Man ersieht leicht, dass $f(x) = \varphi(x, 0)$ eine U_{n_0} auf P retrahierende Funktion ist und $\varphi(x, t)$ eine die Retrahierung f induzierende Deformation bildet. Somit ist unser Beweis vollendet.

Korollar. *Die sämtlichen Bettischen Gruppen und die Fundamentalgruppe eines beliebigen absoluten Umgebungsretraktes sind Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden.*

Sur les ensembles localement dénombrables dans l'espace métrique.

Par

Adolphe Lindenbaum (Varsovie).

1. [1]) Soit M un *espace métrique* avec la *distance* $\varrho(x, y)$ [2]). Un ensemble de points est appelé *sphère* (ouverte) *de centre* a et *de rayon* r positif (fini ou infini), s'il est composé de tous les points x pour lesquels $\varrho(a, x) < r$; cette sphère est désignée par $S(a, r)$.

2. Soit $\boldsymbol{P}$ une classe d'ensembles (ou — ce qui revient ici au même — une propriété d'ensembles). Nous dirons qu'un ensemble Z situé dans M est *localement* $\boldsymbol{P}$ *au point* z, lorsqu'il existe un nombre positif r_z et un ensemble Z_z de $\boldsymbol{P}$ tels que

$$Z_z \cdot S(z, r_z) = Z \cdot S(z, r_z) \text{ [3]).}$$

Le nombre r_z peut être remplacé toujours par un nombre plus petit.

L'ensemble Z sera *localement* $\boldsymbol{P}$ ou — en d'autres mots — appartiendra à la *classe* $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$, lorsque, pour tout $z \in Z$, il est localement $\boldsymbol{P}$ au point z [4]).

On voit immédiatement que tout ensemble de $\boldsymbol{P}$ est localement $\boldsymbol{P}$.

[1]) Dans les raisonnements sur les propriétés locales, *l'axiome du choix* joue en général un rôle essentiel. Il est donc admis pour tout ce qui suit.

[2]) C-à-d. $\varrho(x, y)$ est une fonction à valeurs réelles (finies), définie pour tous les points x, y de M et remplissant les conditions suivantes:

Mt **1.1**: Si $x = y$, on a $\varrho(x, y) = 0$.

Mt **1.2**: Si $\varrho(x, y) = 0$, on a $x = y$.

Mt **2**: $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(z, x) + \varrho(y, z)$.

[3]) Cf. P. Urysohn: *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, Fund. Math. **7** (1925), p. 68.

[4]) Cf. op. cit. [3]), p. 35.

3. On dit que l'ensemble Z est *localement* $\boldsymbol{P}$ *au sens restreint* ou qu'il appartient à la *classe* $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$, lorsque, pour tout $z \in M$, il est localement $\boldsymbol{P}$ au point z [5]).

Evidemment, on a: $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P}) \subset \boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$; cependant, un ensemble peut être localement $\boldsymbol{P}$ sans l'être au sens restreint (exemple: M — l'ensemble des nombres réels avec la distance $|x-y|$; Z — l'ensemble des nombres non entiers; $\boldsymbol{P}$ — la classe des intervalles ouverts). Quelle que soit la classe $\boldsymbol{P}$, l'ensemble vide est localement $\boldsymbol{P}$, mais il n'est $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$ que sous certaines conditions. Quant à l'espace entier M, s'il appartient à $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$, il appartient à $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$ aussi.

Si l'ensemble vide appartient à $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$ et si $\boldsymbol{F}$ est la classe des ensembles fermés de M, on a: $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{F}$.

4. Si $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{Q}$, on a: $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P}) \subset \boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q})$ et $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P}) \subset \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{Q})$.

5. On a: $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$.

En effet, il suffit de démontrer que $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})) \subset \boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$. Soit $Z \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P}))$: donc, pour tout point z de Z, il existe un r_z et un Z_z de $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ tels que:

$$Z_z \cdot S(z, r_z) = Z \cdot S(z, r_z), \tag{1}$$

d'où: $z \in Z_z$; et puisque $Z_z \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$, il existe un r'_z et un Z'_z de $\boldsymbol{P}$ tels que:

$$Z'_z \cdot S(z, r'_z) = Z_z \cdot S(z, r'_z). \tag{2}$$

Soit $r''_z < r_z$ et $r''_z < r'_z$: alors les égalités (1) et (2) donnent

$$Z'_z \cdot S(z, r''_z) = Z \cdot S(z, r''_z). \tag{3}$$

Ainsi, nous avons construit — quel que soit z de Z — un r''_z et un Z'_z de $\boldsymbol{P}$ pour lesquels on a l'égalité (3), c. q. f. d.

6. D'après les *n*^{os} 3., 4. et 5., on a aussi: $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$. Un raisonnement analogue à celui du *n*^{o} **5** entraîne l'égalité: $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})) = \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$.

7. Soit $C(X)$ l'ensemble complémentaire d'un ensemble X; et soit $\widehat{\boldsymbol{P}}$ — la classe des ensembles $C(X)$ complémentaires aux ensembles X de $\boldsymbol{P}$. Alors on a: $\boldsymbol{L}'(\widehat{\boldsymbol{P}}) = \widehat{\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})}$.

Le théorème correspondant pour $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ serait faux (comme le montre l'ensemble du *n*^{o} 3.).

8. Plusieurs propriétés de la classe $\boldsymbol{P}$ se transportent sur $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ (ou sur $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$): p. ex. si tout sous-ensemble d'un ensemble $\boldsymbol{P}$ appartient à $\boldsymbol{P}$, alors tout sous-ensemble d'un ensemble de $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ appartient à $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ (de même—pour $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$); si la partie commune de deux ensembles de $\boldsymbol{P}$ appartient toujours à $\boldsymbol{P}$, la partie commune de deux ensembles de $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ appartient toujours à $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ (de même — pour $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$). — Si $\boldsymbol{P}$ est une classe d'ensembles ouverts, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ en est aussi une,

[5]) D'ailleurs, on pourrait introduire la notion plus générale de l'ensemble localement $\boldsymbol{P}$ *sur l'ensemble* Y — où l'on ne prendrait en considération que les sphères dont les centres seraient dans Y (qui peut être supposé ouvert sans diminuer la généralité).

d'ailleurs bien déterminée: c'est la classe de tous les ensembles ouverts contenus dans la somme de tous les ensembles de $\boldsymbol{P}$. Si $\boldsymbol{G}$ est la classe de tous les ensembles ouverts de M, et si $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P})$ désigne la classe des intérieurs [6]) des ensembles d'une classe $\boldsymbol{P}$, on a: $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{G} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P}))$. — Lorsque toute homéomorphie qui transforme l'espace M en soi transforme un ensemble de $\boldsymbol{P}$ en un ensemble de $\boldsymbol{P}$, alors il en est de même avec $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$ (pour $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$, il y a un énoncé semblable).

9. Soit $\mathfrak{m}$ — la puissance d'un ensemble dense dans l'espace M supposé infini, et soit $\mathfrak{p}$ — la puissance d'une classe $\boldsymbol{P}$: alors, comme on calcule aisément, la puissance de la classe $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{P})$ est $\leqslant \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}$; si $\mathfrak{p} > 1$, la puissance de $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$ est également $\leqslant \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}$.

Mais passons au sujet principal de cette note. —

10. $\mathfrak{n}$ étant un nombre cardinal, soit $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{n}}$ — la classe de tous les ensembles de puissance $< \mathfrak{n}$ contenus dans M. Donc $\boldsymbol{M}_2$ est la classe composée de l'ensemble vide et de tous les ensembles à un seul élément. $\boldsymbol{M}_{\aleph_0}$ est la classe des ensembles finis de M.

Les ensembles de la classe $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{M}_2)$ sont appelés *isolés* (un ensemble Z est isolé, lorsque aucun point d'accumulation de Z n'y appartient pas); les ensembles de la classe $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{M}_2)$ sont appelés *divergents* (un ensemble Z est divergent, lorsqu'il n'existe dans l'espace aucun point d'accumulation de Z). Tout ensemble divergent est isolé, cependant la réciproque n'est pas nécessairement vraie. On a: $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{M}_{\aleph_0}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{M}_2)$ et $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{M}_{\aleph_0}) = \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{M}_2)$.

11. En allant plus loin, examinons la classe $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{M}_{\aleph_1})$ — c.-à-d. la classe des ensembles *localement* (au plus) [7]) *dénombrables*, et la classe $\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{M}_{\aleph_1})$. — Si l'espace M est séparable [8]), on sait que $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{M}_{\aleph_1}) = \boldsymbol{L}'(\boldsymbol{M}_{\aleph_1}) = \boldsymbol{M}_{\aleph_1}$: pour qu'un ensemble soit localement (au plus) dénombrable, il faut et il suffit qu'il soit au plus dénombrable; car tout ensemble infini non dénombrable possède un point de condensation [9]).

Or, M. Sierpiński a posé la question *quels sont des ensembles localement dénombrables quand l'espace métrique n'est pas séparable*: il est évident qu'ils peuvent être non dénombrables. Voici une réponse:

[6]) Y est l'intérieur de X, si Y est l'ensemble de tous les points y de X pour lesquels il existe une sphère $S(y, r)$ entièrement contenue dans X.

[7]) Si l'espace est infini, l'expression „au plus" peut être biffée.

[8]) C-à-d.: contient un ensemble au plus dénombrable dense (dans M).

[9]) V. p. ex.: F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), p. 268; comp. aussi p. 219, note [1]).

12. Théorème I. [10]). *Tout ensemble localement dénombrable* $[L(M_{\aleph_1})]$ *est une somme d'une suite infinie d'ensembles divergents (et disjoints).*

Démonstration: Soit Z un ensemble de la classe $L(M_{\aleph_1})$; il correspond à chaque point z de Z un nombre r_z tel que $Z \cdot S(z, r_z)$ est au plus dénombrable; puisque ce nombre peut être remplacé par chaque nombre plus petit, nous pouvons supposer qu'il est égal à $\frac{1}{i}$ où i est un entier positif convenable. Prenons, pour chaque z, i le plus petit possible et rassemblons tous les z pour lesquels $r_z = \frac{1}{i}$ en un ensemble $U^{(i)}$: on aura donc

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} U^{(i)}, \text{ les ensembles } U^{(i)} \text{ étant disjoints.} \tag{4}$$

On voit immédiatement que les $U^{(i)}$ appartiennent à $L(M_{\aleph_1})$. u et v étant deux points de $U^{(i)}$, nous dirons que $u\,R\,v$, s'il existe une suite finie d'éléments de $U^{(i)}$:

$$u = u_0^{(i)}, u_1^{(i)}, \ldots u_n^{(i)} = v, \tag{5}$$

telle que la distance de deux élements consécutifs y est $< \frac{1}{i}$. La rélation R est évidemment réfléchie (pour $u \epsilon U^{(i)}$, on a $u\,R\,u$), symétrique (si $u\,R\,v$, alors $v\,R\,u$) et transitive (si $u\,R\,v$ et $v\,R\,x$, alors $u\,R\,x$). En réunissant, pour un u, tous les points v pour lesquels on a: $u\,R\,v$, on obtient la *chaîne* de u: ainsi, l'ensemble $U^{(i)}$ *se décompose en chaînes disjointes.* Or, il est à remarquer que chaque chaîne *est au plus dénombrable*; choisissons, en effet, un élément u dans une telle chaîne et classifions tous ses éléments v selon la longueur minimale n de la suite (5): on démontre par l'induction, en s'appuyant sur la définition de $U^{(i)}$, que chaque classe de cette classification est au plus dénombrable, donc toute la chaîne l'est aussi. Par conséquent, on peut numéroter les éléments [11]) de chaque chaîne V:

$$V = (v_1, v_2, v_3 \ldots)$$

[10]) Grâce à une remarque de M. Sierpiński, je reproduis ici un énoncé plus avantageux de celui que j'avais formulé auparavant.

[11]) S'ils ne sont qu'en nombre fini, il n'y aura pas de numéros trop grands.

L'ensemble $U^{(i)}$ étant décomposé en chaînes V, prenons de chaque chaîne son élément v_n: tous ces v_n constituent un ensemble $T_n^{(i)}$ et on a: $U^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(i)}$. Mais chaque $T_n^{(i)}$ est un ensemble divergent, parce que, v_n' et v_n'' en étant deux éléments différents, on a: $\varrho(v_n', v_n'') \geqslant \frac{1}{i}$. Ainsi, l'ensemble $U^{(i)}$ est une somme d'une suite infinie d'ensembles divergents (et disjoints); donc, d'après (4), l'ensemble Z est également une telle somme, c. q. f. d.

13. Un ensemble pouvant être une somme d'une suite d'ensembles divergents (et disjoints), sans qu'il soit localement dénombrable, l'énoncé précédent ne nous donne pas une condition nécessaire et suffisante.

Exemple: Soit $M = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$, $\{Z_n\}$ étant une suite d'ensembles disjoints telle que Z_0 ne contient qu'un seul élément p_0, et que tous les autres Z_n sont infinis et non dénombrables. La distance $\varrho(x, y)$ dans l'espace M soit égale à 0 pour $x = y$; égale à $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$ pour $x \neq y$, $x \epsilon Z_n$, $y \epsilon Z_{n'}$, $n > 0$, $n' > 0$; égale à $\frac{1}{n}$ pour $x \epsilon Z_n$, $y = p_0$ ou bien pour $x = p_0$, $y \epsilon Z_n$ $(n > 0)$. p_0 est un point de condensation, M est l'ensemble cherché. — Si l'on rejette le point p_0, on obtient un ensemble appartenant à $L(M_{\aleph_1})$, tandis qu'il n'appartient pas à $L'(M_{\aleph_1})$.

Par une modification du th. I, on obtient la condition cherchée:

Théorème II. *Pour qu'un ensemble Z soit localement dénombrable* $[L(M_{\aleph_1})]$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres positifs* $\{\varrho_n\}$ *et une suite d'ensembles divergents* $\{Z_n\}$ *telles que*:

1°. $Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$;

2°. *n et n' étant des entiers positifs, et z_n — un élément arbitraire de Z_n, on a pour tous les points $z_{n'}$ de $Z_{n'}$, sauf un seul point exceptionnel* [12]) *peut être*: $\varrho(z_n, z_{n'}) \geqslant \varrho_n$.

Démonstration:

a) La condition est nécessaire. — En effet, quand on recourt à la démonstration précédente, on voit bien que la condition 2°. sera remplie pour $\varrho_n = \frac{1}{i}$, si $Z_n \subset U^{(i)}$; mais s'il existe un élément de $Z_{n'}$ appartenant à la même chaîne que z_n, il peut présenter l'unique exception, dont nous avons prévenu.

[12]) Dépendant de z_n.

b) La condition est suffisante. — Supposons qu'elle est réalisée. Si $z \in Z$, on a, pour un n convenable, $z \in Z_n$; dans la sphère $S(z, \varrho_n)$ on peut trouver un élément au plus de chaque $Z_{n'}$, donc $\aleph_0$ éléments au plus de Z, c. q. f. d.

14. Le th. II étant assez compliqué, nous présentons encore une autre condition nécessaire et suffisante:

Théorème III. [13]. *Pour qu'un ensemble Z soit localement dénombrable $[L(M_{\aleph_1})]$, il faut et il suffit qu'il existe une classe $\mathfrak{G}$ d'ensembles ouverts telle que:*

1°. *Z est contenu dans la somme des ensembles de la classe $\mathfrak{G}$;*

2°. *G étant un ensemble de $\mathfrak{G}$, l'ensemble $Z.G$ est au plus dénombrable.*

3°. *G_1 et G_2 étant deux ensembles différents de $\mathfrak{G}$, l'ensemble $Z \cdot G_1 \cdot G_2$ est vide.*

Démonstration:

a) La condition est nécessaire. — Prenons un Z localement dénombrable. Envisagé comme l'espace, il est *a fortiori* localement séparable, donc, d'après le resultat de M. Sierpiński [14], il est une somme disjointe d'ensembles ouverts dans Z et séparables; chacun de ces ensembles, étant séparable et — en même temps — localement dénombrable (comme sous-ensemble de Z), doit nécessairement être dénombrable (n^o **11**); Z est donc une somme disjointe d'une classe $\mathfrak{A}$ d'ensembles ouverts dans Z et dénombrables. Pour tout ensemble A ouvert dans Z, il existe un ensemble G ouvert dans M tel que $A = Z \cdot G$; parmi ces ensembles G, il existe un ensemble G_A le plus grand. Soit $\mathfrak{G}$ la classe des ensembleso uverts G_A ainsi obtenue de la classe $\mathfrak{A}$ des ensembles A: $\mathfrak{G}$ jouit de toutes les propriétés désirées.

b) La condition est évidemment suffisante: ce sont les conditions 1°. et 2°. seules qui ne traduisent qu'en d'autres termes la notion de la dénombrabilité locale.

[13]) J'ai établi ce théorème (et le suivant) après avoir fait la connaissance du manuscrit de la note de M. W. Sierpiński: *Sur les espaces métriques localement séparables*, ce volume, pp. 107—113.

[14]) L. c. [13]); d'ailleurs, on pourrait raisonner d'une façon plus directe.

15. Théorème IV. *Pour qu'un ensemble Z soit localement dénombrable au sens restreint $[L'(M_{\aleph_1})]$, il faut et il suffit qu'il existe une classe $\mathfrak{G}$ d'ensembles ouverts telle que:*

1°. *La somme des ensembles de la classe $\mathfrak{G}$ couvre tout l'espace M;*

2°. *G étant un ensemble de $\mathfrak{G}$, l'ensemble $Z \cdot G$ est au plus dénombrable;*

3°. *G_1 et G_2 étant deux ensembles différents de $\mathfrak{G}$, l'ensemble $\overline{Z} \cdot G_1 \cdot G_2$ est vide* [15]).

Démonstration analogue à la précédente: on considère $\overline{Z}$ comme l'espace et on démontre aisément qu'il est localement séparable: la classe $\mathfrak{G}$ d'ensembles ouverts ainsi obtenue remplit les conditions 3° et 2°, en couvrant l'ensemble $\overline{Z}$; quand on lui adjoint encore l'ensemble ouvert $C(\overline{Z})$, toutes les conditions seront satisfaites [16]). Quant à la suffisance, ce sont de nouveau les conditions 1°. et 2°. seules qui traduisent déjà en d'autres termes la notion de la dénombrabilité locale au sens restreint.

16. Nous avons étudié les classes $L(M_\mathfrak{n})$ et $L'(M_\mathfrak{n})$ pour $\mathfrak{n} \leqslant \aleph_1$. Mais on peut démontrer les généralisations suivantes des théorèmes I—IV:

$\mathrm{I}_\mathfrak{n}$. *Si $\mathfrak{n} = \aleph_{\alpha+1}$, tout ensemble de $L(M_\mathfrak{n})$ est une somme de $\aleph_\alpha$ ensembles divergents et disjoints.*

$\mathrm{II}_\mathfrak{n}$. *Soit $\mathfrak{n} = \aleph_{\alpha+1}$; alors, pour qu'un ensemble Z soit $\in L(M_\mathfrak{n})$, il faut et il suffit qu'il existe une suite transfinie de nombres positifs $\{\varrho_\xi\}$ $(\xi < \omega_\alpha)$ et une suite d'ensembles divergents $\{Z_\xi\}$ $(\xi < \omega_\alpha)$ telles que: 1°. Z est la somme des Z_ξ; 2°. ξ et η étant des nombres ordinaux $< \omega_\alpha$, et z_ξ — un élément arbitraire de Z_ξ, on a pour tous les points z_η de Z_η, sauf un seul point exceptionnel peut être: $\varrho(z_\xi, z_\eta) \geqslant \varrho_\xi$.*

$\mathrm{III}_\mathfrak{n}$. *Soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal régulier* [17]); *alors, pour qu'un ensemble Z soit $\in L(M_\mathfrak{n})$, il faut et il suffit qu'il existe une classe $\mathfrak{G}$ d'ensembles ouverts remplissant les conditions 1° et 3° du th.* III *et, de plus, la condition:*

$2^\circ_\mathfrak{n}$. *G étant un ensemble de $\mathfrak{G}$, l ensemble $Z.G$ est de puissance $< \mathfrak{n}$*

[15]) $\overline{Z}$ désigne la fermeture (*abgeschlossene Hülle*) de Z.

[16]) A vrai dire, si l'on se rappelle le mode de construction des G_A, on voit que $C(\overline{Z})$ est superflu (pour Z non vide).

[17]) C-à-d. $\mathfrak{n} = \aleph_\alpha$, où ω_α est un nombre ordinal régulier (v. F. Hausdorff, op. cit. [9]), p. 130).

IV$_{\mathfrak{n}}$. *Soit* $\mathfrak{n}$ *un nombre cardinal régulier; alors, pour qu'un ensemble* Z *soit* $\varepsilon\, L'(M_{\mathfrak{n}})$, *il faut et il suffit qu'il existe une classe* $\mathfrak{G}$ *d'ensembles ouverts remplissant les conditions* 1° *et* 3° *du th.* IV *et la condition* $2^0_{\mathfrak{n}}$ *du th.* III$_{\mathfrak{n}}$.

Soit $S_{\mathfrak{n}}$ la classe d'ensembles X contenant un sous-ensemble de puissance $< \mathfrak{n}$, dense dans X. Le théorème cité de M. Sierpiński prendra la forme suivante: $\mathfrak{n}$ *étant un nombre cardinal régulier, pour qu un ensemble métrique soit* $\varepsilon\, L(S_{\mathfrak{n}})$, *il faut et il suffit qu'il soit une somme disjointe d'ensembles ouverts de* $S_{\mathfrak{n}}$ [18]) [19]).

17. Remarque. En analysant des notions „d'origine locale" telles comme la continuité des fonctions ou la connexité locale des ensembles, on pourrait penser qu'elles n'aient presque rien de commun avec les notions que nous avons introduites dans les n^{os} 2. et 3. Or, c'est seulement parce que celles-là ont une structure logique un peu plus complexe, mais on les obtient subséquemment, par un procédé semblable au suivant: Si P_j (pour j positif) est la classe des ensembles connexes de diamètre $< j$, alors pour que l'espace soit *localement connexe* au sens de MM. Hahn et Mazurkiewicz, il faut et il suffit qu'il soit $\varepsilon \prod_j L(P_j)$ [20]).

Observons que si J est un ensemble quelconque (d'ordinaire — on s'efforce de le rendre dénombrable) et si à chaque élément j de J correspond une classe (propriété) P_j, on a (en vertu des théorèmes des n^{os} 4. et 5.) les formules:

$$L\left(\prod_{j \in J} L(P_j)\right) = \prod_{j \in J} L(P_j),$$

$$L'\left(\prod_{j \in J} L'(P_j)\right) = \prod_{j \in J} L'(P_j).$$

[18]) Tous les théorèmes des n^{os} 12.—16. restent vrais, si l'on envisage un espace où $\varrho(x, y)$ ne remplit que les conditions [2]) *Mt* 1.1 et *Mt* 2, la condition *Mt* 1.2 n'étant point essentielle [Cf. ma Thèse (Varsovie, 1927; à paraître), § 22].

[19]) Le lecteur a remarqué, peut être, que, dans tout ce qui précède, l'application de la méthode connue de *relativisation* (v. F. Hausdorff, op. cit. [9]), Chap. VII, § 6) aurait apporté des simplifications; mais il y avait d'autres raisons pour lesquelles nous n'en avons pourtant fait presque aucun usage.

[20]) Cf. H. Tietze: *Beiträge zur allgemeinen Topologie* III, Monatsh. f. Math. **32** (1922), pp. 15—16; K. Menger: *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. **95** (1925), pp. 281—282; N. Aronszajn: *Einige Bemerkungen über den Begriff des lokalen Zusammenhanges*, Monatsh. f. Math. **37** (1930), pp. 241—242, et *Sur les invariants des transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. **19** (1932), pp. 103 - 104.

Sur les espaces métriques localement séparables.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Un espace métrique M est dit *localement séparable*, s'il existe pour tout point p de M une sphère S ayant p comme centre et dont l'intérieur est séparable (c'est-à-dire contient un sous-ensemble au plus dénombrable, dense dans S) [1]).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Pour qu'un espace métrique soit localement séparable, il faut et il suffit qu'il soit une somme disjointe d'ensembles ouverts séparables* [2]).

Démonstration.

On voit sans peine que la condition de notre théorème est suffisante: il nous reste donc à démontrer qu'elle est nécessaire.

Soit donc M un espace métrique localement séparable.

Toutes les sphéres considérées dans cette Note seront ouvertes: $S(p, r)$ désignera la sphère au centre p et au rayon r, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points q de l'espace M, tels que

$$\varrho(p, q) < r$$

($\varrho(p, q)$ désignant la distance entre les points p et q).

Nous dirons que deux points p et q de l'espace M *sont en relation* R et nous écrirons pRq s'il existe une sphère séparable $S(p, r)$

[1]) Cf. P. Urysohn, *Fund. Math.* t. IX, p. 119.

[2]) M. Lindenbaum m'a communiqué que ce théorème est implicitement contenu dans un théorème de M. Alexandroff (*Math. Ann.* 92, p. 299, Fundamentalsatz 2), dont la démonstration est d'ailleurs plus compliquée que la nôtre.