We now use the property that $F_a(x)$ is u. s. c. at ξ. Then given $\epsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that $F_a(x) < F_a(\xi) + \epsilon$ for $\xi - \delta \leqslant x \leqslant \xi + \delta$. Since $F_a(\xi)$ is finite, $F_a(\xi) - (F_a(\xi) + \epsilon) < 0$ in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, and so by lemma 13, $\Phi(x) = F(x) - x\,(F_a(\xi) + \epsilon)$, is monotone. Further, at ξ, $\Phi(x)$ has a finite approximate derivative, $\Phi_a(\xi) = -\epsilon$. We now use the following lemma.

Lemma 27. (Khintchine[1]). *At a point ξ at which the monotone function $f(x)$ has a finite approximate derivative $f_a(\xi)$, the differential coefficient of $f(x)$ exists, and $f'(\xi) = f_a(\xi)$.*

Hence $\Phi'(\xi) = \Phi_a(\xi)$. It follows that $F_a(\xi) = F'(\xi)$. The relation (22) then shows that

$$\lim \frac{H(\xi+h) + H(\xi-h) - 2H(\xi)}{h^2} = F_a(\xi).$$

Thus (23) gives

$$F_a(\xi) < F_a(\xi) - \frac{\eta}{2}\left(\frac{h(\eta)}{4}\right)^2.$$

This contradiction establishes the lemma.

Lemma 16a. *If $F_a(x)$ is u. s. c. in (a, b), $\underline{D}^4 H(x) > K$ in that interval, then $D^4 H(x)$ exists p. p.*

We may suppose that $k = 0$. Then $\overline{D}^2 F_a(x) > 0$ by lemma 15a. The remainder of the proof is the same as for lemma 16.

Finally, lemma 17 remains unaltered in enunciation. The deduction of Theorem V a, now presents no new difficulties.

[1]) Khintchine, *Fund. Math.* 9 (1927) 212—279 (242).

Absolut-additive abstrakte Mengenfunktionen.

Von

S. Bochner (Cambridge, England).

Diese Note schliesst sich unmittelbar an eine andere Note des Verfassers an[1]), in welcher die Lebesguesche Integrations- und Differentiationstheorie für den Fall erörtert wurde, dass die Werte der (in kartesischen Räumen definierten) Funktionen nicht Zahlen sondern, allgemeiner, Elemente eines vollständigen, komplex-linearen (Vector-) Raumes sind. Es wurde nachgewiesen, dass sich die Begriffe und Sätze der Lebesgueschen Theorie in weitem Umfange aufrechterhalten lassen, mit Ausnahme der Besselschen Ungleichung für Fourierreihen, deren Versagen an einem Beispiel aufgewiesen wurde[2]), und mit Ausnahme des Satzes, dass jede absolut-additive Mengenfunktion fast überall differenzierbar ist, dessen Gültigkeit unentschieden blieb. — Ziel der vorliegenden Note ist es, an einem Gegenbeispiel nachzuweisen, dass auch dieser Differentiationssatz zu bestehen aufhört.

Diese Entscheidung dürfte, obwohl sie eine negative ist, von Interesse sein. Denn in der neueren Theorie der Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(mit komplexen Werten der Variablen z) spielt der Lebesguesche Differentiationssatz im wesentlichen nur an einer Stelle eine Rolle, nämlich beim Beweis des sogenannten Satzes von Fatou. In einem

[1]) *Fundamenta Math.* XX (1933), p. 262—276; vgl. auch daselbst.

[2]) Wegen eines prägnanteren Beispiels vgl. *Göttinger Nachrichten, Mathem.-Phys. Klasse* 1933, 178—180.

anderen Zusammenhang werde ich zeigen, dass im Falle abstrakter Koeffizienten a_n auch der Fatousche Satz selber seine Gültigkeit verliert, während viele sonstigen, auch tieferliegenden, Eigenschaften der Potenzreihen bestehen bleiben.

Wir werden als Gegenbeispiel eine Funktion $F(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ konstruieren, welche beschränkte Differenzenkoeffizienten hat

$$(1) \qquad \left|\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}\right| \leqq 3 \qquad \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq x' \leqq 1, \end{array}$$

und welche dennoch in keinem Punkte des Intervalls $\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3}$ differenzierbar ist.

Gegeben sei eine beliebige Indexmenge N; ein variables Element der Menge bezeichnen wir mit ξ. Wir belegen die Elemente der Indexmenge irgendwie mit komplexen Zahlen a_ξ, wobei wir nur die eine Einschränkung machen, dass für jede einzelne Belegung die absoluten Beträge $|a_\xi|$ beschränkt sind. Jede solche Belegung betrachten wir als ein abstraktes Element, und wir schreiben:

$$\alpha = \{a_\xi\}.$$

Sind $\alpha = \{a_\xi\}$ und $\beta = \{b_\xi\}$ zwei Elemente und p und q komplexe Zahlen, so definieren wir das Element $p\alpha + q\beta$ durch $\{p a_\xi + q b_\xi\}$, und den absoluten Betrag $|\alpha|$ von α definieren wir durch

$$|\alpha| = \underset{\xi \subset N}{\text{obere Grenze}}\, |a_\xi|.$$

Man sieht leicht, dass der so definierte Vektorraum unseren Voraussetzungen genügt.

Jede abstrakte Funktion $\alpha = F(x)$ zerfällt in komplexwertige „Komponenten" $F_\xi(x)$, und wenn die Funktion $F(x)$ in einem Punkte differenzierbar ist, so ist notwendigerweise jede Komponente $F_\xi(x)$ in diesem Punkte im gewöhnlichen Sinne differenzierbar, wie an der Relation

$$0 = \overline{\lim_{h\to 0}} \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| =$$
$$= \overline{\lim_{h\to 0}}\ \underset{\xi \subset N}{\text{ob. Gr.}} \left|\frac{F_\xi(x+h)-F_\xi(x)}{h} - f_\xi(x)\right|$$
$$\geqq \overline{\lim_{h\to 0}} \left|\frac{F_\xi(x+h)-F_\xi(x)}{h} - f_\xi(x)\right|$$

zu erkennen ist. Wir lassen insbesondere den Index ξ die Punkte des Intervalls

$$(2) \qquad \tfrac{1}{3} \leqq \xi \leqq \tfrac{2}{3}$$

durchlaufen, und wir definieren für festes ξ die Funktion $y = F_\xi(x)$ durch den Zweistreckenzug mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(\xi,1)$, $(1,0)$. Es ist

$$\left|\frac{F_\xi(x)-F_\xi(x')}{x-x'}\right| \leqq 3,$$

und deswegen gilt auch (1), aber die Funktion $F(x)$ ist in keinem Punkte des Intervalls (2) differenzierbar, weil in jedem Punkte des Intervalls mindestens eine Komponente nicht differenzierbar ist.