Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie[1]).

Par

Z. Charzyński (Varsovie)

M. Steinhaus a posé le problème suivant: Existe-t-il une fonction réelle de variable réelle $f(x)$, pantachiquement discontinue et telle qu'on ait pour tout x réel:

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=0? \quad (0)$$ [2]).

M. Mazurkiewicz a démontré que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction mesurable (L), satisfaisant à la condition (0) est non dense[3]) et M. Sierpiński a prouvé que cet ensemble est au plus dénombrable[4]).

Le but de la note présente est de démontrer un théorème plus fort que les résultats de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński et qui donne en même temps une réponse complète au problème de M. Steinhaus (théorème 1).

A la fin de cette note je démontre une proposition (théorème 2) qui généralise un théorème dû à M. Wolibner (corollaire 2a). La méthode de la démonstration ne diffère essentiellement de celle de M. Wolibner.

[1]) Les résultats contenus dans cette note ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie), le 19. V. et le 13. X. 1933.

[2]) *Fund. Math.* **4**, p. 368.

[3]) *Sur la dérivée première généralisée*, *Fund. Math.* **11**, p. 145.

[4]) *Sur une hypothèse de M. Mazurkiewicz*, *Fund. Math.* **11**, p. 148.

Termes et notations. Une fonction réelle définie sur toute la droite, resp. sur un ensemble X de nombres réels sera appellée plus court *fonction*, resp. *fonction définie sur* X.

$F(x)$ étant une fonction définie dans une voisinage d'un point x_0, nous posons

$$M_F(x_0)=\mathrm{Max}\,[F(x_0),\ \overline{\lim_{x=x_0}}\,F(x_0)]$$
$$m_F(x_0)=\mathrm{Min}\,[F(x_0),\ \underline{\lim_{x=x_0}}\,F(x_0)]$$
$$\omega_F(x_0)=M_F(x_0)-m_F(x_0).$$

$\omega_F(x_0)$ s'appelle *oscillation de* F *dans* x_0.

L'intervalle ouvert, resp. fermé aux extrémités a et b sera désigné par (a,b) resp. $[a,b]$.

Un ensemble de points qui ne contient aucun sous-ensemble dense en soi s'appelle *clairsemé*.

La fermeture d'un ensemble Z sera désigné par $\overline{Z}$.

* * *

$f(x)$ étant une fonction définie dans un intervalle ouvert, nous posons pour tout x appartenant à cet intervalle:

$$f^*(x)=\overline{\lim_{h=0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right|$$

Théorème 1. *$f(x)$ étant une fonction telle que $f^*(x)$ est partout finie, l'ensemble D des points de discontinuité de f est clairsemé*[1]).

Démonstration.

1. L'ensemble D est non dense.

1·1. Supposons pour la démonstration qu'il existe une fonction $f(x)$ étant pantachiquement discontinue sur un intervalle et telle que $f^*(x)$ est partout finie. On peut supposer sans nuire à la généralité que cet intervalle coïncide avec toute la droite.

Il existe pour tout nombre réel x un nombre naturel $n(x)$ tel que la relation $|h|<\frac{1}{n(x)}$ entraîne

$$|f(x+h)-f(x-h)|<2|h|\cdot[f^*(x)+1].$$

[1]) J'ai démontré d'abord que l'ensemble D est *non dense* et *au plus dénombrable.* L'hypothèse que D est *clairsemé* a été faite par M. Szpilrajn qui a démontré ensuite un théorème inverse au mien. Cf. la note de M. Szpilrajn *Remarque sur la dérivée symétrique*, ce tome, p. 226.

Posons pour tous nombres naturels m et n:

$$E_n^m = \underset{x}{\mathrm{E}}[m-1 \leqslant f^*(x) < m; \quad n(x) = n].$$

La fonction $f^*(x)$ étant partout finie, l'ensemble

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_n^m$$

couvre toute la droite. Par conséquent *(a, b) étant un intervalle arbitraire, il existe deux nombres naturels $\mu(a, b)$ et $\nu(a, b)$ et un sous intervalle (a', b') de (a, b) — tels que l'ensemble $E_{\nu(a,b)}^{\mu(a,b)}$ est dense dans (a', b').*

Posons encore pour tout $\eta > 0$ et tout $x \in E_n^m$:

$$\delta(x, \eta) = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{\eta}{2(m+1)}\right).$$

Il en résulte que *l'inégalité $|h| < \delta(x, \eta)$ entraîne*:

$$|f(x+h) - f(x-h)| < \eta.$$

1·2. Nous allons démontrer maintenant que *pour tout x_0, tout $\eta > 0$ et tout h_0 tel que $0 < h_0 < \delta\left(x_0, \frac{\eta}{2}\right)$, il existe un nombre positif $h_1 < h_0$ tel que la relation $x_0 < x < x_0 + h_1$ entraîne $|f(x-h_0) - f(x+h_0)| < \eta$.*

Soit donc

$$0 < h_0 < \delta\left(x_0, \frac{\eta}{2}\right). \tag{1}$$

Posons

$$h_1 = \mathrm{Min}\left[2h_0, \ \delta\left(x_0 + h_0, \frac{\eta}{2}\right)\right]. \tag{2}$$

Soit enfin x un nombre satisfaisant à l'inégalité $x_0 < x < x_0 + h_1$. Posons $h' = x_0 - x + h_0$. On a donc $0 < |h'| < h_0$ et par conséquent

$$|f(x_0 + h') - f(x_0 - h')| < \frac{\eta}{2}. \tag{3}$$

Posons ensuite $h'' = x - x_0 = x_0 + h_0 - (x_0 + h')$. Donc

$$h'' < h_1 < \delta\left(x_0 + h_0, \frac{\eta}{2}\right),$$

d'où il résulte que

$$|f[(x_0 + h_0) + h''] - f[(x_0 + h_0) - h'']| < \frac{\eta}{2}. \tag{4}$$

Vu que

$$x_0 + h_0 - h'' = x_0 + h'$$
$$x_0 + h_0 + h'' = x + h_0$$
$$x_0 - h' = x - h_0,$$

on obtient de (3) et (4):

$$|f(x + h_0) - f(x - h_0)| < \eta.$$

1·3. Nous allons démontrer à present qu'*il existe un nombre $\alpha > 0$ et un intervalle, tels que dans chaque son sous-intervalle il existe deux points x_1 et x_2 pour lesquels*

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \alpha. \tag{1}$$

Soit donc (a, b) un intervalle dans lequel un ensemble $E_{n_0}^{m_0}$ est dense (cf. *1·1*). Désignons par x^0 un point de discontinuité de $f(x)$ appartenant à (a, b), et soit α un nombre tel que $0 < 3\alpha < \omega_f(x^0)$.

Il existe évidemment un point x' appartenant à (a, b) tel qu'on a

$$|x^0 - x'| < \mathrm{Min}\left(\frac{1}{n_0}, \frac{\alpha}{m_0 + 1}\right) \tag{2}$$

et

$$|f(x^0) - f(x')| > 3\alpha. \tag{3}$$

Nous allons démontrer que dans chaque sous-intervalle de l'intervalle (x^0, x') (nous supposons $x^0 < x'$) il existe une couple de points x_1 et x_2, satisfaisant à la condition (1). Soient: $x^0 < \lambda_1 < \lambda_2 < x'$. L'ensemble $E_{n_0}^{m_0}$ étant dense dans (x_0, x'), il existe deux points x_1' et x_2 de cet ensemble tels que

$$\tfrac{1}{2}(x^0 + \lambda_1) < x_1' < \tfrac{1}{2}(x^0 + \lambda_2) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}(x' + \lambda_1) < x_2 < \tfrac{1}{2}(x' + \lambda_2).$$

En posant

$$x_1 = 2x_1' - x^0 \quad \text{et} \quad x_2 = 2x_2 - x',$$

nous obtenons

$$\lambda_1 < x_1 < \lambda_2 \qquad \lambda_1 < x_2 < \lambda_2$$

et

$$0 < x_1 - x_1' = x_1 - x^0 < \tfrac{1}{2}(x' - x^0)$$
$$0 < x_2' - x_2 = x' - x_2' < \tfrac{1}{2}(x' - x^0).$$

x_1 et x_2' appartenant à $E^{m_0}_{n_0}$, il en résulte en vertu de (2):

$$|f(x_1)-f(x^0)|<2(x_1'-x^0)\,(m_0+1)<\alpha$$

et

$$|f(x_2)-f(x')|<2(x'-x_2)\,(m_0+1)<\alpha.$$

Ces inégalités et l'inégalité (3) nous donnent:

$$|f(x_1)-f(x_2)|>\alpha.$$

1·4. Soient à présent: $\alpha>0$ et (a,b) un intervalle — tels que dans tout sous-intervalle de (a,b) il existe deux points x_1, x_2 pour lesquels $|f(x_1)-f(x_2)|>\alpha$.

Considérons l'ensemble $E^{\mu(a,b)}_{\nu(a,b)}$ et l'intervalle (a',b') (contenu dans (a,b)), dans lequel cet ensemble est dense (cf. *1·1*). La fonction $\delta\left(x,\frac{\alpha}{4}\right)$ est constante sur $E^{\mu(a,b)}_{\nu(a,b)}$; désignons sa valeur par δ_0.

Soit (c,d) un sous-intervalle de (a',b') tel que $0<d-c<\delta_0$.

Soit enfin x_0 un point arbitraire de (c,d) et x_1 et x_2 deux points de (x_0,d) tels que

(1) $$|f(x_1)-f(x_2)|>\alpha$$

et

(2) $$0<x_2-x_1<\mathrm{Min}\left[2\delta\left(x_0,\frac{\alpha}{4}\right),\ 2(x_0-c)\right].$$

Posons $h_0=\frac{1}{2}(x_2-x_1)$. En vertu de (2) et *1·2* il existe un nombre positif $h_1<2h_0$ tel que

(3) $$|f(x+h_0)-f(x-h_0)|<\frac{\alpha}{2}\ \text{pour}\ x_0<x<x_0+h_1.$$

Posons ensuite

$$\xi_1=\tfrac{1}{2}(x_0+h_0+x_1)=\tfrac{1}{2}(x_0-h_0+x_2)$$
$$\xi_2=\tfrac{1}{2}(x_0+h_0+x_1+h_1)=\tfrac{1}{2}(x_0-h_0+x_2+h_1).$$

Les points ξ_1 et ξ_2 se trouvent évidemment dans l'intervalle (c,d).

Désignons par x' un point appartenant à $E^{\mu(a,b)}_{\nu(a,b)}$ et à l'intervalle (ξ_1,ξ_2) et posons $h'=x_1-x'$ et $h''=x_2-x'$. Les nombres h' et h'' étant positifs et plus petits que δ_0, on a:

$$|f(x'+h')-f(x'-h')|<\frac{\alpha}{4}$$

$$|f(x'+h'')-f(x'-h'')|<\frac{\alpha}{4}$$

et comme $x_1=x'+h'$ et $x_2=x'+h''$, nous obtenons en vertu de (1):

(5) $$|f(x'-h')-f(x'-h'')|>\frac{\alpha}{2}.$$

Posons d'autre part $x=\frac{1}{2}[(x'-h')+(x'-h'')]$. On a $x_0<x<$ $<x_0+h_1$ et $-x+(x'-h')=x-(x'-h'')=h_0$, donc, d'après (3):

(6) $$|f(x'-h')-f(x'-h'')|<\frac{\alpha}{4}.$$

Les relations (5) et (6) sont incompatibles.

La proposition *1* est ainsi démontrée.

2. L'ensemble D est au plus dénombrable[1]).

2·1. Lemme. *Soient: $g(x)$ une fonction, x_0 un nombre réel, h_0 et K deux nombres positifs. Supposons que l'oscillation $\omega_g(x_0-h_0)$ est finie, et qu'on a*

(1) $$\frac{\omega_g(x_0+h_0)-\omega_g(x_0-h_0)}{2h_0}>2K.$$

Thèse: Il existe un nombre $\delta>0$ tel que pour tout x satisfaisant à l'inégalité $|x-x_0|<\delta$ il existe un nombre $h<2h_0$ pour lequel on a

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}\right|>K.$$

Démonstration. Il résulte de (1) qu'on a: ou bien

(2) $$M_g(x_0+h_0)>M_g(x_0-h_0)+2Kh_0,$$

ou bien

(3) $$m_g(x_0+h_0)<m_g(x_0-h_0)-2Kh_0.$$

Supposons donc l'inégalité (2) satisfaite. [La démonstration dans le cas de l'inégalité (3) sera tout-à-fait analogue].

Il résulte de l'inégalité (2) qu'il existe deux nombres: $\varepsilon>0$ et $h_1>h_0$ tels qu'on a:

(4a) $$h_0<h_1<2h_0$$

et

(4b) $$M_g(x_0+h_0)>M^g(x_0-h_0)+2Kh_1+\varepsilon.$$

[1]) La démonstration de cette proposition serait beaucoup plus simple lorsqu'on supposait la fonction $f^*(x)$ bornée dans tout intervalle.

Soit à présent η un nombre positif tel que

(5a) $$\eta < h_1 - h_0$$

et que

(5b) l'inégalité $|x-(x_0-h_0)|<\eta$ entraîne $g(x) < M_g(x_0-h_0)+\varepsilon$.

Soit enfin x' un nombre tel que

(6a) $$|x'-(x_0+h_0)|<\eta$$

et

(6b) $$g(x') > M_g(x_0-h_0)+2Kh_1+\varepsilon.$$

L'existence d'un tel nombre résulte de (4b).

En vertu de (5b) et (6b), l'inégalité

(7) $$|x-(x_0-h_0)|<\eta$$

entraîne

(8) $$|g(x)-g(x')| > 2Kh_1,$$

donc, en vertu de (5a):

(9) $$\left|\frac{g(x)-g(x')}{x-x'}\right| > K.$$

Les moyennes $\frac{1}{2}(x'+x)$, où x appartient à l'intervalle (7), constituent un intervalle ouvert contenant le point x_0. Les inégalités (9), (6a), (5a) et (4a) démontrent la thèse du lemme.

2·2. x_0 étant un nombre réel et K un nombre positif, désignons par $c(x_0,K)$ la borne supérieure des nombres ξ pour lesquels l'ensemble $\underset{x}{E}[\omega_f(x)\geqslant 2K(x-x_0);\ x_0<x<\xi]$ est au plus dénombrable.

$c(x_0,K)$ est donc un nombre finie ou non, et on voit aisément que la relation: $x_0 \bar{\in} D$ entraîne $c(x_0,K)>x_0$.

(*) *ξ_0 étant un point de condensation des points x pour lesquels $\omega(x)>\alpha$ (où α est un nombre positif arbitraire), il existe pour tous nombres positifs K et δ un nombre $x_0 \bar{\in} D$ tel que*

$$\xi_0-\delta < c(x_0,K) < \xi_0.$$

A cet effet il suffit de considérer un point quelconque $x_0 \bar{\in} D$ satisfaisant aux inégalités $\xi_0-\delta<x_0<\xi_0$ et $x_0>\xi_0-\frac{\alpha}{2K}$. L'ensemble D étant non dense (comme nous l'avons prouvé dans la 1ère partie), un tel point x_0 existe.

Il résulte de (*) que

(**) *Si $c(x^0,K)<+\infty$ et $x^0 \bar{\in} D$, il existe pour tous nombres $K'>0$ et $\delta>0$ un nombre $x_1 \bar{\in} D$ tel que*

$$c(x^0,K)-\delta<c(x_1,K')<c(x^0,K).$$

Car le point $c(x^0,K)$ est un point de condensation des points $x\neq x^0$ pour lesquels

$$\omega_f(x) > 2K(x-x^0) > 2K[c(x^0,K)-x^0].$$

2·3. Si $c(x_0,K)<+\infty$ et $x_0 \bar{\in} D$, *il existe un voisinage fermé I de $c(x_0K)$ tel que tout nombre $x\in I$ coïncide avec la moyenne arithmétique de deux nombres x_1 et x_2 tels que*

$$|x_j-x_0|<\frac{1}{K} \qquad j=1,2.$$

et

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|>K.$$

Cela résulte du lemme *2·1* et de l'existence des nombres h positifs, arbitrairement petits, tels que

$$\omega_f[c(x_0,K)+h]\geqslant 2K[c(x_0,K)+h-x_0]$$

et

$$\omega_f[c(x_0,K)-h]<2K[c(x_0,K)-h-x_0]$$

donc

$$\omega_f[c(x_0,K)+h]-\omega_f[c(x_0,K)-h]>4Kh$$

(c'est la conséquence immédiate de la définition du nombre $c(x_0,K)$).

2·4. Supposons l'ensemble D indénombrable. Il existe donc un nombre $\alpha>0$ tel que l'ensemble des nombres x pour lesquels $\omega_f(x)>\alpha$ est indénombrable. Il résulte donc de *2·2* (*) qu'il existe un nombre $x_1 \bar{\in} D$ pour lequel $c(x_1,1)<+\infty$.

En vertu de *2·3*, il existe donc un voisinage fermé I_1 du point $c(x_1,1)$ tel que pour tout $x\in I_1$ il existe deux nombres x' et x'' dont la différence ne dépasse pas 2 et tels que $x=\frac{1}{2}(x'+x'')$ et

$$\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right|>1.$$

La proposition *2·2* (✱) entraîne l'existence d'un point $x_2 \in \bar{D}$ tel que $c(x_2, 2) \in I_1$. L'application des propositions *2·3* et *2·2* (✱) nous donnent ainsi la construction d'une suite descendante d'intervalles I_n telle que pour tout nombre x appartenant à I_n il existe deux nombres x' et x'', dont la différence ne dépasse pas $\frac{2}{n}$ et tels que $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$ et
$$\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| > n.$$

Le produit de la suite $\{I_n\}$ n'est pas vide: c'est un point x^0 tel que $f^*(x^0) = +\infty$, ce qui est incompatible avec notre prémisse.

L'ensemble D est donc au plus dénombrable.

3. L'ensemble D est clairsemé.

3·1. Lemme. *Supposons*

(1) $$\varphi^*(x_0) < +\infty$$

et

(2) $$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_\varphi(x_n)}{|x_n - x_0|} = +\infty,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction, x_0 un nombre réel et $\{x_n\}$ une suite des nombres réels différents de x_0, telle que

(3) $$\lim_{n=\infty} x_n = x_0.$$

Thèse: Pour n suffisamment grands:

(4) $$\omega_\varphi(2x_0 - x_n) > 0.$$

Démonstration. Il existe d'après (1) un nombre fini $K > \varphi^*(x_0)$. Par conséquent il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

(5) l'inégalité $|x - x_0| < \delta$ entraîne $\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(2x_0 - x)}{2(x - x_0)}\right| < K$.

En vertu de (3) et (2) il existe un nombre N tel que pour $n > N$ on a

(6) $$0 < |x_n - x_0| < \delta$$

et

(7) $$\omega_\varphi(x_n) > 4K|x_n - x_0|.$$

Pour $n > N$ on a d'après (6) et (5):
$$\omega_\varphi(2x_0 - x_n) \geqslant \omega_\varphi(x_n) - 4K|x_n - x_0|,$$

donc, en vertu de (7):
$$\omega_\varphi(2x_0 - x_n) > 0.$$

3·2. Désignons par E l'ensemble des points x_0 pour lesquels il existe une suite x_n des nombres différents de x_0, tendant vers x_0 et telle que
$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_f(x_n)}{|x_n - x_0|} = +\infty.$$

Nous allons démontrer que *si l'ensemble D contient un sous-ensemble dense en soi, l'ensemble E est indénombrable.*

Supposons donc que l'ensemble D contient un ensemble D_0 dense en soi, et soit $\xi_1, \xi_2, \dots$ une suite arbitraire de nombres réels. Or, nous allons montrer l'existence d'un nombre $x_0 \in E$, n'appartenant pas à cette suite.

En s'appuyant sur la densité en soi d'ensemble D_0, nous construisons deux suites: $x_n \in D_0$ et $\varepsilon_n > 0$, telles que
$$x_1 \in D_0; \quad x_1 \neq \xi_1$$
$$\varepsilon_1 < \mathrm{Min}\,[\omega_f(x_1);\ 1;\ |x_1 - \xi_1|]$$
et pour $n > 1$:
$$x_n \in D_0; \quad x_n \neq \xi_n; \quad |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_{n-1}$$
$$\varepsilon_n < \mathrm{Min}\left[(x_n - x_{n-1} + \varepsilon_{n-1});\ (x_{n-1} + \varepsilon_{n-1} - x_n);\ \frac{\omega_f(x_n)}{n};\ \frac{1}{n};\ |x_n - \xi_n|\right].$$

Les intervalles descendants $[x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n]$ possèdent un point commun x_0; ce point diffère de ξ_n (pour $n = 1, 2, \dots$), car
$$x_n - \varepsilon_n < x_0 < x_n + \varepsilon_n,$$
tandis que $\xi_n < x_n - \varepsilon_n$ ou bien $x_n + \varepsilon_n < \xi_n$ (ce qui résulte de la définition de ε_n).

D'autre part
$$\frac{\omega_f(x_n)}{|x_n - x_0|} > \frac{\omega_f(x_n)}{\varepsilon_n} > n$$
d'où:
$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_f(x_n)}{x_n - x_0} = +\infty.$$

Par conséquent $x_0 \in D$.

3·3. Il résulte du lemme *3·1* qu'il existe pour tout $x \in E$ deux nombres x' et x'' appartenant à D tels que $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$. L'ensemble D étant au plus dénombrable (comme nous l'avons prouvé dans la partie *2ème*), l'ensemble E est donc aussi au plus dénombrable. Il en résulte d'après *3·2* que l'ensemble D est clairsemé.

Le théorème *1* est donc démontré.

* * *

M étant un nombre non négatif, convenons de dire qu'une fonction $f(x)$, définie sur un ensemble X de nombres réels satisfait à *la condition* $\mathfrak{L}(M)$ (condition de Lipschitz), lorsqu'on a

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M\,|x_1 - x_2| \quad \text{pour tout} \quad x_1,\ x_2 \in X$$

Une fonction $f(x)$ définie sur un ensemble X et satisfaisant à la condition $\mathfrak{L}(M)$ sur X possède une limite déterminée dans tout point d'accumulation de X. Il en résulte aisément qu'on peut étendre cette fonction à toute la droite d'une telle façon que la fonction étendue satisfait de même à la condition $\mathfrak{L}(M)$ (sur toute la droite).

Posons

$$f^{\times}(x) = \overline{\lim_{h=0}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|.$$

($f^{\times}(x)$ est donc égale à la plus grande des valeurs absolues des quatres nombres dérivés de Dini). On prouve aisément que la condition $\mathfrak{L}(M)$ pour une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle I équivaut à la condition: $f^{\times}(x) \leqslant M$ (pour tout $x \in I$).

Théorème 2. *M étant un nombre positif arbitraire et $f(x)$ une fonction satisfaisant partout à la condition $f^*(x) \leqslant M$, il existe une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition $\mathfrak{L}(M)$ et telle qu'on a $f(x_0) = \varphi(x_0)$ pour tout point x_0, dans lequel la fonction f est continue.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $x_1 < x_2$ étant deux points de continuité de la fonction $f(x)$ et M' étant un nombre quelconque $> M$, on ait

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M'(x_2 - x_1).$$

Supposons par contre

$$(1) \qquad |f(x_2) - f(x_1)| > M'(x_2 - x_1).$$

En outre, supposons $f(x_2) > f(x_1)$.

Posons

$$l(x) = M'[x - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)] + \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

Il résulte de (1) que $l(x_1) > f(x_1)$ et $l(x_2) < f(x_2)$; par conséquent, la fonction $f(x)$ étant continue dans x_1 et x_2, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité $0 < x - x_1 < \delta$, resp. $0 < x_2 - x < \delta$ entraîne $l(x) > f(x)$, resp. $l(x) < f(x)$.

Désignons par x_0 la borne supérieure des nombres ξ tels que l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[l(x) > f(x);\ x_1 < x < \xi]$ est au plus dénombrable. On a donc $x_1 < x_0 < x_2$. Par conséquent il existe des nombres h arbitrairement petits tels que $f(x_0 - h) < l(x_0 - h)$ et $f(x_0 + h) > l(x_0 + h)$, donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) > 2M'h.$$

Il en résulte l'inégalité $f^*(x_0) \geqslant M' > M$ qui est incompatible avec notre prémisse.

Le théorème 2 est donc démontré.

Le théorème 2 nous donne pour $M = 0$ le suivant corollaire, démontré plus tôt par M. Wolibner:

Corollaire 2a. *Toute fonction possédant la dérivée symétrique partout nulle est constante sur l'ensemble de tous ses points de continuité.*

Remarque [1]. La question s'impose: $f(x)$ étant une fonction satisfaisant partout à la condition $f^*(x) < +\infty$, existe-t-il une fonction $\varphi(x)$ égale à $f(x)$ dans tous les points de continuité de f et telle que $\varphi^{\times}(x) < +\infty$ (pour tout x)? — La réponse est négative: la fonction $g(x)$, définie comme il suit:

$$g(x) = \cos\frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$
$$g(0) = 0$$

satisfait partout à la condition $g^*(x) < +\infty$, mais elle n'est égale dans ses points de continuité à aucune fonction partout continue.

[1]) de M. Szpilrajn.