \ldots, n_k}. \tag{3}$$

(On a donc $Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l} = E$ pour $l = 0$).

En vertu de (2) on a toujours:

$$Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{4}$$

et (même pour $l = 0$):

$$Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l, n} \tag{5}$$

Il résulte de 3° qu'il existe un ensemble K tel que

$$K \in \mathbf{K} \tag{6}$$

$$K \supset E \tag{7}$$

$$\text{si} \quad M \in \mathbf{K} \quad \text{et} \quad M \supset E, \quad \text{on a} \quad K - M \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

Tous les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ appartenant à $\mathbf{K}$, il existe pour tout système non vide d'indices un ensemble $K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ tel que

$$K_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in \mathbf{K} \tag{6a}$$

[1]) La démonstration n'est qu'une transposition de la démonstration citée de MM. Lusin et Sierpiński.

(7a) $$E_{n_1,n_2,\dots,n_k} \supset K_{n_1,n_2,\dots,n_k} \supset Z_{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

(8a) si $M \in \mathbf{K}$ et $M \supset Z_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, on a $K_{n_1,n_2,\dots,n_k} - M \in \mathbf{N}$.

D'après (7a), (5), (6a) et 1⁰, on a

$$Z_{n_1,n_2,\dots,n_k} \subset \sum_{m=1}^{\infty} K_{n_1,n_2,\dots,n_k,m} \in \mathbf{K},$$

donc

$$K_{n_1,n_2,\dots,n_k} - Z_{n_1,n_2,\dots,n_k} \supset K_{n_1,n_2,\dots,n_k} - \sum_{m=1}^{\infty} K_{n_1,n_2,\dots,n_k,m}$$

et d'après (8a):

(9) $$K_{n_1,n_2,\dots,n_k} - \sum_{m=1}^{\infty} K_{n_1,n_2,\dots,n_k,m} \in \mathbf{N}.$$

Il résulte de (6), (7) et (8) que cette rélation est vraie aussi pour $k=0$.

En tenant compte de l'inclusion:

$$K - \sum_{n_1,n_2,\dots} \prod_{k=1}^{\infty} K_{n_1,n_2,\dots,n_k} \subset \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k} \left(K_{n_1,n_2,\dots,n_k} - \sum_{l=1}^{\infty} K_{n_1,n_2,\dots,n_k,l} \right)$$ [1])

(la sommation $\sum\limits_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ s'étendant à tous les systèmes finis d'indices, le système vide y inclu) et de la relation (9), nous obtenons: $K - E \in \mathbf{N}$. En vertu de (6), on a donc

$$E = K - (K - E) \in \mathbf{K}$$ c. q. f. d.

II.

5. Soit $\{E_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$ un système déterminant d'ensembles et E son noyau:

$$E = \sum_{n_1,n_2,\dots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1,n_2,\dots,n_k}.$$

Posons, d'après M. Sierpiński,

$$E^0_{n_1,n_2,\dots,n_k} = E_{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

$$E^{\alpha+1}_{n_1,n_2,\dots,n_k} = E^{\alpha}_{n_1,n_2,\dots,n_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} E^{\alpha}_{n_1,n_2,\dots,n_k,m}$$

[1]) Cf. Kuratowski l. c., p. 6.

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, et

$$E^{\alpha}_{n_1,n_2,\dots,n_k} = \prod_{\xi<\alpha} E^{\xi}_{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

pour tout nombre ordinal α de seconde espèce et $<\Omega$. On a donc

(10) $$E^{\alpha}_{n_1,n_2,\dots,n_k} \supset E^{\beta}_{n_1,n_2,\dots,n_k} \quad \text{pour} \quad \alpha < \beta.$$

Posons ensuite

(11) $$S^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} E^{\alpha}_{n}$$

(12) $$T^{\alpha} = \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k} (E^{\alpha}_{n_1,n_2,\dots,n_k} - E^{\alpha+1}_{n_1,n_2,\dots,n_k})$$

(13) $$B^{\alpha} = S^{\alpha} - T^{\alpha}$$

(la sommation $\sum\limits_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ s'étendant à tous les systèmes finis non vides d'indices).

M. Sierpiński a démontré [1]) que

(14) $$E = \sum_{\alpha<\Omega} B^{\alpha}$$

(15) $$E = \prod_{\alpha<\Omega} S^{\alpha}.$$

Les ensembles B^{α} s'appellent *constituantes de l'ensemble E par rapport au système déterminant* $\{E_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$.

6. Supposons à présent qu'une classe $\mathbf{K}$ de sous-ensembles d'un espace arbitraire 1 satisfait aux conditions 1⁰ et 2⁰ (du p. 230) et à la condition suivante:

3'. *Chaque classe d'ensembles disjoints appartenant à $\mathbf{K} - \mathbf{N}(\mathbf{K})$ est au plus dénombrable.*

[1]) W. Sierpiński: *Zarys teorji mnogości* II. *Topologja ogólna*, Warszawa 1928; pp. 210 et 213, ou bien *Sur une propriété des ensembles* (A), Fund. Math. 8 (1926), p. 363.

La classe des ensembles mesurables (L) satisfait évidemment à cette condition. On démontre aisément que la classe des sous-ensembles d'un espace métrique séparable qui jouissent de la propriété de Baire remplit de même la condition $3'$. (Il existe des espaces métriques, non séparables dans lesquels cela n'est pas vrai)

7. ***Théorème 2.*** *Prémisses: Soit*

$$E = \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \dots, n_k},$$

où les ensembles $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ appartiennent à une classe $\mathbf{K}$ satisfaisant aux conditions 1°, 2° et $3'$. Soient B^α les constituantes de E par rapport au système $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. Thèse: Il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ tel que $(E - B^\mu) \in \mathbf{N}(\mathbf{K})$. [1]

Démonstration. Il résulte de nos prémisses et de la définition des constituantes B^α qu'elles appartiennent à $\mathbf{K}$. Par conséquent, en vertu de (10) [2]) et $3'$, il existe pour tout système $n_1, n_2, \dots, n_k$. un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que

$$E^{\lambda}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - E^{\lambda'}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathbf{N} \quad \text{pour} \quad \lambda' > \lambda.$$

L'ensemble des systèmes finis d'indices étant dénombrable, il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ tel que

$$E^{\mu}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - E^{\nu}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathbf{N} \quad \text{pour} \quad \nu > \mu$$

quel que soit le système $n_1, n_2, \dots, n_k$. Il résulte donc de (12) que $T^\mu \in \mathbf{N}$ et comme, d'autre part, d'apres (14) et (15):

$$S^\mu - T^\mu \subset E \subset S^\mu,$$

nous obtenons: $(E - B^\mu) \in \mathbf{N}$, c. q. f. d.

Vu que les constituantes de E appartiennent à $\mathbf{K}$, le théorème 2 entraîne le

Corollaire 3. *Chaque classe $\mathbf{K}$ satisfaisant aux conditions 1°, 2° et $3'$ est un invariant de l'opération (A).*

[1]) C'est une généralisation des théorèmes dus aux MM. E. Sélivanowski (*Sur les constituantes des ensembles analytiques*, Fund. Math. **21** (1933), p. 20) et W. Sierpiński (*Sur les constituantes des ensembles analytiques*, Fund. Math. **21** (1933), p. 29), concernant la mesurabilité (L) et la propriété de Baire. Ma démonstration n'est qu'une transposition de la démonstration de M. Sierpiński. (l. c., p. 31).

[2]) Nous conservons les notations du numéro précedent: $E^{\alpha}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$; S^α; T^α.

8. Remarquons que le corollaire 3 peut être démontré d'une autre façon: celui-ci résulte notamment du théorème 1 et de la proposition suivante:

(P) *Chaque classe $\mathbf{K}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions* 1°, 2° et $3'$, *remplit la condition* 3°.

Démonstration. Supposons donc qu'une classe $\mathbf{K}$ de sous-ensembles de 1 satisfait aux conditions 1°, 2°, $3'$ et soit $E \subset 1$. Soit

$$(*) \qquad M_0, M_1, M_2, \dots M_\xi \dots \quad \text{où} \quad \xi < \gamma < \Omega,$$

une suite saturée d'ensembles disjoints, contenus dans $1 - E$ et appartenant à $\mathbf{K} - \mathbf{N}$ (S'il existe un au moins ensemble K disjoint de E et appartenant à $\mathbf{K} - \mathbf{N}$, cette suite n'est pas vide.) Désignons par M le complémentaire de la somme de la suite (*). Cette suite étant dénombrable d'après $3'$, M appartient à $\mathbf{K}$.

Soit à présent L un ensemble tel que $L \supset E$ et $L \in \mathbf{K}$. L'ensemble $M - L$ appartient à $\mathbf{K}$, est disjoint de E et de chaque ensemble de la suite (*) — donc $M - L \in \mathbf{N}$. Par conséquent, la classe $\mathbf{K}$ satisfait à la condition 3°.

La proposition (P) est ainsi démontrée.

L'inversion de la proposition (P) n'est pas vraie, car — comme nous avons remarqué plus haut — il existe des espaces dans lesquels la classe des ensembles qui jouissent de la propriété de Baire ne satisfait pas à la condition $3'$ (tandis qu'elle satisfait aux conditions 1°, 2° et 3°).