Je ne considère pas comme inutiles les efforts faits pour étudier les classes de Baire, les ensembles analytiques, projectifs: ce ne sont pas précisément les existences qui ont la valeur par elles-mêmes, mais les mouvements de la pensée qui, étant transportée dans le domaine des entiers positifs, nous permettent, *par analogie*, de découvrir des phénomènes nouveaux, inaccessibles par une autre méthode. Mais je vous ai déjà écrit de ces choses.

Moscou, le 14 mai 1933.

Sur une famille d'ensembles singuliers.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Nous dirons qu'un ensemble (métrique) E jouit de la propriété λ, lorsque chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ dans E. M. Lusin a démontré dans la note précédente que la propriété λ implique celle d'être de I-re catégorie sur tout ensemble parfait et que l'implication inverse est en défaut [1]) (même dans le cas d'un ensemble contenu dans la droite).

L'existence des ensembles à propriété λ et de puissance $\aleph_1$ situés dans l'espace des nombres réels (voir aussi la note précédente) se démontre très facilement en considérant une suite transfinie du type Ω composée d'ensembles G_δ croissants (de mesure nulle) et en extrayant de chaque terme de cette suite un point qui n'appartient pas aux termes précédents Il est remarquable aussi que l'on est conduit à la propriété λ en étudiant au point de vue géométrique le problème de *l'ordre de croissance* des suites d'entiers positifs. Considérons notamment la famille des suites infinies d'entiers positifs comme un espace métrique en identifiant la suite $s=[s^{(1)}, s^{(2)},\ldots]$ avec le nombre irrationnel développé en fraction continue:

$$\frac{1|}{|s^{(1)}}+\frac{1|}{|s^{(2)}}+\cdots$$

[1]) Notons ici que la propriété d'être un ensemble de I-re catégorie sur tout ensemble parfait équivaut (dans les espaces complets séparables) 1°: à celle d'être un ensemble dont tout sous-ensemble jouit de la propriété de Baire sur chaque ensemble parfait, ainsi que 2°: à celle d'être un ensemble à propriété de Baire sur chaque ensemble parfait tout en étant dépourvu de sous-ensembles parfaits. Voir ma *Topologie I* (sous presse), Chap. III.

Une propriété plus restrictive encore que la propriété λ est la suivante: chaque sous-ensemble borelien (de l'espace considéré) est un G_δ (dans cet espace). L'existence des ensembles jouissant de cette dernière propriété a été démontrée par M. Sierpiński à l'aide de l'hypothèse du continu, Fund. Math. 5 (1924), p. 184.

Posons, en outre, $s \lessdot t$ lorsque, pour n suffisamment grand, on a constamment $s^{(n)} < t^{(n)}$. On prouve facilement à l'aide du théorème de M. Zermelo l'existence d'une *échelle indénombrable*, c. à d. d'une famille indénombrable de suites bien ordonnée selon la relation $s \lessdot t$. Or, *toute famille de ce genre jouit de la propriété* λ. La démonstration de ce fait ne diffère pas au fond de celle de M. Lusin exposée au vol. II des Fundamenta (p. 155).

Je veux attirer ici l'attention à quelques énoncés liés aux transformations des espaces à propriété λ.

1. *Si un espace* $\mathcal{Y}$ *jouissant de la propriété* λ *est une image biunivoque et continue d'un espace (arbitraire)* $\mathcal{X}$, *l'espace* $\mathcal{X}$ *jouit également de la propriété* λ.

En effet, P étant un sous-ensemble dénombrable de l'espace $\mathcal{X}$ et f désignant la transformation en question, $f(P)$ comme ensemble dénombrable, est un G_δ (dans $\mathcal{Y}$) et, la fonction f étant continue, l'ensemble $f^{-1}[f(P)] = P$ est un G_δ dans $\mathcal{X}$.

2. $y = f(x)$ *étant une transformation arbitraire d'un espace* $\mathcal{X}$ *jouissant de la propriété* λ, *l'image géométrique de cette transformation, c. à d. l'ensemble* $I = \underset{xy}{E}[y = f(x)]$ *jouit de la propriété* λ.

Car la projection de I sur $\mathcal{X}$ est une transformation biunivoque et continue.

3. *Chaque ensemble de puissance* $\aleph_1$ *est une image biunivoque et continue d'un espace à propriété* λ.

Il existe, en effet, un espace $\mathcal{X}$ à propriété λ et de puissance $\aleph_1$ (comme nous l'avons indiqué auparavant). Or $\mathcal{Y}$ étant l'ensemble donné et $f(x)$ une transformation biunivoque de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, l'ensemble $I = \underset{xy}{E}[y = f(x)]$ jouit de la propriété λ et $\mathcal{Y}$ en est une image biunivoque et continue.

Remarquons finalement que le dernier énoncé implique, dans l'hypothèse du continu, que *„la propriété de Baire sur tout ensemble parfait" n'est pas invariante relativement aux transformations biunivoques et continues* (bien qu'elle soit, dans les espaces complets, un invariant de l'homéomorphie). Car, d'une part, il existe des ensembles (de puissance $\aleph_1$) dépourvus de la propriété de Baire et, d'autre part, chaque ensemble à propriété λ jouit de la propriété de Baire sur tout ensemble parfait, puisqu'il y est de I-re catégorie.

Sur une classe de fonctions considérée dans l'étude du problème de Dirichlet.

Par

Otton Nikodym (Varsovie).

Le traîtement du problème de Dirichlet concernant l'équation $\Delta f = 0$ à l'aide du principe connu du minimum a trouvé des voies nouvelles dès l'apparation des Mémoires de M. M. B. Levi et G. Fubini [1]). Le premier de ces auteurs a trouvé que pour le dit problème il est avantageux d'introduire des fonctions spéciales que je propose d'appeler fonctions (BL) et dont la définition sera donnée dans ce qui va suivre. J'ai présenté au *II Congrès des Mathématiciens Roumains à Turnu Severin* (1932) une méthode permettant, à l'aide des fonctions (BL) de traiter le problème de Dirichlet [2]) pour des équations symétriques du type elliptique d'une manière très simple par le principe du minimum et s'appuyant sur la théorie générale des espaces vectoriels abstraits.

Je me propose ici de développer quelques propriétés des fonctions (BL) non seulement à cause de leur importance, mais surtout parce qu'elles sont intéressantes en elles mêmes.

§ 1. Notions préliminaires.

1. Soit D un ensemble ouvert et borné dans l'espace euclidien à 3 dimensions pourvu d'un système U de coordonnées cartésiennes.

[1]) Beppo Levi. *Sul principio di Dirichlet*. Rend. Circ. Mat. di Palermo 1906. T. XXII, p. 303.
Guido Fubini. *Il principio di minino e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari.* Rend. Circ. Mat. di Palermo 1907. T. XXIII, p. 58. ff.

[2]) et mêmes des problèmes plus généraux.