$f(x)$ über (a, b) I-integrierbar sein und es ist dann:

$$(5)\qquad {}_{(I)}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} {}_{(I)}\int_a^b f_n(x)\,dx\ ^{15}).$$

Beweis. Nach Satz 6 sind die nicht-negativen Funktionen $f_n - g$ und $h - g$ integrierbar nach Lebesgue. Da $f_n - g \leq h - g$ ist, wird auch $f - g$ nach Lebesgue integrierbar sein und es ist:

$$\int_a^b (L)[f-g]\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (L)[f_n - g]\,dx.$$

Daraus folgt leicht die Gültigkeit von (5).

[15]) Vgl. Burkill, l. c. [1]), S. 278.

25. VI. 1932.

Über das allgemeine Denjoysche Integral.

Von

J. Ridder (Groningen).

§ 1. Eine Änderung in die Definitionen der Majoranten und Minoranten machte es uns möglich die Perronsche Integraldefinition derartig zu verallgemeinern daß sie aequivalent wurde mit der allgemeinen Denjoyschen Definition [1]). Die Lektüre einer Arbeit von S. Saks [2]) zeigte uns wie sich für einige der von ihm (l. c.) für das spezielle Denjoysche Integral und für damit zusammenhängende Funktionen bewiesenen Sätze auf einfache Weise ein Analogon beim allgemeinen D-Integral finden läßt (siehe im folgenden die Sätze II—IV), wenn man nur die soeben genannten, verallgemeinerten Majoranten und Minoranten benutzt und daneben, statt der von Saks eingeführten Eigenschaften $(N^{+\infty})$, $(N^{-\infty})$ und (N^{∞}) [3]). die unten definierten Eigenschaften $(N_g^{+\infty})$, $(N_g^{-\infty})$ und (N_g^{∞}).

§ 2. **Definition 1.** Eine Funktion $F(x)$ genügt in einem Intervall (a, b) der Bedingung (T_2) von Banach [4]), wenn die Menge der Funktionswerte, welche in diesem Intervall nicht-abzählbar unendlich oft angenommen werden, das Maß Null hat.

Definition 2. Eine Funktion $F(x)$ genügt in (a, b) der Bedingung $(N^{+\infty})$ von Saks [3]), wenn die Menge der Funktionswerte in den Punkten von (a, b), wo die Ableitung existiert und $+\infty$ wird, das Maß Null hat.

[1]) Siehe J. Ridder, Math. Ztschr. 34 (1931), S. 234—269.
[2]) Siehe S. Saks, Fund. Math. 17 (1931), S. 124—151.
[3]) Siehe S. Saks, loc. cit. [2]), S. 128.
[4]) Siehe S. Banach, Fund. Math. 8 (1926), S. 167.

Definition 3. $F(x)$ genügt in (a, b) der Bedingung $(N^{-\infty})$, wenn $F(x)$ in (a, b) die Eigenschaft $(N^{+\infty})$ hat [3]).

Definition 4. $F(x)$ hat in (a, b) die Eigenschaft (N^{∞}), wenn sie dort gleichzeitig den Bedingungen $(N^{+\infty})$ und $(N^{-\infty})$ genügt [3]).

Definition 5. $F(x)$ ist *unterhalb totalstetig* [*oberhalb totalstetig*] *auf der Menge* E, wenn stets die Summe der Funktionsdifferenzen

$$\sum_{(k)} \{f(b_k) - f(a_k)\}$$

in den zu E gehörenden Endpunkten a_k, b_k (mit $a_k < b_k$) von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen einen unteren Limes $\geqq 0$ [einen oberen Limes $\leqq 0$] hat, sobald die Längensumme der Teilintervalle gegen Null konvergiert.

Definition 6. $f(x)$ sei definiert in (a, b). Eine *zu* $f(x)$ *im Intervall* (a, b) *adjungierte Majorante* $\psi_1(x)$ [5]), hat die Eigenschaften: *a*) $\psi_1(a) = 0$; *b*) $\psi_1(x)$ ist für $a \leqq x \leqq b$ stetig und unterhalb totalstetig; *c*) die beiden unteren Derivierten von $\psi_1(x)$ sind fast überall in $(a, b) \geqq f(x)$.

Lemma A. *Eine Funktion* $F(x)$, *welche:*

1⁰ *stetig ist für* $a \leqq x \leqq b$;

2⁰ *die Eigenschaften* (T_2) *und* $(N^{+\infty})$ *hat;*

und zu der:

3⁰ *sich eine in* (a, b) *eindeutige Funktion* $f(x)$ *finden läßt, gleich der Ableitung von* $F(x)$ *fast überall wo diese existiert, und im Besitze einer Majorante* $\psi_1(x)$ *in* (a, b);

ist von beschränkter Variation in (a, b) *mit nicht-zunehmendem singulärem Bestandteil* [6]).

Außerdem wird für $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$:

$$F(x_2) - F(x_1) \leqq \psi_1(x_2) - \psi_1(x_1)$$

sein.

[5]) Siehe J. Ridder, loc. cit. [1]), S. 237—244.

[6]) Oder — was dasselbe bedeutet — ist oberhalb totalstetig in (a, b). Siehe W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910), S. 294—297.

Beweis. Da eine Majorante $\psi_1(x)$ unterhalb totalstetig, also von beschränkter Variation ist, wird $\underline{D}\,\psi_1(x)$ [7]) integrierbar (L) sein. Da fast überall auf der Menge E, in deren Punkten $F'(x) = f(x)$ und positiv ist:

$$0 < f(x) \leqq \underline{D}\,\psi_1(x)$$

ist, wird $F'(x)$ über E integrierbar (L) sein. Nach einem Satze von Saks [8]) folgt daraus und aus den Bedingungen (T_2) und $(N^{+\infty})$, daß $F(x)$ eine Funktion beschränkter Variation mit nicht-zunehmendem singulärem Bestandteil ist. Weiter folgt aus den Eigenschaften der Funktionen beschränkter Variation für $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$:

$$F(x_2) - F(x_1) \leqq \int_{x_1}^{x_2} (L)\, f(x)\, dx \leqq \int_{x_1}^{x_2} (L)\, \underline{D}\,\psi_1(x)\, dx \leqq \psi_1(x_2) - \psi_1(x_1).$$

Q. e. d.

$-F(x) + F(a)$ ist in (a, b) eine Majorante von $-f(x)$. Nimmt man an, daß die Funktion $F(x)$ in (a, b) außerdem der Bedingung $(N^{-\infty})$, also $-F(x)$ der Bedingung $(N^{+\infty})$ genügt, so folgt aus dem Lemma A, daß $-F(x)$ nur einen nicht-zunehmenden singulären Bestandteil haben kann. $F(x)$ muß somit totalstetig sein. Da, umgekehrt, jede totalstetige Funktion den Bedingungen (T_2) und $(N^{\infty}) = (N^{+\infty}) + (N^{-\infty})$ genügt [8]), folgt der

Satz I. *Damit eine für* $a \leqq x \leqq b$ *stetige Funktion* $F(x)$ *totalstetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie den Bedingungen* (T_2) *und* (N^{∞}) *genügt und daß sich in* (a, b) *eine eindeutige Funktion* $f(x)$ *finden läßt, welche fast überall mit* $F'(x)$ *zusammenfällt wo diese existiert und zu der in* (a, b) *eine Majorante* $\psi_1(x)$ *adjungiert ist* [9])

§ 3. Definition 7. Die für $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $F(x)$ hat die Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$ *(die Eigenschaft* $N^{+\infty}$ *im geänderten Sinne)*, wenn sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge M, überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_j), derartig, daß: 1⁰ zu jedem P die Menge

[7]) D. i. die kleinere der beiden unteren Derivierten von $\psi_1(x)$ in x.

[8]) Siehe S. Saks, loc. cit. [2]), S. 135 (th. 6).

[9]) Dieser Satz ist eine leichte Verallgemeinerung von: Saks, loc. cit. [2]), S. 135 corollaire 2.

der Funktionswerte in denjenigen Punkten von P_j, wo $F(x)$ „in bezug auf dieses P_j" eine positiv unendliche Ableitung hat, eine Nullmenge (auf der y-Achse) ist, 2° auf jeder perfekten Teilmenge T_j eines P_j $F(x)$ der analogen Bedingung genügt [10].

Definition 8. Die Funktion $F(x)$ hat in (a, b) die Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$, wenn $-F(x)$ die Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$ hat.

Definition 9. Genügt $F(x)$ in (a, b) den beiden Bedingungen $(N_g^{+\infty})$ und $(N_g^{-\infty})$, so hat sie die Eigenschaft (N_g^{∞}) in (a, b).

Definition 10. Eine Funktion $F(x)$ ist *auf einer Menge E von beschränkter Variation* (abgekürzt: BV), wenn stets die Summen von endlich vielen Gliedern:

$$\sum_{(k)} |f(b_k) - f(a_k)|,$$

wobei die Intervalle (a_k, b_k) nicht übereinander greifen und zu E gehörende Endpunkte haben, unterhalb einer festen (positiven) Schranke bleiben.

Definition 11. Eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion ist *in (a, b) von beschränkter Variation im verallgemeinerten Sinne* (abgekürzt: BVV), wenn sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken läßt von abzählbar vielen, perfekten Mengen, auf denen $F(x)$ von beschränkter Variation sei.

Satz II. *Damit eine stetige Funktion BVV ein unbestimmtes allgemeines D-Integral sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie der Bedingung (N_g^{∞}) genügt* [11].

Beweis. Jedes unbestimmte allgemeine D-Integral genügt der Bedingung (N) von Lusin [12]) und hat damit auch die Eigenschaft (N_g^{∞}) [10]). Die Bedingung ist notwendig.

[10]) Jede endliche Funktion, welche die Bedingung (N) von Lusin erfüllt (d. h. die Eigenschaft hat, daß die Menge der Funktionswerte in den Punkten einer jeden Nullmenge auf der x-Achse wieder eine Nullmenge ist), hat auch die Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$. Denn die Punkte, in denen eine auf einer Menge E definierte, endlichwertige Funktion eine positiv unendliche Ableitung hat in bezug auf E, ist eine Nullmenge (s. z. B. Saks, Fund. Math. 5 (1924), S. 98—104).

[11]) Man vergleiche Saks, loc. cit. [2]), S. 133 théorème 4.

[12]) Siehe A. Denjoy, Ann. Ec. Norm. Sup. (3) 33 (1916), S. 192 und (3) 34 (1917), S. 184.

Jede stetige Funktion BVV hat, nach einer Bemerkung von Saks [13]), die Eigenschaft (T_2). Daraus und aus den Definitionen 9 und 11 folgt, daß sich zu einer für $a \leqq x \leqq b$ stetigen Funktion $F(x)$, welche die Eigenschaften (BVV) und (N_g^{∞}) hat, eine Überdeckung von (a, b) durch abzählbar viele perfekte Mengen (K_j) und eine abzählbare Menge M finden läßt, derartig, daß zu jedem K_j die Funktion $F_j(x)$, welche auf K_j mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu K_j komplementären Intervallen von (a, b), die Eigenschaften (T_2) und (N^{∞}) hat und von beschränkter Variation ist in (a, b). Ihre Ableitung existiert somit fast überall in (a, b) und ist integrierbar (L), hat also eine Majorante $\psi_1(x)$ (im Sinne der Definition 5) [14]). Nach Satz I muß somit für jedes j $F_j(x)$ totalstetig sein in (a, b). Und daraus ergibt sich [15]), daß $F(x)$ ein allgemeines D-Integral ist. Die Bedingung ist hinreichend.

§ 4. **Definition 12.** Die stetige Funktion $F(x)$ ist *in (a, b) unterhalb totalstetig im verallgemeinerten Sinne* (abgekürzt: UTV), wenn (a, b) sich, ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken läßt von abzählbar vielen, perfekten Mengen, auf denen $F(x)$ unterhalb totalstetig sei.

Definition 13 $f(x)$ sei definiert in (a, b). Eine *zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte Majorante* $\psi_2(x)$ hat die Eigenschaften: a) $\psi_2(a) = 0$; b) $\psi_2(x)$ ist für $a \leqq x \leqq b$ stetig und UTV; c) es läßt sich (a, b), ausgenommen vielleicht in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen, perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß $\psi_2(x)$ auf jedem H_k fast überall untere Derivierte „in bezug auf dieses H_k" hat $\geqq f(x)$.

Lemma B. *Eine Funktion $F(x)$, welche:*

1° *stetig ist für $a \leqq x \leqq b$;*

2° *die Eigenschaften (T_2) und $(N_g^{+\infty})$ hat;*

und zu der:

3° *sich eine in (a, b) eindeutige Funktion $f(x)$ finden läßt, gleich der approximativen Ableitung* [16]) *von $F(x)$ fast überall wo diese*

[13]) Siehe S. Saks, loc. cit. [2]), S. 133.

[14]) Siehe J. Ridder, loc. cit. [1]), S. 243 (Satz C).

[15]) Siehe z. B. J. Ridder, loc. cit. [1]), S. 262.

[16]) Es wäre auch möglich eine „Ableitung im geänderten Sinne" statt der approximativen Ableitung zu gebrauchen; wir gehen hierauf nich näher ein.

existiert und im Besitze einer Majorante $\psi_2(x)$ (im Sinne der Def. 13) *in* (a, b);

ist in (a, b) *BVV*.

Außerdem wird für $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$:

$$F(x_2) - F(x_1) \leqq \psi_2(x_2) - \psi_2(x_1) \tag{1}$$

sein [17]).

Beweis. Wenn die Ungleichung (1) nicht für jedes Punktepaar x_1, x_2 von (a, b) gültig wäre, so bildeten die Punkte, in deren jede Umgebung Punkte x_1, x_2 lägen mit

$$F(x_2) - F(x_1) > \psi_2(x_2) - \psi_2(x_1) \quad \text{und} \quad x_1 < x_2$$

eine nicht-leere, abgeschlossene Menge K. Da K keinen isolierten Punkt enthalten kann, wäre sie perfekt.

In den zu K komplementären Intervallen würde zwischen den Endpunkten eines jeden Teilintervalles (1) gelten müssen. Es existierte ein Stück $\bar{\omega}$ (mit den Endpunkten c und d) von K, auf dem überall dicht lägen eine der perfekten Mengen, auftretend in die Definition der Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$, eine perfekte Menge, auf der $\psi_2(x)$ unterhalb totalstetig ist, und außerdem eine perfekte Menge, auf der $\psi_2(x)$ untere Derivierte in bezug auf diese Menge hat, welche fast überall auf ihr und also auch fast überall auf $\bar{\omega} \geqq f(x)$ sind [18]).

Die Funktion $F_{\bar{\omega}}(x)$, welche in den Punkten von $\bar{\omega}$ mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu $\bar{\omega}$ komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (c, d), hat die Eigenschaft, daß auf der Teilmenge von $\bar{\omega}$, wo ihre Ableitung existiert, diese fast überall mit der approximativen Ableitung von $F(x)$ zusammenfällt. $F_{\bar{\omega}}(x)$ genügt in (c, d) den Bedingungen des Lemmas A. Man erhält die

[17]) Man vergleiche Saks, loc. cit. [2]), S. 144 théorème 7. — Das von Saks benutzte Lemma 2 (loc. cit. S. 141) enthält unter 2° die Worte „et est non-négative". Man kann leicht ein Beispiel konstruieren, welches zeigt daß mit diesen Worten das Lemma unrichtig ist. Läßt man sie fort, so ändert sich nichts an dem Saks'schen Beweise des Lemmas; nur ist die Betrachtung der Ungleichung (13) auf S. 142 ganz überflüßig.

[18]) Hier wird der Hilfssatz angewandt: „Wenn sich das abgeschlossene Intervall (a, b) zerlegen läßt in endlich oder abzählbar unendlich viele Mengen (H_k), so hat jede in (a, b) enthaltene, perfekte Menge ein Stück, auf dem eine der Mengen (H_k) überall dicht liegt". Siehe Ridder, loc. cit. [1]), 246.

Funktion $\psi_1(x)$, wenn man sie an $\psi_2(x)$ gleichsetzt in den Punkten von $\bar{\omega}$ und sie linear ändern läßt in den zu $\bar{\omega}$ komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (c, d); sie ist Majorante im Sinne der Definition 6 für die Funktion $f_{\bar{\omega}}(x)$, welche in den Punkten von $\bar{\omega}$ mit $f(x)$ zusammenfällt und in den inneren Punkten eines komplementären Intervalles $u_k \equiv (c_k, d_k)$ gleich $\dfrac{F(d_k) - F(c_k)}{d_k - c_k}$ ist.

(1) würde für jedes Punktepaar $x_1 < x_2$ von $\bar{\omega}$ gelten müssen. Wir gelangen zu einem Widerspruch.

Auf dieselbe Weise wie zu der Menge K läßt sich nun zu jeder perfekten Teilmenge E von (a, b) ein Stück $\bar{\omega}$ finden, derartig, daß auf die zugehörige Funktion $F_{\bar{\omega}}(x)$ das Lemma A angewandt werden kann. Daraus folgt dann, daß auf $\bar{\omega}$ $F(x)$ von beschränkter Variation ist. Mittels transfiniter Induktion zeigt man nun leicht daß $F(x)$ in (a, b) *BVV* ist

Definition 14. $f(x)$ sei definiert in (a, b). Eine *zu* $f(x)$ *in* (a, b) *adjungierte Majorante* $\psi_3(x)$ hat die Eigenschaften: a) $\psi_3(a) = 0$; b) $\psi_3(x)$ ist stetig für $a \leqq x \leqq b$; c) es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (E_j), derartig, daß auf jedem E_j die in bezug auf dieses E_j genommenen unteren Derivierten von $\psi_3(x) \neq -\infty$ und $\geqq f(x)$ sind.

Es läßt sich zeigen [19]), daß jede Majorante $\psi_3(x)$ von $f(x)$ gleichzeitig eine Majorante $\psi_2(x)$ (im Sinne also der Definitionen 13) von $f(x)$ ist. Daraus folgt:

(Lemma B*). *Das Lemma B bleibt gültig, wenn man anstatt einer Majorante* $\psi_2(x)$ *eine Majorante* $\psi_3(x)$ *benutzt* [17]).

Satz III. *Damit eine für* $a \leqq x \leqq b$ *stetige Funktion* $F(x)$ *ein unbestimmtes allgemeines D-Integral sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie den Bedingungen* (T_2) *und* (N_g^∞) *genügt und daß es in* (a, b) *eine eindeutige Funktion gibt, welche fast überall mit der approximativen Ableitung von* $F(x)$ *zusammenfällt wo diese existiert und zu der in* (a, b) *eine Majorante* $\psi_3(x)$ *nach Def.* 14 [oder eine Majorante $\psi_2(x)$ nach Def. 13] *adjungiert ist* [20]).

[19]) Vgl. Ridder, loc. cit. [1]), S. 263 (Beweis des Satzes XXIX).

[20]) Ein Spezialfall der Satzes erhält man, wenn man statt (T_2) und (N_g^∞) die Bedingung (N) gebraucht. Denn jedes unbestimmte allgemeine D-Integral besitzt

Beweis. Jedes unbestimmte allgemeine D-Integral genügt den Bedingungen (T_2) und (N_g^{∞}) [20]. Außerdem hat sie fast überall eine approximative Ableitung [21]. Jede Funktion, welche mit der approximativen Ableitung zusammenfällt wo diese existiert, hat eine Majorante $\psi_3(x)$ im Sinne der Def. 14 [22] [also auch eine Majorante $\psi_2(x)$ im Sinne der Def. 13]. Die Bedingungen sind notwendig.

Wenn, umgekehrt, $F(x)$ die genannten Bedingungen erfüllt, so ist sie nach Lemma B* [B] BVV in (a, b). Nach Satz II ist sie nun auch ein allgemeines D-Integral.

§ 5. **Lemma C.** *Die stetigen Funktionen BVV und mit der Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$ sind identisch mit den stetigen Funktionen UTV* [23])

Beweis. Es sei $F(x)$ in (a, b) BVV und mit der Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$. Aus den Definitionen 11 und 7 geht hervor, daß sich (a, b) überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen M_j und einer abzählbaren Menge N, derartig, daß zu jedem j die stetige Funktion $F_j(x)$, welche auf M_j mit $F(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den komplementären Intervallen, in (a, b) von beschränkter Variation ist und die Eigenschaft $(N^{-\infty})$ hat. Da $-F_j(x)$ von beschränkter Variation ist, hat sie die Eigenschaft (T_2) [13] und ihre fast überall existierende Ableitung hat eine Majorante $\psi_1(x)$ (im Sinne der Def. 5) [14]. Nach Lemma A ist $-F_j(x)$ in (a, b) Summe einer totalstetigen und einer nicht-zunehmenden Funktion, also $F_j(x)$ ist unterhalb totalstetig in (a, b). $F(x)$ muß somit UTV sein in (a, b).

Umgekehrt liefert jede stetige Funktion UTV eine Zerlegung von (a, b) in abzählbar viele perfekte Mengen (E_j) und eine abzählbare Menge A, derartig, daß zu jedem j die Funktion $F_{E_j}(x)$, welche auf E_j mit $F(x)$ zusammenfällt und sich in den komplementären Intervallen linear ändert, UT ist in (a, b), also Summe eines totalstetigen und eines nicht-abnehmenden singulären Bestandteils [6]);

die Eigenschaft (N) [11]), während jede stetige Funktion mit der Eigenschaft (N) auch die Bedingungen (N_g^{∞}) [10]) und (T_2) (s. Banach, loc. cit. [4]), S. 169) erfüllt. Man vergleiche Satz III mit: Saks, loc. cit. [2]). S. 145 théorème 8; auch mit: Ridder, Math. Ztschr. 35 (1932), S. 56 Satz III$^{\text{bis}}$, welcher von obigem Satze umfaßt wird.

[21]) Siehe z. B. J. Ridder, loc. cit. [1]) S. 261.

[22]) Siehe J. Ridder, loc. cit. [1]) §§ 10 und 11.

[23]) Man vergleiche S. Saks, loc. cit. [2]), S. 146 théorème 9.

sie hat somit die Eigenschaft $(N^{-\infty})$ [24]). Auch zu jeder perfekten Teilmenge T_j eines E_j gehört in (a, b) eine analog gebildete Funktion $F_{T_j}(x)$, welche Summe einer totalstetigen und einer nicht-abnehmenden Funktion, also von der Eigenschaft $(N^{-\infty})$ ist $F(x)$ hat dadurch die Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$ in (a, b). Und außerdem ist sie BVV.

Bemerkung. Die Summe von zwei stetigen Funktionen UTV oder, was dasselbe bedeutet, BVV und mit der Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$ ist wieder eine Funktion UTV oder BVV mit der Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$ [25]).

Wir bewiesen [26]), dasz der Gebrauch der Majoranten $\{\psi_2(x)\}$, definiert in Def. 13, und von analog gebildeten Minoranten $\{\varphi_2(x)\}$ in die Perronsche Integraldefinition diese aequivalent machte an die allgemeine Denjoysche Definition. Auf Grund von Lemma C kann dieses Resultat nun auch wie folgt formuliert werden:

Satz IV. *Damit die Funktion $f(x)$ ein allgemeines D-Integral habe im Intervall (a, b), ist notwendig und hinreichend, daß sich zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ finden lassen zwei stetige Funktionen: $\psi_2(x)$, BVV und mit der Eigenschaft $(N_g^{-\infty})$, und $\varphi_2(x)$, BVV und mit der Eigenschaft $(N_g^{+\infty})$, derartig, daß:*

1° $\psi_2(a) = \varphi_2(a) = 0$ *und* $\psi_2(b) - \varphi_2(b) < \varepsilon$

sei, und dass:

2° *es eine Überdeckung von (a, b) durch eine abzählbare Menge M und abzählbar viele perfekte Mengen (E_j) gebe mit der Eigenschaft:*

$$\underline{D}_{E_j}\psi_2(x)\,^{27)} \geqq f(x) \geqq \overline{D}_{E_j}\varphi_2(x) \quad \textit{fast überall auf } E_j \textit{ (für jedes } j)^{28)}.$$

[24]) Das folgt unmittelbar aus S. Saks, loc. cit. [2]), S. 135 (th. 6).

[25]) Vgl. S. Saks, loc. cit. [2]), S. 147 (th. 10; note 29).

[26]) Siehe J. Ridder, loc. cit. [1]), S. 261, 262.

[27]) D. i. die kleinere der beiden unteren Derivierten von $\psi_2(x)$ „in bezug auf die Punkte von E_j" (oder diejenige welche existiert, wenn es nur eine solche gibt).

[28]) Man vergleiche hiermit für das spezielle Denjoysche Integral S. Saks, loc. cit. [2]), S. 148 théoréme 12 und J. Ridder, loc. cit. [1]), S. 255 Satz E. [Die in den zitierten Sätzen angewandten Klassen von Majoranten und Klassen von Minoranten sind verschieden definiert, aber identisch].

29. IX. 1932.