IV$_{\mathfrak{n}}$. *Soit* $\mathfrak{n}$ *un nombre cardinal régulier; alors, pour qu'un ensemble* Z *soit* $\epsilon\, L'(M_{\mathfrak{n}})$, *il faut et il suffit qu'il existe une classe* $\mathfrak{G}$ *d'ensembles ouverts remplissant les conditions* 1° *et* 3° *du th.* IV *et la condition* $2°_{\mathfrak{n}}$ *du th.* III$_{\mathfrak{n}}$.

Soit $S_{\mathfrak{n}}$ la classe d'ensembles X contenant un sous-ensemble de puissance $< \mathfrak{n}$, dense dans X. Le théorème cité de M. Sierpiński prendra la forme suivante:

$\mathfrak{n}$ *étant un nombre cardinal régulier, pour qu'un ensemble métrique soit* $\epsilon\, L(S_{\mathfrak{n}})$, *il faut et il suffit qu'il soit une somme disjointe d'ensembles ouverts de* $S_{\mathfrak{n}}$ [18]) [19]).

17. Remarque. En analysant des notions „d'origine locale" telles comme la continuité des fonctions ou la connexité locale des ensembles, on pourrait penser qu'elles n'aient presque rien de commun avec les notions que nous avons introduites dans les n^{os} **2.** et **3.** Or, c'est seulement parce que celles-là ont une structure logique un peu plus complexe, mais on les obtient subséquemment, par un procédé semblable au suivant: Si P_j (pour j positif) est la classe des ensembles connexes de diamètre $<j$, alors pour que l'espace soit *localement connexe* au sens de MM. Hahn et Mazurkiewicz, il faut et il suffit qu'il soit $\epsilon \prod_j L(P_j)$ [20]).

Observons que si J est un ensemble quelconque (d'ordinaire — on s'efforce de le rendre dénombrable) et si à chaque élément j de J correspond une classe (propriété) P_j, on a (en vertu des théorèmes des n^{os} **4.** et **5.**) les formules:

$$L\Big(\prod_{j\in J} L(P_j)\Big) = \prod_{j\in J} L(P_j),$$

$$L'\Big(\prod_{j\in J} L'(P_j)\Big) = \prod_{j\in J} L'(P_j).$$

[18]) Tous les théorèmes des n^{os} **12.**—**16.** restent vrais, si l'on envisage un espace où $\varrho(x,y)$ ne remplit que les conditions [2]) *Mt* **1.1** et *Mt* **2**, la condition *Mt* **1.2** n'étant point essentielle [Cf. ma Thèse (Varsovie, 1927; à paraître), § 22].

[19]) Le lecteur a remarqué, peut être, que, dans tout ce qui précède, l'application de la méthode connue de *relativisation* (v. F. Hausdorff, op. cit. [9]), Chap. VII, § 6) aurait apporté des simplifications; mais il y avait d'autres raisons pour lesquelles nous n'en avons pourtant fait presque aucun usage.

[20]) Cf. H. Tietze: *Beiträge zur allgemeinen Topologie* III, Monatsh. f. Math. **32** (1922), pp. 15—16; K. Menger: *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. **95** (1925), pp. 281—282; N. Aronszajn: *Einige Bemerkungen über den Begriff des lokalen Zusammenhanges*, Monatsh. f. Math. **37** (1930), pp. 241—242, et *Sur les invariants des transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. **19** (1932), pp. 103 - 104.

Sur les espaces métriques localement séparables.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Un espace métrique M est dit *localement séparable*, s'il existe pour tout point p de M une sphère S ayant p comme centre et dont l'intérieur est séparable (c'est-à-dire contient un sous-ensemble au plus dénombrable, dense dans S) [1]).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Pour qu'un espace métrique soit localement séparable, il faut et il suffit qu'il soit une somme disjointe d'ensembles ouverts séparables* [2]).

Démonstration.

On voit sans peine que la condition de notre théorème est suffisante: il nous reste donc à démontrer qu'elle est nécessaire.

Soit donc M un espace métrique localement séparable.

Toutes les sphéres considérées dans cette Note seront ouvertes: $S(p,r)$ désignera la sphère au centre p et au rayon r, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points q de l'espace M, tels que

$$\varrho(p,q) < r$$

($\varrho(p,q)$ désignant la distance entre les points p et q).

Nous dirons que deux points p et q de l'espace M *sont en relation* R et nous écrirons pRq s'il existe une sphère séparable $S(p,r)$

[1]) Cf. P. Urysohn, *Fund. Math.* t. IX, p. 119.

[2]) M. Lindenbaum m'a communiqué que ce théorème est implicitement contenu dans un théorème de M. Alexandroff (*Math. Ann.* **92**, p. 299, Fundamentalsatz 2), dont la démonstration est d'ailleurs plus compliquée que la nôtre.

contenant q et une sphère séparable $S(q, r')$ contenant p. La relation R est évidemment symétrique. L'espace M étant localement séparable, on a évidemment pRp pour tout point p de M.

E étant un ensemble de points de M, nous désignerons par TE l'ensemble de tous les points de M qui sont en relation R avec un point de E. Pour qu'on ait la formule $p \epsilon TE$, il faut donc et il suffit qu'il existe un point q de E, tel que pRq. D'après la notation adoptée, p étant un point de M, $T(p)$ désignera l'ensemble de tous les points q de M, tels que pRq; la relation R étant symétrique, la formule $q \epsilon T(p)$ équivaut donc à la formule $p \epsilon T(q)$.

Posons encore $T^n E = T T^{n-1} E$ pour $n = 2, 3, \ldots$

On voit sans peine que (pour $n > 1$) la formule $q \epsilon T^n(p)$ équivaut à l'assertion qu'il existe des points $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ de M, tels que $pRp_1, p_1 R p_2, \ldots, p_{n-1} R q$. La relation R étant symétrique, on en conclut tout de suite que la formule $q \epsilon T^n(p)$ équivaut à la formule $p \epsilon T^n(q)$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

De pRp pour $p \epsilon M$ résulte que $p \epsilon T(p)$ pour $p \epsilon M$. Les ensembles $T(p)$ sont donc non vides pour $p \epsilon M$. Je dis que les ensembles $T(p)$ sont ouverts pous $p \epsilon M$.

En effet, soit $q \epsilon T(p)$. On a donc pRq et il existe une sphère séparable $S(p, r)$, telle que $q \epsilon S(p, r)$ et une sphère séparable $S(q, r')$, telle que $p \epsilon S(q, r')$. De $p \epsilon S(q, r')$ résulte que $\varrho(p, q) < r'$ et il existe un nombre réel r_1, tel que

$$(1) \qquad \varrho(p, q) < r_1 < r'.$$

D'après (1) et $q \epsilon S(p, r)$ on a

$$r' - r_1 > 0, \quad r - \varrho(p, q) > 0 \quad \text{et} \quad r_1 - \varrho(p, q) > 0$$

et il existe un nombre réel positif r_0, tel que

$$(2) \qquad r_0 < r' - r_1, \quad r_0 < r - \varrho(p, q) \quad \text{et} \quad r_0 < r_1 - \varrho(p, q).$$

Supposons maintenant que q_1 est un point de M, tel que

$$(3) \qquad \varrho(q_1, q) < r_0$$

D'après (3) et (2) on a

$$\varrho(p, q_1) \leqslant \varrho(p, q) + \varrho(q, q_1) < \varrho(p, q) + r_0 < \begin{matrix} r_1 \\ r \end{matrix},$$

ce qui prouve que $p \epsilon S(q_1, r_1)$ et $q_1 \epsilon S(p, r)$.

Supposons que s est un point de M, tel que

$$(4) \qquad \varrho(q_1, s) < r_1.$$

D'après (4), (3) et (2) on a

$$\varrho(s, q) \leqslant \varrho(s, q_1) + \varrho(q_1, q) < r_1 + r_0 < r'.$$

La formule (4) entraîne donc l'inégalité $\varrho(s, q) < r'$, ce qui prouve que $S(q_1, r_1) \subset S(q, r')$. La sphère $S(q, r')$ étant séparable, la sphère $S(q_1, r_1)$ l'est donc aussi [1]).

Il existe donc une sphère séparable $S(p, r)$ contenant q_1 et une sphère séparable $S(q_1, r_1)$ contenant p: on a donc $q_1 R p$. Cette dernière formule étant démontrée pour tout point q_1 de M satisfaisant à l'inégalite (3), donc pour tout point de la sphère $S(q, r_0)$, nous avons donc: $S(q, r_0) \subset T(p)$.

Le point q pouvant être un point quelconque de $T(p)$, nous avons ainsi démontré que l'ensemble $T(p)$ est ouvert (pour $p \epsilon M$).

Or, de la définition de l'opération T résulte tout de suite que pour tout sous-ensemble E de M, TE est la somme de tous les ensembles $T(p)$ correspondant aux points p de E. Donc, quel que soit le sous-ensemble E de M, l'ensemble TE est ouvert (en tant qu'une somme d'ensembles ouverts), et il en résulte tout de suite que tous les ensembles $T^n E$ (où $n = 1, 2, 3, \ldots$) sont ouverts pour $E \subset M$.

Je dis maintenant que si l'ensemble E est séparable, l'ensemble TE l'est aussi

En effet, l'ensemble E étant séparable, il existe un sous-ensemble au plus dénombrable D de E, tel que $E \subset \bar{D} = D + D'$.

Soit p un point de TE: il existe donc un point q de E, tel que pRq et il existe une sphère séparable $S(q, r)$ contenant p. On a donc $\varrho(p, q) < r$ et il existe un nombre rationnel r_0, tel que

$$(5) \qquad \varrho(p, q) < r_0 < r$$

D'après (5) on a $r_0 - \varrho(p, q) > 0$ et $r - r_0 > 0$ et, d'après $q \epsilon E$ et $E \subset \bar{D}$, il existe un point q_0 de D, tel que

$$(6) \qquad \varrho(q_0, q) < r_0 - \varrho(p, q) \quad \text{et} \quad \varrho(q_0, q) < r - r_0.$$

[1]) Cela résulte déjà du fait (qu'on démontre sans aucune difficulté, en partant de la définition des ensembles séparables) qu'un sous-ensemble *ouvert* d'un ensemble séparable est séparable. Plus généralement on peut démontrer que tout sous-ensemble d'un ensemble séparable (situé dans un espace métrique) est séparable.

D'après (6) on trouve:

$$\varrho(p, q_0) \leqslant \varrho(p, q) + \varrho(q, q_0) < r_0,$$

ce qui prouve que $p \in S(q_0, r_0)$.

Soit maintenant s un point de M, tel que

$$\varrho(q_0, s) < r_0: \tag{7}$$

d'après (7) et (6) on a

$$\varrho(s, q) \leqslant \varrho(s, q_0) + \varrho(q_0, q) < r_0 + \varrho(q_0, q) < r.$$

Cela prouve que $S(q_0, r_0) \subset S(q, r)$. La sphère $S(q, r)$ étant séparable, la sphère $S(q_0, r_0)$ l'est donc aussi.

Nous avons ainsi démontré que pour tout point p de TE il existe une sphère séparable contenant p, dont le centre est un point de D et dont le rayon est rationnel. Soit H la somme de toutes les sphères séparables ayant pour centre un point de D et aux rayons rationnels. L'ensemble D étant au plus dénombrable, H est évidemment un ensemble séparable, et on voit sans peine que $TE \subset H$. L'ensemble TE est donc séparable.

Nous avons ainsi démontré que si l'ensemble E est séparable, l'ensemble TE l'est aussi. Pour $E = (p)$ il en résulte, en particulier, que les ensembles $T(p)$ sont séparables (pour $p \in M$) et il en résulte, par l'induction facile (d'après la proposition démontrée tout à l'heure) que les ensembles $T^n(p)$ sont tous séparables (pour $p \in M$, $n = 1, 2, 3, \ldots$). Or, comme nous avons démontré plus haut, tous ces ensembles sont ouverts.

Posons maintenant, pour tout point p de M:

$$U(p) = T(p) + T^2(p) + T^3(p) + \ldots \tag{8}$$

— ce seront donc des ensembles ouverts et séparables (en tant que sommes d'infinités dénombrables d'ensembles ouverts et séparables).

Supposons que p et q sont deux points de M, tels que

$$U(p)\, U(q) \neq 0$$

et soit s un point, tel que

$$s \in U(p) \cdot U(q)$$

D'après (8) il existe donc deux nombres naturels m et n, tels que

$$s \in T^m(p) \text{ et } s \in T^n(q)$$

De $s \in T^m(p)$ résulte, comme nous savons, $p \in T^m(s)$, ce qui donne, d'après $s \in T^n(q)$, $p \in T^{m+n}(q)$, donc $T^k(p) \subset T^{k+m+n}(q)$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, et de (8) résulte que $U(p) \subset U(q)$.

Pareillement on trouve $U(q) \subset U(p)$. On a donc $U(p) = U(q)$.

Nous avons ainsi démontré que si p et q sont deux points quelconques de M on a ou bien $U(p)\, U(q) = 0$, ou bien $U(p) = U(q)$. Les ensembles $U(p)$ correspondant aux points p de M décomposent donc M en une somme disjointe d'ensembles ouverts, séparables. Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer que les ensembles ouverts et séparables satisfaisant à notre théorème sont en même temps fermés (le complémentaire de chacun d'eux, en tant qu'une somme d'ensembles ouverts, étant ouvert).

Corollaire: *Tout espace métrique localement séparable et connexe est séparable.*

En effet, si l'espace métrique M est localement séparable sans être séparable, il résulte tout de suite de notre théorème que M contient un ensemble G, tel que les ensembles G et $M - G$ sont non vides, disjoints et ouverts, donc aussi fermés: l'espace M n'est pas donc connexe.

Or, il est à remarquer qu'il existe un espace métrique connexe et non séparable qui devient localement séparable lorsqu'on lui enlève un seul point. Tel est, comme on voit sans peine, l'espace M défini comme il suit: M est l'ensemble de tous les systèmes (x, y), où x et y sont deux nombres réels $\geqslant 0$, la distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de M étant définie comme égale à $|y_1 - y_2|$ si $x_1 = x_2$ et à $y_1 + y_2$, si $x_1 \neq x_2$. L'espace M devient localement séparable (mais cesse d'être connexe) lorsqu'on lui enlève le point $(0, 0)$.

Il est encore à remarquer que notre corollaire (donc aussi notre théorème) ne subsiste pas pour les espaces topologiques (non métriques). En effet, soit E l'ensemble de tous les symboles $\alpha + x$, où α est un nombre ordinal $< \Omega$ et x un nombre réel, tel que $0 \leqslant x < 1$. Ordonnons l'ensemble E d'après la convention que $\alpha + x \prec \beta + y$, si $\alpha < \beta$ ou bien si $\alpha = \beta$ et $x < y$. Considérons comme voisinage d'un élément p de E tout intervalle (ouvert) contenant p. On vérifie sans peine que E est un espace topologique connexe et localement séparable (jouissant de cette propriété remarquable que tout intervalle ouvert de E est homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres réels), mais non séparable.

Applications.

On dit qu'un ensemble E (situé dans un espace métrique M) est *localement analytique* s'il existe pour tout point p de E une sphère $S(p,r)$, telle que l'ensemble $E\cdot S(p,r)$ est analytique (c'est-à-dire qu'il est un noyau d'un système déterminant, formé d'ensembles fermés de l'espace M).

M. Banach a posé le problème si un ensemble localement analytique (situé das un espace métrique quelconque) est nécessairement analytique.

On démontre sans peine que la réponse à ce problème est positive pour les espaces métriques séparables: nous prouverons qu'elle l'est aussi pour les espaces localement séparables.

Soit donc E un ensemble localement analytique situé dans un espace métrique localement séparable M. D'après notre théorème M est une somme disjointe d'ensembles séparables, ouverts et fermés, soit $M=\Sigma H$. On a donc $E=\Sigma EH$ et les ensembles EH sont localement analytiques et situés chacun dans un espace séparable, H, donc ils sont analytiques. Il existe donc pour tout terme EH de la somme $E=\Sigma EH$ un système déterminant $\{F^H_{n_1,n_2,\ldots n_k}\}$ formé d'ensembles fermés, dont EH est le noyau: $EH=N\{F^H_{n_1,n_2,\ldots n_k}\}$. Posons $F_{n_1,n_2,\ldots n_k}=\Sigma H F^H_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, la sommation s'etendant à tous les termes H de la somme $M=\Sigma H$. Les ensembles H étant ouverts et fermés, on voit sans peine que les ensembles $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ sont fermés et on vérifie sans peine que $E=\Sigma EH=N\{F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$. L'ensemble E est donc analytique, c. q. f. d.

Or, il est à remarquer que, comme l'a démontré M. Szpilrajn, un ensemble localement borelien, situé dans un espace métrique localement séparable, peut ne pas être borelien. Soit, en effet, M l'espace formé de tous les points (α, x), où α est un nombre ordinal $<\Omega$ et x est un nombre réel, tel que $0<x<1$, la distance entre deux points (α, x) et (β, y) étant définie comme égale à $|x-y|$ si $\alpha=\beta$ et à 1, si $\alpha\neq\beta$. L'espace M est évidemment localement séparable. Soit B_α un ensemble borelien de classe α situé à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$, et soit E_α l'ensemble de tous les points (α, x) de M, tels que $x\,\epsilon\,B_\alpha$: l'ensemble E_α est évidemment borelien

de classe α dans M. Posons $E=\sum\limits_{\alpha<\Omega} E_\alpha$: ce sera, comme on voit sans peine, un ensemble localement borelien dans M, mais E n'est pas borelien dans M. En effet, si E était un ensemble borelien de classe β dans M, l'ensemble de tous les points $(\beta+1, x)$ de E serait borelien de classe $\leqslant\beta$ dans M (comme produit de E par un ensemble fermé dans M): or cet ensemble coïncide évidemment avec l'ensemble $E_{\beta+1}$ qui est de classe $\beta+1$ dans M, ce qui implique une contradiction.

Or, il est à remarquer qu'on peut démontrer qu'un ensemble situé dans un espace localement séparable M et localement de classe $\leqslant\alpha$ dans M est toujours de classe $\leqslant\alpha$ dans M.