Cela étant, posons $\frac{\partial f}{\partial x} = F$, $\frac{\partial f}{\partial y} = G$, $\frac{\partial f}{\partial z} = H$, et $f_n(P) \overset{}{=}_{df} f(\alpha_n x, \alpha_n y, \alpha_n z)$. La fonction f_n est définie dans la sphère S_n du rayon $\frac{1}{\alpha_n}$. Comme

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = \alpha_n F(\alpha_n x,\ \alpha_n y,\ \alpha_n z), \text{ etc.},$$

on obtient sans peine:

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_S [\alpha_n F(\alpha_n x,\ \alpha_n y,\ \alpha_n z) - F(x, y, z)]^2\, d\tau = 0$$

et des relations analogues pour G et H qui expriment que f_n tend en moyenne carrée vers f dans S.

D'après le théorème du § 4. N⁰ 1, il existe alors une suite partielle $\{f_{k_n}\}$ et une suite de constantes $\{q_n\}$ telles que les fonctions prolongées de $f_{k_n} + q_n$ tendent uniformément sur presque toute ligne relative $l_{x,y}$ vers la fonction prolongée de f et, il en est d'analogue pour des droites relatives $l_{y,z}$ et $l_{z,x}$.

Or les valeurs de trois fonctions prolongées de $f_{k_n} + q_n$ ne considérées que dans S coïncident avec les valeurs de cette fonction sur la frontière de S, si l'on la considère dans S_n et, ces trois fonctions ne forment qu'une seule fonction définie presque partout sur la frontière de S. On en déduit que les trois fonctions „frontières" de f coïncident aussi presque partout.

2. Si l'on se souvient du résultat obtenu à la fin du § 3. N⁰ 1, on voit que:

Si $f(P)$ est (BL) dans une sphère S, ses valeurs limites et frontières représentent une fonction définie presque partout sur la frontière de S. Cette fonction est à carré sommable.

On peut aussi démontrer que:

Si $f_n(P) \overset{D}{\to} f(P)$ dans une sphère D, il existe une suite de constantes $\{a_n\}$ telle que les fonctions définies par les valeurs limites et frontières des f_n tendent en moyenne carrée sur la surface de S vers la fonction obtenue de la même manière de f. Les constantes a_n sont celles, pour lesquelles $f_n + a_n$ converge en moyenne carrée vers f dans D.

Il serait intéressant d'examiner le cas du domaine général; il ne semble pas être trop difficile.

Sur une propriété des constituantes des ensembles analytiques.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

Soit $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ un système déterminant donné, formé d'ensembles quelconques et soit E le *noyau* de ce système, c'est-à-dire l'ensemble

$$E = \Sigma\, \delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \ldots,$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Posons, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\delta^0_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{1}$$

$$\delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots n_k, n} \tag{2}$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, et

$$\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \prod_{\xi < \alpha} \delta^{\xi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{3}$$

pour tout nombre ordinal α de seconde espèce.

Posons ensuite

$$S^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{n} \tag{4}$$

et

$$T^{\alpha} = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} (\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}), \tag{5}$$

la sommation dans (5) s'étendant à tous les systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Dans le vol. VIII de ce journal [1]) M. Sierpiński a démontré la formule:

(6) $$E = \sum_{\alpha<\Omega} (S^\alpha - T^\alpha).$$

Le but de cette Note est de démontrer que *les termes de la série* (6) *forment une suite transfinie non décroissante*, c'est-à-dire que

(7) $$S^\alpha - T^\alpha \subset S^\beta - T^\beta \quad \text{pour} \quad \alpha < \beta < \Omega.$$

Lemme I. *On a*

(8) $$T^\beta \subset T^\alpha \quad \textit{pour} \quad \alpha < \beta < \Omega.$$

Démonstration. Admettons que le lemme I n'est pas vrai: il existe donc deux nombres ordinaux $< \Omega$, α et $\beta > \alpha$, tels que

$$T^\beta - T^\alpha \neq 0.$$

Soit x un élément de l'ensemble $T^\beta - T^\alpha$: on a donc

$$x \in T^\beta \text{ et } x \bar{\in} T^\alpha.$$

Soit γ le plus petit nombre ordinal, tel que $x \in T^\gamma$: on a donc $\gamma \leqslant \beta$ et

(9) $$x \bar{\in} T^\xi \quad \text{pour} \quad \xi < \gamma, \quad \text{et} \quad x \in T^\gamma.$$

D'après (5) on a

(10) $$x \in T^\gamma = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} (\delta^\gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k} - \delta^{\gamma+1}_{n_1, n_2, \dots, n_k})$$

et on conclut qu'il existe un système d'indices $m_1, m_2, \dots, m_k$, tel que

(11) $$x \in \delta^\gamma_{m_1, m_2, \dots, m_k} \quad \text{et} \quad x \bar{\in} \delta^{\gamma+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

D'après (9) on a

(12) $$x \bar{\in} T^\xi = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} (\delta^\xi_{n_1, n_2, \dots, n_k} - \delta^{\xi+1}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \quad \text{pour} \quad \xi < \gamma.$$

Si $\gamma = \eta + 1$, on a, d'après (11) et (2):

$$x \in \delta^{\eta+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \delta^\eta_{m_1, m_2, \dots, m_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^\eta_{m_1, m_2, \dots, m_k, n}$$

[1]) *Fund. Math.* t. VIII, p. 363.

et il existe un indice m, tel que

$$x \in \delta^\eta_{m_1, m_2, \dots, m_k, m};$$

donc, d'après $\eta < \gamma$ et (12) (pour $\xi = \eta$) aussi

$$x \in \delta^{\eta+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k, m} = \delta^\gamma_{m_1, m_2, \dots, m_k, m}$$

ce qui donne, d'après (11) et d'après

$$\delta^{\gamma+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \delta^\gamma_{m_1, m_2, \dots, m_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^\gamma_{m_1, m_2, \dots, m_k, n},$$

$x \in \delta^{\gamma+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k}$, contrairement à (11).

Le nombre γ est donc de seconde espèce et on a, d'après (3):

(13) $$\delta^\gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \prod_{\xi<\gamma} \delta^\xi_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

et, en particulier, d'après (11):

(14) $$x \in \delta^\xi_{m_1, m_2, \dots, m_k} \quad \text{pour} \quad \xi < \gamma.$$

Soit μ un nombre ordinal donné $< \gamma$. D'après (12) et (14) (pour $\xi = \mu$), on a (vu la formule (2)):

$$x \in \delta^{\mu+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \delta^\mu_{m_1, m_2, \dots, m_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^\mu_{m_1, m_2, \dots, m_k, n}$$

et il existe un indice m_{k+1}, tel que

(15) $$x \in \delta^\mu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}.$$

Je dis que

(16) $$x \in \delta^\gamma_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}.$$

En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait, d'après (13), un plus petit indice $\nu < \gamma$ et > 0, tel que

(17) $$x \bar{\in} \delta^\nu_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}.$$

On aurait donc

(18) $$x \in \delta^\xi_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}} \quad \text{pour} \quad \xi < \nu.$$

Les formules (3), (17) et (18) prouvent que ν ne peut pas être un nombre de seconde espèce: on a donc $\nu = \tau + 1$ et, d'après (18) (pour $\xi = \tau$):

$$x \in \delta^\tau_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}}$$

où $\tau < \nu < \gamma$, donc, d'après (12) (pour $\xi = \tau$):

$$x \in \delta^{\tau+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}} = \delta^{\nu}_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}},$$

contrairement à (17).

On a donc la formule (16), d'où résulte, d'après (11) et (2), que

$$x \in \delta^{\gamma+1}_{m_1, m_2, \dots, m_k}$$

contrairement à (11).

L'hypothèse que le lemme I n'est pas vrai implique donc une contradiction. Le lemme I est ainsi démontré.

Lemme II. On a

$$S^\alpha - T^\alpha \subset S^\beta$$

quels que soient les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ et $\beta < \Omega$.

Démonstration. Soit $x \in S^\alpha - T^\alpha$: on a donc $x \in S^\alpha$ et, d'après (4), il existe un indice m, tel que $x \in \delta^\alpha_m$. Je dis que $x \in \delta^\beta_m$ quel que soit le nombre ordinal $\beta < \Omega$.

De (2) et (3) résulte (par l'induction transfinie facile) que $\delta^\alpha_m \subset \delta^\beta_m$ pour $\beta \leqslant \alpha$: de $x \in \delta^\alpha_m$ résulte donc que $x \in \delta^\beta_m$ pour $\beta \leqslant \alpha$. Soit maintenant β un nombre ordinal $> \alpha$ et supposons qu'on a $x \in \delta^\xi_m$ pour $\xi < \beta$ (ce qui est vrai pour $\beta = \alpha + 1$). Si β est un nombre de seconde espèce, il en résulte, d'après (3), que $x \in \delta^\beta_m$. Si $\beta = \gamma + 1$, on a, d'après notre hypothèse, $x \in \delta^\gamma_m$. Or, de $\beta = \gamma + 1 > \alpha$ résulte que $\gamma \geqslant \alpha$, donc, d'après le lemme I: $T^\gamma \subset T^\alpha$ et, comme d'après $x \in S^\alpha - T^\alpha$ on a $x \,\bar{\in}\, T^\alpha$, on trouve, à plus forte raison, $x \,\bar{\in}\, T^\gamma$. Or, d'après (5), T^γ contient le terme $\delta^\gamma_m - \delta^{\gamma+1}_m$ et, comme nous savons, $x \in \delta^\gamma_m$: de $x \,\bar{\in}\, T^\gamma$ résulte donc que $x \in \delta^{\gamma+1}_m$, c'est-à-dire (d'après $\beta = \gamma + 1$) que $x \in \delta^\beta_m$.

La formule $x \in \delta^\beta_m$ est ainsi établie, par l'induction transfinie, pour tout nombre ordinal $\beta < \Omega$. D'après (4) il en résulte que $x \in S^\beta$ pour $\beta < \Omega$. Le lemme II est ainsi démontré.

Il est à remarquer que le lemme II résulte tout de suite des formules (7) et (8) que M. Sierpiński a démontrées dans le vol. VIII des *Fund. Math.*, p. 363.

Passons maintenant à la démonstration de la formule (7). Soient donc α et $\beta > \alpha$ deux nombres ordinaux $< \Omega$ et soit $x \in S^\alpha - T^\alpha$. D'après le lemme II on a donc $x \in S^\beta$. Or, d'après le lemme I, on a $T^\beta \subset T^\alpha$ et de $x \in S^\alpha - T^\alpha$ résulte que $x \,\bar{\in}\, T^\alpha$, donc, à plus forte raison, $x \,\bar{\in}\, T^\beta$. On a donc $x \in S^\beta$ et $x \,\bar{\in}\, T^\beta$, donc $x \in S^\beta - T^\beta$. La formule (7) est ainsi établie.

Comme une conséquence immédiate des formules (7) et (6) on obtient que *si la suite transfinie $S^\alpha - T^\alpha$ $(\alpha < \Omega)$ est stationnaire*[1]*, il existe un indice $\mu < \Omega$, tel que $E = S^\mu - T^\mu$.*

Dans le cas où le système déterminant $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est régulier et formé de segments d'une droite, on peut démontrer que, pour que la suite transfinie $S^\alpha - T^\alpha$ $(\alpha < \Omega)$ soit stationnaire, il faut et il suffit qu'il existe un indice $\nu < \Omega$, tel que $T^\tau = 0$ pour $\nu < \alpha < \Omega$.

En effet, si la suite transfinie $S^\alpha - T^\alpha$ $(\alpha < \Omega)$ est stationnaire, il existe un indice $\mu < \Omega$, tel que $E = S^\alpha - T^\alpha$ pour $\mu < \alpha < \Omega$ et (le système déterminant étant formé de segments d'une droite) il en résulte que l'ensemble E est mesurable B. Dans ce cas il existe, comme on sait, un indice $\lambda < \Omega$, tel que $E = S^\alpha$ pour $\lambda < \alpha < \Omega$. On a donc pour $\lambda + \mu < \alpha < \Omega$ à la fois $E = S^\alpha - T^\alpha$ et $E = S^\alpha$, ce qui donne (d'après $T^\alpha \subset S^\alpha$, ce qui résulte de la régularité du système déterminant) $T^\alpha = 0$ pour $\lambda + \mu < \alpha < \Omega$. La condition est donc nécessaire.

Or, elle est évidemment suffisante, puisque, si $T^\alpha = 0$ pour $\nu \leqslant \alpha < \Omega$, on a, d'après (7): $S^\nu \subset S^\alpha$ pour $\nu < \alpha < \Omega$ et, d'autre part, on a toujours $S^\nu \supset S^\alpha$ pour $\nu < \alpha < \Omega$: on a donc $S^\alpha = S^\nu$ pour $\nu < \alpha < \Omega$, donc aussi $S^\alpha - T^\alpha = S^\nu - T^\nu$ pour $\nu < \alpha < \Omega$ (puisque $T^\alpha = 0$ pour $\nu \leqslant \alpha < \Omega$).

Il est encore à remarquer que la suite transfinie S^α $(\alpha < \Omega)$ peut être stationnaire sans que la suite transfinie T^α $(\alpha < \Omega)$ le soit[2].

[1]) Une suite transfinie u_ξ $(\xi < \Omega)$ est dite (d'après M. Lusin) *stationnaire*, s'il existe un indice $\lambda < \Omega$, tel que $u_\xi = u_\lambda$ pour $\lambda < \xi < \Omega$.

[2]) Quant à la suite transfinie T^α $(\alpha < \Omega)$, il résulte sans peine de notre lemme I et d'une formule de M. Sierpiński (*Fund. Math.* t. VIII, p. 365, formule 14) que, si elle est stationnaire, il existe un indice $\nu < \Omega$, tel que $T^\alpha = 0$ pour $\nu < \alpha < \Omega$.