Sur les ensembles toujours de première catégorie.

Par

Nicolas Lusin (Moscou).

(Extrait d'une lettre adressée à M. C. Kuratowski).

M. Sierpiński m'a communiqué l'énoncé de votre problème sur les ensembles qui sont toujours de première catégorie. Je vous demande la permission de vous adresser quelques reflexions qu'il me suggère.

Tout d'abord la question sur les ensembles toujours de première catégorie est étroitement liée à celle de M. Lebesgue. Dans son célèbre Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement* [1]) ayant donné l'énoncé de Baire:

XVI. *Toute fonction représentable analytiquement est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait* —

M. Lebesgue écrit:

„Maintenant une question très importante se pose: la condition nécessaire fournie par le théorème XVI est elle suffisante? Et si elle ne l'est pas, existe-t-il des fonctions qui n'y satisfont pas? Je n'essaierai pas de répondre à ces difficiles questions...“.

Il importe de remarquer que M. Lebesgue lui-même divise le problème en deux parties: 1° établir n'importe par quel moyen — peut être même en pratiquant du raisonnement de M. Zermelo (AZ) — l'insuffisance de la condition XVI; 2° nommer une fonction $f(x)$ qui satisfait à cette condition et qui ne rentre pas dans la classification de Baire.

[1]) *Journal de Mathématiques*, 1905, p. 188.

On rencontre la question sur les ensembles toujours de première catégorie [1]) pour la première fois lorsqu'on aborde la première partie du problème de M. Lebesgue et l'on admet *l'existence* d'un ensemble de points E *ayant la puissance du continu* et qui est toujours de première catégorie. Cela veut dire que, quel que soit un ensemble parfait P, l'ensemble des points de E appartenant à P est de première catégorie sur P. En effet, si E est toujours de première catégorie, chaque partie E_1 de E l'est aussi. Il en résulte que la fonction caractéristique $f_1(x)$ de l'ensemble E_1, égale à 1 pour les points de E_1 et à 0 pour les points n'appartenant pas à E_1 satisfait sûrement à la condition XVI. D'autre part, les ensembles E_1 sont évidemment en infinité dont la puissance est supérieure à la puissance du continu. Or l'ensemble de toutes les fonctions rentrant dans la classification de Baire a la puissance du continu. En définitive, on est obligé de conclure que la condition XVI n'est pas suffisante, ce qui élucide beaucoup la première partie du problème de M. Lebesgue.

Telle était la marche au moyen de laquelle j'ai essayé, il y a déjà longtemps [2]), de répondre à la première question de M. Lebesgue en définissant un ensemble E toujours de première catégorie au moyen de cette hypothèse fort restrictive: *la puissance du continu est aleph-un.* Depuis beaucoup de choses sont arrivés: d'abord un théorème [3]) qui nous apprend que tout ensemble non dénombrable mesurable B contient nécessairement un ensemble parfait et, par suite, n'est jamais un de ces ensembles qui sont toujours de première catégorie; par conséquent il n'est nullement nécessaire d'avoir un ensemble E *ayant la puissance du continu* qui est toujours de première catégorie pour être assuré de l'insuffisance de la condition XVI: chaque ensemble E toujours de première catégorie et non dénombrable, quelle que soit sa puissance, a certainement pour fonction caractéristique une fonction $f(x)$ qui possède la propriété XVI mais qui ne rentre pas dans la classification de Baire. Plus tard des exemples de fonctions $f(x)$ satisfaisant à la condition XVI

[1]) J'emploie ici l'ellipse temporelle en disant „l'ensemble E *toujours* de première catégorie“ de même qu'on fait l'ellipse d'espace en parlant de l'ensemble E *partout* non dense.

[2]) Voir ma Note *Sur un problème de M. Baire* (*Comptes Rendus*, séance du 4 mai 1914).

[3]) Ce théorème a été démontré par MM. Hausdorff et Alexandroff en 1916.

et ne rentrant pas dans la classification de Baire ont été nommés *effectivement*[1]) chaque ensemble analytique E non mesurable B a pour fonction caractéristique une fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition XVI et ne rentrant pas dans la classification de Baire. La seconde question de M. Lebesgue a trouvé ainsi une solution complète.

Toutes ces choses sont bien connues et si je me permets de m'y arrêter, c'est parce que je voudrais signaler un fait particulièrement intéressant: *on ne sait rien de l'existence des ensembles toujours de première catégorie qui ont la puissance du continu* même lorsqu'on pratique du Choix arbitraire (AZ). Je vous demande la permission d'insister un peu sur ce point.

Quand on applique le raisonnement de M. Zermelo, au point de vue du réaliste il n'y a aucune différence entre les diverses infinités de choix. Au contraire, au point de vue *purement logique* — d'idéaliste — il faut faire une grande différence entre le cas du choix de l'élément distingué dans les ensembles qui n'ont aucun élément commun deux à deux, et le cas ou ces ensembles peuvent empiéter, puisque les logiciens tâchent de considérer le raisonnement de M. Zermelo comme *une opération*. A ce point de vue dans le premier cas le raisonnement de M. Zermelo est une opération (AZ) *restreinte*, ce que l'on peut noter par $(AZ)'$; dans le deuxième cas on n'impose aucune restriction au caractère du choix: c'est l'opération (AZ) la plus générale. Il est clair que dans les espaces abstraits, cette différence devient illusoire; mais dans un espace euclidien cette différence peut paraître très sensible et il importe de remarquer que l'existence de la plupart des ensembles „singuliers" a été établie en appliquant précisément $(AZ)'$ restreinte: tel, par exemple, est le cas de l'existence d'un ensemble non mesurable de Vitali ou de Van Vleck. Il serait donc intéressant de pouvoir donner un exemple d'un ensemble E toujours de première catégorie et qui a la puissance du continu, n'appliquant que (AZ) restreinte.

Un autre problème bien plus facile que le précédent paraissant digne d'intérêt, consiste à se demander si un ensemble toujours de première catégorie peut être *non mesurable*. J'ai considéré cette question dans une Communication faite au I Congrès des mathématiciens

[1]) *Voir* Lusin et Sierpiński, *Sur un ensemble non mesurable B* (*Journal des mathématiques*, t. II, 1925, p. 68).

russes (Moscou, 27 avril—4 mai 1927, p. 226)[1]). Je ne reproduis ici qu'un point de cette communication.

Supposons tous les points du segment $[0 \leqq x \leqq 1]$ numérotés au moyen des nombres finis et transfinis de la seconde classe de Cantor:

$$\text{(I)} \qquad x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_\omega,\ldots,\ x_\alpha,\ldots/\Omega$$

et prenons tous les ensembles parfaits P situés dans $[0 \leqq x \leqq 1]$ et numérotés de la même manière

$$\text{(II)} \qquad P_0,\ P_1,\ P_2,\ldots,\ P_\omega,\ldots,\ P_\alpha,\ldots/\Omega.$$

Soient

$$\text{(III)} \qquad H_0,\ H_1,\ H_2,\ldots,\ H_\omega,\ldots,\ H_\alpha,\ldots/\Omega$$

tous les ensembles G_δ situés dans $[0 \leqq x \leqq 1]$ et de mesure nulle.

Prenons le premier ensemble parfait P_0. Si mes $P_0 = 0$ nous supprimons dans (I) tous les points de P_0 et passons à P_1. Si mes $P_0 > 0$ nous prenons dans (I) les deux premiers points de P_0, nous les désignons par ξ_0 et η_0 et supprimons dans (I) tous les points du premier ensemble H_0 rencontré dans la suite (III) qui est partout dense dans P_0 sauf les points du couple (ξ_0, η_0); ensuite nous passons à P_1.

Continuons l'application de ce procédé transfiniment. Les ensembles P_γ, $\gamma < \alpha$, étant déjà considérés, nous passons à l'ensemble P_α. Si mes $P_\alpha = 0$, nous supprimons dans (I) tous les points de P_α sauf les points des couples $(\xi_\gamma, \eta_\gamma)$ correspondant à P_γ, mes $P_\gamma > 0$. Si mes $P_\alpha > 0$ nous prenons dans (I) les deux premiers points de P_α différents des points des couples $(\xi_\gamma, \eta_\gamma)$ déjà déterminés, nous les désignons par ξ_α et η_α et supprimons dans (I) tous les points du premier ensemble H_{β_α} rencontré dans (III) et partout dense dans P_α sauf les points des couples $(\xi_\gamma, \eta_\gamma)$ et $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ et passons à $P_{\alpha+1}$.

Il est bien évident que les points ξ ainsi déterminés forment un ensemble Ξ non dénombrable et que Ξ est toujours de première catégorie. Or, comme chaque ensemble parfait P ayant la mesure

[1]) Cf. Fund. Math. 9 (1927), p. 117 et S. Saks, Fund. Math. 11 (1928), p. 277. *Voir* aussi la Note récente de M. Sierpiński: *Sur un ensemble linéaire non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait* C. R. Soc. Sc. Varsovie 1933, p. 102—105.

positive, contient nécessairement un point de Ξ et un point qui n'appartient sûrement pas à Ξ, l'ensemble Ξ est *non mesurable*.

Si nous reprenons la langue *commune* et considérons les ensembles toujours de première catégorie comme des ensembles extrêmement „minces" (ce n'est pas au sens de la terminologie précise de M. Denjoy, mais au sens tout à fait commun, c'est-à-dire comme des ensembles infiniment pauvres de points, très faibles, peu considérables, très médiocres quant à la quantité de leurs points), nous remarquons aussitôt que:

l'absence de mesure d'un ensemble de points est due uniquement à l'irrégularité extrême de la distribution de ses points, puisqu'il existe des ensembles toujours de première catégorie qui ne sont pas des ensembles mesurables.

Nous sommes ainsi amenés très naturellement à considérer votre problème important que l'on peut énoncer de la manière suivante:

reconnaitre si l'on peut distinguer, parmi les ensembles non dénombrables qui sont toujours de première catégorie, ceux qui sont plus ou moins pauvres de points, et trouver les ensembles toujours de première catégorie qui sont, d'une part les plus massifs et, d'autre part, les plus rarifiés.

M. Sierpiński m'a communiqué que vous avez pris comme *criterium* de la pauvreté de points la définition suivante:

Définition. *Un ensemble E de points est dit* rarifié *si toute partie D dénombrable de E peut être enfermée dans un ensemble G_δ ne contenant aucun autre point de E.*

En effet, on s'assure immédiatement que chaque ensemble rarifié est toujours de première catégorie. Pour le voir, nous prenons un ensemble parfait P quelconque. Si l'ensemble considéré E n'est pas de première catégorie sur P, il existe une portion P_1 de P, telle que les points de E appartenant à P_1 forment un ensemble partout dense sur P_1 et qui n'est pas de première catégorie sur P_1. Soit D une partie dénombrable de E partout dense sur P_1. Comme E est un ensemble rarifié, il existe un ensemble G_δ, soit H, qui contient D et qui ne contient aucun autre point de E. Or, l'ensemble D est partout dense sur P_1 et, par conséquent, l'ensemble H l'est aussi. Il en suit que les points de P_1 qui n'appartiennent pas à H forment un ensemble de première catégorie sur P_1. On en conclut que les points de E appartenant à P_1 forment un ensemble de première catégorie sur P_1, ce qui est contradictoire. Ainsi nous sommes certains que *tout ensemble rarifié est toujours de première catégorie.*

D'autre part vous avez constaté que la plupart des ensembles toujours de première catégorie connus jusqu'à présent sont précisément des ensembles rarifiés de sorte que *la question se pose de savoir s'il existe des ensembles E toujours de première catégorie qui ne sont pas des ensembles rarifiés.*

C'est précisément votre problème.

Il est donc tout à fait naturel de poser la définition suivante:

Définition. *Un ensemble E est dit* massif *si toute partie D dénombrable de E qui n'est pas clairsemée ne peut jamais être enfermée dans un ensemble G_δ qui ne contient aucun autre point de E.*

Je ne sais pas s'il existe des ensembles toujours de première catégorie qui sont *massifs*. Ainsi je me contente pour le moment de constater qu'*il y a des ensembles toujours de première catégorie qui ne sont pas rarifiés*. C'est exactement l'ensemble toujours de première catégorie que j'ai défini, en 1914, dans ma Note indiquée (*loc. cit.*).

Comme j'ai omis dans cette Note toute la démonstration, car la rédaction détaillée me paraîssait devoir être trop longue pour paraître dans les *Comptes Rendus*, je vous demande la permission de reproduire ici tous les raisonnements nécessaires. Excusez moi d'être long, je serai exact.

Tout d'abord, le ressort principal de la démonstration était là une correspondance très importante créée par Baire dans son Mémoire *Sur la représentation des fonctions discontinues (Acta Mathematica*, t. 30, p. 42).

Considérons avec Baire des ensembles *parfaits non denses* dans le segment $[0 \leqslant x \leqslant 1]$ désignés par la notation générale $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, les entiers $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ prenant toutes les valeurs entières positives. Le diamètre de $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ tend vers zéro quand k croît indéfiniment.

L'ensemble $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ est contenu dans l'ensemble $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et il est non dense sur ce dernier.

Les ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, k étant fixe, n'ont aucun point commun deux à deux.

La réunion de tous les $P_{n_1,n_2,\dots,n_k,n_{k+1}}$, k, $n_1, n_2, \dots, n_k$ étant fixes, constitue l'ensemble $Q_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ partout dense sur $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

La réunion de tous les $P_{n_1,n_2,\dots,n_k,n_{k+1}}$, k étant fixe, constitue l'ensemble Q_k. La partie commune à tous les Q_k sera désignée par K

$$K = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_k \times \dots$$

Cela posé, considérons dans le segment $[0 \leqslant y \leqslant 1]$ un point irrationnel y, dont l'abscisse est représentée par une fraction continue illimitée

$$y = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$$

et prenons la partie commune aux ensembles correspondants

$$P_{n_1}, P_{n_1,n_2}, \dots, P_{n_1,n_2,\dots,n_k}, \dots$$

Comme le diamètre de $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{k}$, cette partie n'est qu'un ensemble formé d'un seul point que nous désignons par x

$$x = P_{n_1} \times P_{n_1,n_2} \times \dots \times P_{n_1,n_2,\dots,n_k} \times \dots$$

Nous établissons de la sorte, entre l'ensemble S de tous les points irrationnels y du segment $[0 \leqslant y \leqslant 1]$ et l'ensemble K une correspondance bien déterminée biunivoque et réciproque

$$x = Z(y)$$

continue en chaque point y de S relativement à S.

Ceci étant, prenons dans le segment $[0 \leqslant y \leqslant 1]$ un ensemble E partout non dénombrable dans $[0 \leqslant y \leqslant 1]$, formé de points irrationnels et ayant cette propriété remarquable: *l'ensemble E est au plus dénombrable dans tout ensemble non dense dans* $[0 \leqslant y \leqslant 1]$. J'ai montré comment on peut définir un tel ensemble E à partir d'un numérotage déterminé de tous les points du segment $[0 \leqslant y \leqslant 1]$ au moyen de tous les nombres finis et transfinis de la seconde classe de Cantor. Soit G l'ensemble des valeurs que prend la fonction $Z(y)$ sur l'ensemble E, $G = Z(E)$; on voit bien que G est un ensemble de points situés dans le segment $[0 \leqslant x \leqslant 1]$.

Je dis maintenant que *l'ensemble G ainsi défini est un ensemble toujours de première catégorie.*

En effet, soit P un ensemble parfait quelconque situé dans $[0 \leqslant x \leqslant 1]$. Désignons par H l'ensemble des points y tels que la valeur x de la fonction $Z(y)$ appartienne à P

$$H = [f(y) \subset P].$$

On voit bien que l'ensemble H est contenu dans l'ensemble S et *fermé relativement à S*. La partie commune $H \times E$ est évidemment *la transformée de la partie commune $P \times G$.*

Si l'ensemble $H \times E$ est non dense dans $[0 \leqslant y \leqslant 1]$, il est au plus dénombrable, et par suite l'ensemble $P \times G$ l'est aussi. Par conséquent, dans ce cas, l'ensemble G est de première catégorie sur P.

Si l'ensemble $H \times E$ est dense dans $[0 \leqslant y \leqslant 1]$, l'ensemble H, sauf des points rationnels, est la somme d'un nombre fini ou dénombrable d'intervalles de Baire $i_1', i_2', \dots, i_m', \dots$ privés de points rationnels et d'un ensemble non dense F

$$H = (i_1' + i_2' + \dots + i_m' + \dots) + F.$$

Comme la partie commune $F \times E$ est au plus dénombrable, parmi les transformées $Z(i_1'), Z(i_2'), \dots, Z(i_m'), \dots$ il existe sûrement une telle qu'elle n'est pas de première catégorie sur P, puisque l'ensemble $P \times G$ n'est pas de première catégorie sur P. Soit $Z(i_p')$ cette transformée.

Si nous écrivons l'intervalle i_p' de Baire sous la forme

$$i_p' = (n_1, n_2, \dots, n_k)$$

nous remarquons facilement que l'ensemble parfait correspondant $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ est contenu dans P. En effet, quand le point y parcourt la partie de S contenue dans $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, le point x correspondant, $x = Z(y)$, parcourt tous les points de l'ensemble parfait $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$. Comme l'ensemble E est partout dense dans $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et ne contient aucun point rationnel, la transformée $G \times P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ de $E \times i_p'$ est partout dense dans $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$. Donc, l'ensemble parfait $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ fait partie de l'ensemble parfait P.

D'autre part, l'ensemble G fait partie de l'ensemble K. Or, l'ensemble K est de première catégorie sur tout ensemble parfait $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, puisque K est contenu dans $Q_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ et l'ensemble $Q_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ est de première catégorie sur $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$. Il s'ensuit que les points de G appartenant à $P_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ forment un ensemble de première catégorie sur

$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et *à fortiori* sur l'ensemble P, ce qui est en contradiction avec cette hypothèse que la transformée de $i'_p \times E$ n'est pas de première catégorie sur P. (C. Q. F. D.).

Je dis maintenant que *l'ensemble G toujours de première catégorié n'est pas un ensemble rarifié.*

Pour le voir, prenons une partie dénombrable quelconque Δ de l'ensemble E telle qu'elle soit dense dans $[0 \leqslant y \leqslant 1]$. Soit D la transformée de Δ. Tout revient à démontrer, que, quel que soit un ensemble G_δ, soit M, situé dans $[0 \leqslant x \leqslant 1]$ et contenant D, il contient sûrement des points de E étrangers à D.

Désignons par N la transformée de l'ensemble M, $M = Z(N)$. Il est manifeste que cet ensemble est encore un G_δ situé dans $[0 \leqslant y \leqslant 1]$. Comme N contient Δ, l'ensemble N est dense dans $[0 \leqslant y \leqslant 1]$. Il existe donc un segment σ de $[0 \leqslant y \leqslant 1]$ tel que N est partout dense sur σ. Il en résulte que les points de σ étrangers à N forment un ensemble de première catégorie dans σ. Or, tout ensemble de première catégorie dans $[0 \leqslant y \leqslant 1]$ contient des points de E en infinité au plus *dénombrable.* Comme l'ensemble E est partout non dénombrable dans $[0 \leqslant y \leqq 1]$, il existe une infinité non dénombrable de points de E appartenant à N. Donc, l'ensemble M contient nécessairement une partie non dénombrable de G, et par suite un point étranger à D, ce qui prouve que l'ensemble considéré G n'est pas un ensemble rarifié. (C. Q. F. D.).

J'abandonne maintenant les ensembles *massifs* pour les ensembles de plus en plus rarifiés. Il serait très intéressant de parcourir l'échelle des ensembles toujours de première catégorie et de fixer l'attention aux ensembles *infiniment rarifiés.* Cependant, cette notion paraît être à présent une notion vide, puisque, correspondant à un mouvement de l'intuition tout à fait clair, elle ne paraît pas à ce moment capable d'être présentée sous la forme d'une *définition* précise. Et cette intuition est celle d'un ensemble de points qu'on ne peut guère distinguer d'un ensemble dénombrable, donc d'un ensemble qui est „presque dénombrable". Ainsi je me borne ici à faire la remarque suivante.

La question considérée me paraît être étroitement liée aux suites transfinies décroissantes d'ensembles F_σ

$$(1) \qquad E_0 > E_1 > E_2 > \ldots > E_\omega > \ldots > E_\alpha > \ldots / \Omega$$

où chaque terme E_α est un ensemble bien déterminé F_σ.

Posons la définition générale suivante: *une suite transfinie d'ensembles quelconques*

$$\mathcal{E}_0,\ \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2, \ldots,\ \mathcal{E}_\omega, \ldots,\ \mathcal{E}_\alpha, \ldots / \Omega$$

est dite stationnaire s'il existe un certain nombre γ, à partir duquel les ensembles considérés sont tous identiques, c'est à dire que l'on a

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_{\gamma+1} = \mathcal{E}_{\gamma+2} = \ldots / \Omega.$$

C'est à René Baire que l'on doit les premiers résultats dans cette voie. C'est lui qui a démontré un théorème extrêmement remarquable permettant de constater que toute suite décroissante d'ensembles fermés est nécessairement *stationnaire.* Cet important théorème est une généralisation profonde du théorème connu de Cantor-Bendixson; on trouve ses répercussions nombreuses dans le domaine de l'Analyse Mathématique et dans la Théorie des Fonctions.

On sait d'ailleurs que ce théorème de Baire admet une généralisation immédiate que voici:

Toute suite monotone (décroissante ou croissante) d'ensembles fermés est stationnaire.

La question se pose alors de savoir s'il existe des suites *décroissantes* non stationnaires formées d'ensembles F_σ [1]). J'ai considéré récemment cette question dans un article *Sur les suites stationnaires* qui paraîtra dans un livre dédié à la mémoire de notre ami disparu Jacques Herbrandt. J'ai trouvé la une condition assez générale pour qu'une suite décroissante d'ensembles F_σ soit stationnaire, condition qui paraît être très utile dans l'étude des cribles. Pour le moment je me bornerai aux observations suivantes.

Soit ξ_α un point de l'ensemble-différence $E_\alpha - E_{\alpha+1}$. Je dis que *l'ensemble Ξ des points ξ_α ainsi choisis est un ensemble toujours de première catégorie.*

En effet, soit D un sous-ensemble dénombrable donné quelconque de Ξ: $D = (p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, p_{\alpha_3}, \ldots)$. Il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que $\mu > \alpha_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$ (puisque $\alpha_k < \Omega$, pour $k = 1, 2, \ldots$)

[1]) L'existence des tels suites a été remarquée par M. Z. Zalcwasser, Fund. Math. t. III (1922), p. 45; cf. aussi W. Sierpiński, *C. R. de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie* XXV (1932), p. 103, où se trouve démontrée l'existence d'une suite transfinie croissante d'ensembles G_δ.

La définition des points p_α implique tout de suite que p_{α_k} non $\epsilon\, E_\mu$ pour $k=1,2,\ldots$ On a donc $D \subset CE_\mu$. Or, de la définition des points p_α il résulte qu'on a $p_\alpha \epsilon\, E_\mu$ pour $\alpha \geqq \mu$, d'où résulte (d'après la définition de l'ensemble Ξ et d'après l'inégalité $\mu < \Omega$) que l'ensemble $\Xi \cdot CE_\mu$ est au plus dénombrable. Tout sous-ensemble dénombrable D de Ξ est donc contenu dans un ensemble G_δ, CE_μ, qui contient un ensemble au plus dénombrable, $\Xi \cdot CE_\mu$, de points de Ξ. D'après une proposition de M. Sierpiński[1]) l'ensemble Ξ est donc de 1re catégorie sur tout ensemble parfait, c. q. f. d.

Maintenant la question de haute importance se pose: *les ensembles qui sont toujours de première catégorie existent-t-ils réellement?* En d'autres termes: *peut on nommer un ensemble non dénombrable qui est toujours de première catégorie?*

Dans l'état actuel de la Science, je ne vois aucun moyen de répondre en affirmative à cette question brullante, et, par suite, je ne considère pas comme établie l'existence même de tels ensembles par les raisonnements qui précèdent.

Je considère les questions d'*existence*, vous le savez bien, au point de vue de *naturaliste*, comme le fait M. Borel qui est un grand naturaliste de notre époque. A ce point de vue, il n'y a aucune différence entre l'application du raisonnement de M. Zermelo dans toute sa pleinitude et l'emploi de la soi-disante „hypothèse du continu": toutes ces choses sont également irréelles.

Si je donne mon temps à la considération de ces choses, ce n'est pas parce que je les regarde comme vraiment sérieuses, mais puisque je vois, à travers une foule d'„existences" *purement verbales* trop faciles pour les prendre aux sérieux, la faible lumière de la vraie intuition qui peut nous amener à des faits tout à fait inattendus qu'on ne rencontre pas en suivant une autre voie.

Baire a toutes les raisons en disant que, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini; j'ajoute seulement que je ne sais pas si l'on possède ou non une bonne définition *du fini*. Il paraît qu'il est nécessaire de prendre une précaution relative à l'induction complète elle-même. Si je ne considère pas comme établies les existences précédentes, je vois également des difficultés très graves dans certains raisonnements relatifs aux *entiers positifs*.

[1]) l. c., p. 104.

Malgré tout, je ne peux pas regarder l'ensemble des entiers positifs comme donné, puisque l'idée même de l'infini actuel me paraît trop peu naturelle pour la considérer en soi. Néanmoins, la critique de l'*indéfini* est horriblement difficile et on commence à comprendre quelles difficultés M. Borel a vu lorsqu'il a écrit:

„Il paraît incontestable que les mathématiciens se font ou croient se faire de cette suite indéfinie

$$\text{(S)} \qquad 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

une idée parfaitement claire".

Ces mots *„ou croient se faire"* sont très caractéristiques pour le point de vue d'un naturaliste.

Il paraît difficile d'écarter les idées nouvelles que nous imposent les *quanta* et les recherches de MM. De-Sitter et Lemaître. Le problème fondamental est de savoir si la suite des entiers positifs est ou non *complètement* objective? Il paraît quelle l'est *presque* et qu'il y a des traces de subjectivité incontestable, de sorte qu'on ne peut pas parler de la suite des entiers positifs toujours dans tous les cas dans le même sens. Cependant pour le moment il est bien prématuré de poser le problème brulant sur l'*unicité de la suite des entiers positifs* et de parler de nombres finis inaccessibles à partir de 1. La Théorie des nombres contemporaine est bien uniformisée par la méthode de l'induction complète, — et néanmoins la Science des Nombres existait bien au XVII siècle: d'autres habitudes d'esprit existaient en ce temps, des habitudes qui ne nous sont pas parvenues.

Au point de vue de naturaliste, les nombres transfinis ne sont que des nombres finis très grands. Les recherches sur les ensembles, sur la classification de Baire et les autres prennent un aspect tout à fait nouveau: ce sont des recherches sur les cellections finies, mais il faut prendre la précaution indiquée relativement au mot „fini".

Il y a dans la théorie des ensembles analytiques et projectives des choses bien étranges. La situation nous rappelle beaucoup la question sur l'existence d'un nombre parfait impair. Or, dans la théorie des ensembles projectifs il est immédiatement clair que les existences questionnées ne seront jamais réalisées par aucun homme. Est-il maintenant la même situation dans la question des entiers positifs?

Je ne considère pas comme inutiles les efforts faits pour étudier les classes de Baire, les ensembles analytiques, projectifs: ce ne sont pas précisément les existences qui ont la valeur par elles-mêmes, mais les mouvements de la pensée qui, étant transportée dans le domaine des entiers positifs, nous permettent, *par analogie*, de découvrir des phénomènes nouveaux, inaccessibles par une autre méthode. Mais je vous ai déjà écrit de ces choses.

Moscou, le 14 mai 1933.

Sur une famille d'ensembles singuliers.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Nous dirons qu'un ensemble (métrique) E jouit de la propriété λ, lorsque chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ dans E. M. Lusin a démontré dans la note précédente que la propriété λ implique celle d'être de I-re catégorie sur tout ensemble parfait et que l'implication inverse est en défaut [1]) (même dans le cas d'un ensemble contenu dans la droite).

L'existence des ensembles à propriété λ et de puissance $\aleph_1$ situés dans l'espace des nombres réels (voir aussi la note précédente) se démontre très facilement en considérant une suite transfinie du type Ω composée d'ensembles G_δ croissants (de mesure nulle) et en extrayant de chaque terme de cette suite un point qui n'appartient pas aux termes précédents Il est remarquable aussi que l'on est conduit à la propriété λ en étudiant au point de vue géométrique le problème de *l'ordre de croissance* des suites d'entiers positifs. Considérons notamment la famille des suites infinies d'entiers positifs comme un espace métrique en identifiant la suite $s = [s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots]$ avec le nombre irrationnel développé en fraction continue:

$$\frac{1|}{|s^{(1)}} + \frac{1|}{|s^{(2)}} + \cdots$$

[1]) Notons ici que la propriété d'être un ensemble de I-re catégorie sur tout ensemble parfait équivaut (dans les espaces complets séparables) 1°: à celle d'être un ensemble dont tout sous-ensemble jouit de la propriété de Baire sur chaque ensemble parfait, ainsi que 2°: à celle d'être un ensemble à propriété de Baire sur chaque ensemble parfait tout en étant dépourvu de sous-ensembles parfaits. Voir ma *Topologie I* (sous presse), Chap. III.

Une propriété plus restrictive encore que la propriété λ est la suivante: chaque sous-ensemble borelien (de l'espace considéré) est un G_δ (dans cet espace). L'existence des ensembles jouissant de cette dernière propriété a été démontrée par M. Sierpiński à l'aide de l'hypothèse du continu, Fund. Math. **5** (1924), p. 184.