Remarque sur la dérivée symétrique [1]).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

M. Charzyński a démontré que l'ensemble D des points de discontinuité d'une fonction réelle d'une variable réelle $f(x)$ satisfaisant partout à la condition

$$(0) \qquad \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0$$

est clairsemé [2]). D'après une remarque due à M. Wolibner une telle fonction est constante sur le complémentaire de D [3]).

Le but de cette note est de démontrer que *D étant un ensemble clairsemé quelconque de nombres réels, il existe une fonction $f(x)$ (réelle d'une variable réelle), satisfaisant partout à la condition* (0), *continue et nulle pour $x \bar{\epsilon} D$ et discontinue et positive pour $x \epsilon D$.*

Supposons donc un ensemble D clairsemé et désignons par D_ξ (pour tout nombre ordinal $\xi < \Omega$) les cohérences (au sens de Cantor) de D [4]). [En d'autres mots:

$$D_0 = D$$
$$D_\xi = D_{\xi-1}(D_{\xi-1})' \quad \text{pour tout } \xi \text{ de I}^{\text{ère}} \text{ espèce}$$
$$D_\xi = \prod_{\alpha<\xi} D_\alpha \quad \text{pour tout } \xi \text{ de II}^{\text{ère}} \text{ espèce}].$$

Il existe donc un nombre ordinal $\gamma < \Omega$ tel que $D_\gamma = 0$ et $D_\xi \neq 0$ pour $\xi < \gamma$. Par conséquent

$$D = \sum_{0 \leqslant \xi < \gamma} (D_\xi - D_{\xi+1}).$$

[1]). Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie), le 13. X. 1933.

[2]) *Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie*, ce tome, p. 214.

[3]) Cf. la note citée de M. Charzyński, corollaire 2 a.

[4]) Cf. p. ex. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1927, p. 166.

Posons pour tout $x \bar{\epsilon} D$:

$$f(x) = 0$$

et pour tout $x \epsilon D_\xi - D_{\xi+1}$ (où $0 \leqslant \xi < \gamma$):

$$f(x) = \varrho^2(x, (D_\xi)')\ ^{1})$$

x étant dans le second cas un point isolé de D_ξ, il n'appartient pas à D'_ξ et l'ensemble D'_ξ étant fermé, on a $f(x) > 0$ pour tout $x \epsilon D$.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

(*) Pour tout x_0 réel il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les relations: $0 < |x - x_0| < \delta$ entraînent:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant (x-x_0)^2.$$

Cette proposition étant évidente pour tout $x_0 \bar{\epsilon} \bar{D}$, on doit la démontrer 1° pour tout $x_0 \epsilon D' - D$ et 2° pour tout $x_0 \epsilon D$.

1°. Il suffit de démontrer que $\{x_n\}$ étant une suite monotone de points de D tendant vers $x_0 \epsilon D' - D$, on a $f(x_n) \leqslant (x_n - x_0)^2$ pour n suffisamment grands. Désignons par ξ_n les nombres ordinaux tels que $x_n \epsilon D_{\xi_n} - D_{\xi_n+1}$. Partageons maintenant la suite des nombres naturels en deux suites N_1 et N_2 (l'un d'eux peut être finie ou vide): $n \epsilon N_1$ lorsqu'il existe un nombre naturel $m > n$ tel que $\xi_m > \xi_n$; dans le cas contraire $n \epsilon N_2$.

Soit $n \epsilon N_1$; $m > n$ et $\xi_m > \xi_n$. On a donc $x_n < x_m < x_0$ ou bien $x_0 < x_m < x_n$, et $x_m \epsilon D_{\xi_m} \subset D_{\xi_n+1} \subset (D_{\xi_n})'$. Par conséquent $\varrho(x_n, (D_{\xi_n})') \leqslant |x_n - x_m|$, d'où il vient:

$$f(x_n) \leqslant (x_n - x_m)^2 < (x_n - x_0)^2.$$

Supposons la suite N_2 finie ou vide.

Il existe donc un nombre n_0 tel que l'inégalite $n > n_0$ entraîne $n \epsilon N_1$ et par conséquent:

$$f(x_n) < (x_n - x_0)^2.$$

Supposons la suite N_2 infinie et soient $k_1, k_2, \ldots,$ ses termes. La suite $\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \ldots,$ est non-croissante; il existe donc un nombre n' tel

[1]) a étant un nombre réel arbitraire et Z un ensemble de nombres réels, $\varrho(a, Z)$ désignè la distance entre a et Z, c.-à-d. la borne inférieure des nombres $|a - z|$, où $z \epsilon Z$. Nous complétons cette définition, en posant $\varrho(a, Z) = 1$ dans le cas, où l'ensemble Z est vide.

15*

que $\xi_{k_n} = \xi_{k_{n'}}$ pour tout $n > n'$. Par conséquent $x_{k_n} \in D_{\xi_{k_{n'}}}$ pour $n > n'$, donc $x_0 \in (D_{\xi_{k_{n'}}})'$, d'où :

$$f(x_{k_n}) = \varrho^2(x_{k_n}, (D_{\xi_{k_{n'}}})') \leqslant (x_{k_n} - x_0)^2 \quad \text{pour} \quad n \geqslant n'.$$

On a donc

$$f(x_n) \leqslant (x_n - x_0)^2 \quad \text{pour} \quad n \geqslant k_{n'}.$$

2°. Supposons $x_0 \in D_\xi - D_{\xi+1}$ (où $0 \leqslant \xi < \gamma$), donc $x_0 \bar{\in} (D_\xi)'$. Par conséquent il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ les inégalités: $0 < |x - x_0| < \delta$ entraînent: $x \in D_\zeta - D_{\zeta-1}$, où ζ est un nombre ordinal $< \xi$, d'où (en vertu des inclusions: $D_\xi \subset D_{\zeta+1} \subset (D_\zeta)'$):

$$\varrho(x, (D_\zeta)') \leqslant |x - x_0|,$$

donc

$$f(x) \leqslant (x - x_0)^2.$$

La proposition (*) se trouve ainsi démontrée.

Elle entraîne la relation (0) pour tout x réel et la continuité de la fonction $f(x)$ pour tout $x \bar{\in} D$.

Józefów, 18. VIII. 1933.

Sur certains invariants de l'opération (A).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

1. Je démontre dans la note présente certains théorèmes concernant l'opération (A) et appartenant à la Théorie générale des Ensembles [1]). Du théorème 1, ainsi que du corollaire 3, résultent, comme des cas particuliers, les théorèmes connus sur l'invariance de la mesurabilité (L) [2]) et de la propriété de Baire [3]) par rapport à l'opération (A).

2. $\mathbf{K}$ étant une classe arbitraire d'ensembles, je désigne par $\mathbf{N}(\mathbf{K})$ la classe des ensembles dont tous les sous-ensembles appartiennent à $\mathbf{K}$. $\mathbf{K}$ étant une classe fixe (durant un certain raisonnement), la classe $\mathbf{N}(\mathbf{K})$ sera désignée tout court par $\mathbf{N}$.

Soient: R un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions et P un espace métrique. Désignons par $\mathbf{M}$ la classe des sous-ensembles mesurables (L) de R et par $\mathbf{B}$ la classe des sous-ensembles de P qui jouissent de la propriété de Baire (au sens large) [4]). Il est évident que

[1]) J'ai signalé le théorème 1 dans ma communication *O mierzalności i warunku Baire'a*, faite au I^er Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves (cf. C. R. de ce Congrès, Varsovie 1930, p. 300) et le théorème 2 dans la séance de la Soc. Pol. de Mathématique, section de Varsovie, le 5. V. 1933.

[2]) démontré par MM. Lusin et Sierpiński: *Sur quelques propriétés des ensembles* (A). Bull. Acad. Cracovie 1918. p. 35.

[3]) démontré par M. O. Nikodym: *Sur une propriété de l'opération* (A), Fund. Math. **7** (1925), p. 49. Cf. p. ex. C. Kuratowski: *Topologie* I, Monografje Matematyczne **3**. Warszawa 1933, p. 56.

[4]) Un sous-ensemble E de l'espace P jouit de la propriété de Baire (au sens large) lorsqu'il existe un ensemble ouvert G et deux ensembles K_1 et K_2 de première catégorie (dans P), tels que $E = G - K_1 + K_2$. Cf. p. ex. Kuratowski l. c., p. 49.