par A' l'arc $r=r'$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{1}{3}\varphi''$, $z=z'$;

par A'' l'arc $r=r''$, $\frac{2}{3}\varphi''\leqslant\varphi\leqslant\varphi''$, $z=z''$;

par A_n l'arc $r=r_{m_n}$, $\frac{1}{3}(\varphi''+a_n)\leqslant\varphi\leqslant\frac{1}{3}(\varphi''+b_n)$, $z=z_{m_n}$.

Posons

$$K=A'+A''=\sum_{n=1}^{\infty}A_n+\sum_{t\in C}\mathscr{H}_{\frac{1}{3}(\varphi''+t)}.$$

On a la relation

$$\overline{\sum_{n=1}^{\infty}A_n}\supset\sum_{t\in C}\mathscr{H}_{\frac{1}{3}(\varphi''+t)}$$

qui permet de vérifier sans peine que K est un continu du type λ, irréductible entre $(r',0,z')$ et (r'',φ'',z''). D'autre part, la transformation f qui fait correspondre au point (r,φ,z) de $\mathfrak{L}_2$ le point $(r,0,z)$ de $\mathscr{H}$ transforme $\mathfrak{L}_2$ d'une façon continue en continu $\mathscr{H}$, qui n'est λ-connexe entre aucun couple de ses points.

Le problème suivant reste ouvert: *des exemples contre l'invariance de λ-connexité envers les transformations continues existent-ils sur le plan?*

5. En présence des exemples $\mathfrak{L}_1$, et $\mathfrak{L}_2$, il serait intéressant d'examiner au point de vue des transformations continues les invariants d'homéomorphie dont la généralité est intermédiaire entre α-connexité et λ-connexité. Telle est p. ex. la notion de continu que nous appelons *δ-connexe*, c. à d. de continu C qui contient pour tout couple p,q de ses points un continu irréductible entre p et q dont tous les sous-continus sont décomposables. On ne sait rien sur la manière dont se comporte cette propriété vis à vis des transformations continues f de C, sauf le fait que $f(C)$ est toujours un continu décomposable (cf. 3).

Varsovie, Février 1933.

Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte.

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es sei f eine stetige Funktion, welche einen metrischen Raum A auf [1]) seine Teilmenge B abbildet und zwar so, dass für jedes $x\in B$ die Beziehung $f(x)=x$ gilt. B heisst dann *Retrakt des Raumes A*. Wenn es insbesondere eine stetige Funktion $\varphi(x,t)$ gibt derart, dass

$$\varphi(x,0)=x,\quad \varphi(x,t)\in A,\quad \varphi(x,1)=f(x)$$

für jedes $x\in A$ und $0\leqslant t\leqslant 1$ ist, so wird f die Funktion genannt die *A auf B durch Deformation retrahiert*. Die Funktion φ wird dann *Deformation, welche die Retrahierung f induziert*, und B *Deformationsretrakt von A* genannt.

Eine metrische, in sich kompakte Punktmenge B heisst ein *absoluter Retrakt* (bzw. ein *absoluter Umgebungsretrakt* [2])), wenn für jeden metrischen Raum $A\supset B$, die Menge B ein Retrakt des Raumes A (bzw. irgendeiner Umgebung [3]) von B im Raume A) ist.

Der Zweck dieser Arbeit ist einen allgemeinen Satz (Satz 1) zu beweisen und einige seine einfache Folgerungen anzugeben.

Satz 1. *Eine Funktion f, welche einen metrischen kompakten Raum A auf die Menge B retrahiert, erzeugt eine homomorphe Ab-*

[1]) d. h. $f(A)=B$ ist.

[2]) Vgl. meine Note, Fund. Math. 19 (1932), S. 220—242. Die absoluten Umgebungsretrakte sind dort die $\mathfrak{R}$-Mengen genannt. Sie sind mit den homöomorphen Bildern der in sich kompakten Retrakte von offenen Teilmengen des Grundquaders des Hilbertschen Raumes identisch

[3]) Die Menge U heisst eine Umgebung von B im Raume A, wenn $U\subset A$ gilt und B im Innern von U enthalten ist, d. h. wenn die abgeschlossene Hülle von $A-U$ mit B punktfremd ist.

bildung sämtlicher Bettischen Gruppen[4]) *von* A (*bzw. der Fundamentalgruppe von* A *bezüglich eines beliebigen Punktes* $a_0 \in A$) *auf die entsprechenden Bettischen Gruppen von* B (*bzw. auf die Fundamentalgruppe von* A *bezüglich des Punktes* $f(a_0) \in B$).

Retrahiert f *den Raum* A *auf* B *durch Deformation, so ist jeder von diesen, durch* f *erzeugten Homomorphismen ein* 1-*Isomorphismus.*

Beweis. Ordnen wir jedem n-dimensionalen in A liegenden orientierten Simplexe[5]) $\Delta = (a_0\, a_1 \dots a_n)$ das in B liegende orientierte Simplex $\Delta_f = (f(a_0) f(a_1) \dots f(a_n))$ zu, falls $f(a_i) \neq f(a_j)$ für $i \neq j$, hingegen Null, falls mindestens zwei unter den Bildpunkten $f(a_i)$, wo $i = 0, 1, \dots, n$ zusammenfallen. Somit wird auch jedem algebraischen in A liegenden[6]) Komplexe K ein in B liegender Komplex K_f zugeordnet. Es gilt dabei:

1° $(K + K')_f = K_f + K'_f$,

2° Ist K ein homogen n-dimensionaler Komplex, so ist K_f ebenfalls ein homogen n-dimensionaler Komplex (wobei $K_f = 0$ nicht ausgeschlossen ist),

3° Dem Rande[5]) $\dot{K}$ von K ist der Rand $\dot{K}_f$ von K_f zugeordnet.

Aus 2° und 3° folgt:

4° Ist C ein in A liegender, n-dimensionaler Zyklus, so ist C_f ein in B liegender, n-dimensionaler Zyklus.

Da f gleichmässig stetig ist, haben wir ferner:

5° Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta > 0$ derart, dass jeder η-Komplex[7]) K in A auf einen ε-Komplex K_f in B übergeht.

Da schliesslich $f(x) = x$ für jedes $x \in B$ ist, gilt:

6° Ist K ein in $B \subset A$ liegender Komplex, so ist $K_f = K$.

[4]) Die Bettischen Gruppen und die Fundamentalgruppe eines beliebigen metrischen kompakten Raumes sind von L. Vietoris, Math. Ann. 97 (1927), eingeführt. (Vgl. Anm.)[8]).

[5]) Die Benennungen: „orientiertes Simplex", „algebraischer Komplex", „Rand eines algebraischen Komplexes", „n-dimensionaler Zyklus", „Homologie" u. s. w. werden hier in dem in dem Buche von P. Alexandroff, „Einfachste Grundbegriffe der Topologie" (Berlin, 1932) festgelegten Sinne gebraucht. Siehe insbesondere Kap. II und die Anmerkungen **23** und **40**.

[6]) Ein Simplex (bzw. Komplex) liegt in A, wenn seine sämtlichen Eckpunkte in A liegen.

[7]) Ein Komplex K in A heisst ein η-Komplex in A, wenn jedes seiner Simplexe einen Durchmesser $< \eta$ hat.

Wenn man nun jedem n-dimensionalen Vollzyklus[8]) $Z = \{C_k\}$ die Folge $Z_f = \{C_{kf}\}$ zuordnet, so erhält man nach 1°, 4°, 5° und 6° eine homomorphe Abbildung der Gruppe aller n-dimensionalen Vollzyklen in A auf die Gruppe aller n-dimensionalen Vollzyklen in B[9]). Auf Grund von 3° und 5° gehen dabei in A homologe Vollzyklen über in Vollzyklen, welche in B homolog sind. Daraus und aus 6° folgt, dass durch diese Zuordnung eine homomorphe Abbildung der n-dimensionalen Bettischen Gruppe von A auf die n-dimensionale Bettische Gruppe von B induziert ist.

Um den Beweis des ersten Teiles unseres Satzes zu vollenden, brauchen wir folgenden

Hilfssatz. *Retrahiert* f *einen metrischen, kompakten Raum* A *auf* B *durch Deformation, so gibt es für jede gegebene Zahl* ε *eine Zahl* $\eta > 0$ *derart, dass für jeden* η-*Zyklus* C *in* A *ein* ε-*Komplex* Q *in* A *existiert, für welchen* $\dot{Q} = C - C_f$ *gilt.*

Beweis des Hilfssatzes. Die Deformation $\varphi(x, t)$, welche die Retrahierung f induziert, lässt sich als eine stetige Funktion des Punktes (x, t) im Produktraume $A \times \langle 0, 1 \rangle$[10]) betrachten. Da dieser Produktraum kompakt ist, gibt es für ein beliebig gegebenes $\varepsilon > 0$

[8]) Eine Folge $\{Q_k\}$ von Komplexen in A wird *unendlich fein* genannt, wenn es eine, gegen Null konvergierende Folge $\{\varepsilon_k\}$ von positiven Zahlen gibt derart, dass Q_k ein ε_k-Komplex, für $k = 1, 2, \dots$ ist. Eine Folge $\{C_k\}$ von n-dimensionalen Zyklen in A heisst ein Vollzyklus (bei L. Vietoris, l. c. — „Fundamentalfolge") in A, wenn sie erstens unendlich fein ist und wenn zweitens eine unendlich feine Folge $\{Q_k\}$ von Komplexen in A existiert derart, dass Q_k den Zyklus $C_k - C_{k+1}$ als Rand hat Zwei Vollzyklen $\{C_k\}$ und $\{C'_k\}$ werden in A *homolog* genannt, wenn eine unendlich feine Folge $\{P_k\}$ von Komplexen in A existiert, für welche $C_k - C'_k$ der Rand von P_k ist. Wenn wir nun mit $Z^n(A)$ die Gruppe aller n-dimensionalen Vollzyklen in A (bei gegebenem Koeffizientenbereiche) bezeichnen und mit $H^n(A)$ diejenige Untergruppe von $Z^n(A)$, welche aus allen n-dimensionalen in A mit Null homologen Vollzyklen besteht, so heisst die Faktorgruppe von $Z^n(A)$ nach $H^n(A)$ die *n-dimensionale Bettische Gruppe von* A.

[9]) Dieselbe Beziehung gilt auch zwischen den Gruppen der n-dimensionalen unendlich feinen Zyklen in A und in B.

[10]) Der Produktraum $A \times \langle 0, 1 \rangle$ des Raumes A und des Intervalles $\langle 0, 1 \rangle$ ist der Raum, der als Elemente alle geordnete Paare (x, t) hat, wo $x \in A$ und $0 \leq t \leq 1$, und der durch die Formel $\varrho[(x, t), (x', t')] = \sqrt{\varrho(x, x')^2 + (t - t')^2}$ metrisiert ist. Mit $A \times (t_0)$, wo $0 \leq t_0 \leq 1$, wird die Menge aller Punkte von der Gestalt (x, t_0) des Raumes $A \times \langle 0, 1 \rangle$ bezeichnet.

ein $\eta > 0$ derart, dass folgende Beziehung für je zwei Punkte $(x, t), (x', t') \in A \times \langle 0, 1 \rangle$ gilt:

$$(1) \qquad \text{Aus } \varrho((x,t),(x',t')) < \eta \text{ folgt } \varrho(\varphi(x,t), \varphi(x',t')) < \varepsilon.$$

Es sei nun C ein beliebiger η-Zyklus in A. Es gibt dann ein $\eta' < \eta$ derart, dass C auch ein η'-Zyklus ist. Wir wählen ferner eine natürliche Zahl q, sodass folgendes für je zwei Punkte $(x, t), (x', t')$ des Raumes $A \times \langle 0, 1 \rangle$ gilt:

$$(2) \qquad \text{Aus } \varrho(x, x') < \eta' \text{ und } |t - t'| < \frac{1}{q} \text{ folgt } \varrho((x,t),(x',t')) < \eta.$$

Es sei p eine beliebige ganze Zahl, für welche $0 \leqslant p \leqslant q$ gilt. Wir ordnen jedem Simplexe $(a_0 a_1 \dots a_n)$ von C das in $A \times \left(\frac{p}{q}\right)$[10]) liegende Simplex $\left(a_0, \frac{p}{q}\right)\left(a_1, \frac{p}{q}\right) \dots \left(a_n, \frac{p}{q}\right)$ zu. Der dadurch definierte, mit C isomorphe, in $A \times \left(\frac{p}{q}\right)$ liegende Zyklus wird mit $C\left(\frac{p}{q}\right)$ bezeichnet. Es ist bekannt [11]), dass man im Raume $A \times \left\langle \frac{p}{q}, \frac{p+1}{q} \right\rangle$ (für jedes $0 \leqslant p < q$) einen Komplex $K\left(\frac{p}{q}\right)$ konstruieren kann, welcher als Rand den Zyklus $C\left(\frac{p}{q}\right) - C\left(\frac{p+1}{q}\right)$ hat und dessen sämtliche Simplexe die Gestalt

$$\left(\left(a_0, \frac{p}{q}\right)\left(a_1, \frac{p}{q}\right) \dots \left(a_i, \frac{p}{q}\right)\left(a_{i+1}, \frac{p+1}{q}\right) \dots \left(a_n, \frac{p+1}{q}\right)\right)$$

haben, wobei $(a_0 a_1 \dots a_n)$ ein Simplex von C ist. Da C ein η'-Zyklus ist, folgt aus (2), dass $K\left(\frac{p}{q}\right)$ ein η-Komplex ist. Ein η-Komplex ist somit auch der Komplex $K = \sum_{p=0}^{q-1} K\left(\frac{p}{q}\right)$, welcher in $A \times \langle 0, 1 \rangle$ liegt und dessen Rand der Zyklus $\sum_{p=0}^{q-1} \left[C\left(\frac{p}{q}\right) - C\left(\frac{p+1}{q}\right)\right] = C(0) - C(1)$ bildet.

[11]) Siehe z. B. S. Lefschetz, Topology, New York 1930, s. 77—79.

Wir ordnen nun jedem Simplexe $((a_0, t_0)(a_1, t_1) \dots (a_n, t_n))$ von K (wo $(a_i, t_i) \neq (a_j, t_j)$ für $i \neq j$ ist) das Simplex $(\varphi(a_0, t_0)\, \varphi(a_1, t_1) \dots \varphi(a_n, t_n))$ zu, falls $\varphi(a_i, t_i) \neq \varphi(a_j, t_j)$ für $i \neq j$ gilt, und Null im anderen Falle. Somit wird der Komplex K auf einen in A liegenden Komplex Q simplizial abgebildet, wobei nach (1), Q ein ε-Komplex ist. Der Rand von K, d. h. der Zyklus $C(0) - C(1)$ geht dann in den Rand $\dot{Q}$ von Q über [12]). Da aber $\varphi(x, 0) = x$ und $\varphi(x, 1) = f(x)$ gilt, wird durch diese Zuordung $C(0)$ auf C und $C(1)$ auf C_f abgebildet. Es gilt somit $\dot{Q} = C - C_f$, womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

Es sei nun $\{C_k\}$ eine beliebige unendlich feine Zyklenfolge im Raume A. Aus unserem Hilfssatze folgt unmittelbar die Existenz einer unendlich feinen Komplexenfolge $\{Q_k\}$ derart, dass $\dot{Q}_k = C_k - C_{kf}$ für jedes $k = 1, 2, \dots$ gilt. Diese Beziehung gilt insbesondere für jeden Vollzyklus $\{C_k\}$ in A, womit die Vollzyklen $\{C_k\}$ und $\{C_{kf}\}$ homolog in A sind. Damit ist auch der Isomorphismus der Bettischen Gruppen von A mit entsprechenden Bettischen Gruppen von B bewiesen.

Ein metrischer, kompakter Raum A heisse *in der n-ten Dimension azyklisch*, wenn es für jede unendlich feine Folge $\{C_k\}$ der n-dimensionalen Zyklen in A, (bei beliebigen Koeffizientenbereichen, welche auch von k abhängig sein können) eine unendlich feine Folge $\{Q_n\}$ von Komplexen in A gibt derart, dass $\dot{Q}_k = C_k$ für jedes $k = 1, 2, \dots$ gilt.

Auf Grund der bisherigen Betrachtungen (und zwar auf Grund von 3°—6° und des letzten Hilfssatzes) lassen sich folgende Behauptungen aufstellen:

a) *Jeder Retrakt eines metrischen, kompakten und in der n-ten Dimension azyklischen Raumes ist selbst in der n-ten Dimension azyklisch.*

b) *Wenn irgendein Deformationsretrakt eines metrischen, kompakten Raumes in der n-ten Dimension azyklisch ist, so ist auch der Raum selbst in der n-ten Dimension azyklisch.*

Da jeder absolute Retrakt einen einpunktigen Deformationsretrakt hat [13]), so folgt insbesondere aus b):

c) *Jeder absolute Retrakt ist in allen positiven Dimensionen azyklisch.*

Da der Beweis des Homomorphismus (bzw. des 1-Isomorphismus) zwischen den fundamentalen Gruppen des Raumes A und seines Retraktes (bzw. Deformationsretraktes) B im wesentlichen analog zu dem soeben gegebenen Beweise der ähnlichen Beziehung zwi-

[12]) So genannter „Erster Erhaltungssatz". Siehe z. B. das zitierte Buch von P. Alexandroff, S. 29.

[13]) Siehe Fund. Math. 19 (1932), S. 235, Beispiel 4.

schen den Bettischen Gruppen von A und B verläuft, so beschränken wir uns nur auf seine Skizzierung.

Wir ordnen jedem geschlossenen, in A liegenden Wege[14]) $W = (a_0 \to a_1 \to \dots a_n \to a_0)$ den in B liegenden, geschlossenen Weg $W_f = (f(a_0) \to f(a_1) \to \dots f(a_n) \to f(a_0))$ zu. Da bei dieser Zuordnung Wege mit hinreichend kleinem Durchmesser auf beliebig kleine Wege abgebildet werden und da diese Zuordnung additiv ist, können wir ganz analog wie im Falle der Bettischen Gruppen beweisen, dass die Fundamentalgruppe von A bezüglich a_0 auf die Fundamentalgruppe von B bezüglich $f(a_0)$ homomorph abgebildet wird. Der Beweis, dass dieser Homomorphismus ein 1-Isomorphismus ist, falls f den Raum A auf B durch Deformation retrahiert, reduziert sich auf den Beweis, dass der Weg W_f sich von dem Wege W durch Addition der Glieder $W_{i,j}$ (wo $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, k-1$) erhalten lässt, wobei $W_{i,j}$ die geschlossenen Wege in A sind, und die Durchmesser von $W_{i,j}$ mit den Kantenlängen von W gleichmässig gegen 0 konvergieren. Um aber das zu erreichen, braucht man nur

$$W_{i,j} = \left(\varphi\left(a_i, \frac{j}{k}\right) \to \varphi\left(a_i, \frac{j+1}{k}\right) \to \varphi\left(a_{i+1}, \frac{j+1}{k}\right) \to \right.$$
$$\left. \to \varphi\left(a_{i+1}, \frac{j}{k}\right) \to \varphi\left(a_i, \frac{j}{k}\right)\right)$$

zu setzen, wo k hinreichend grosse natürliche Konstante ist. Genauer gesprochen, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, η eine positive Zahl bezeichnet, für welche die Beziehung (1) gilt und alle Kantenlängen von W kleiner als η sind, so braucht man um die Durchmesser aller Wege $W_{i,j}$ unter ε zu erniedrigen, die Konstante k so gross zu wählen, dass die Ungleichung $|t - t'| \leqslant \frac{1}{k}$, wo $0 \leqslant t$, $t' \leqslant 1$ ist, die Ungleichung $\varrho[(a_i, t), (a_{i+1}, t')] < \eta$ für $i = 0, 1, \dots n$ zur Folge hat.

Somit ist der Beweis des Satzes 1 vollendet.

Als Anwendung des Satzes 1 beweisen wir folgenden

[14]) Siehe wegen des Begriffes des in A liegenden geschlossenen Weges u. s. w. die unter [4]) angegebene Abhandlung von L. Vietoris.

Satz 2. *Für jeden absoluten Umgebungsretrakt E gibt es einen Polyeder*[15]) *P derart, dass sämtliche Bettischen Gruppen, wie auch die Fundamentalgruppe von E, homomorphe Bilder der entsprechenden Gruppen von P sind.*

Beweis. Nach dem bekannten Einbettungssatze von P. Urysohn[16]) kann man E als Teilmenge des Grundquaders Q_ω des Hilbertschen Raumes annehmen Wir setzen nun

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \text{ für jedes } (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in Q_\omega.$$

Es sei Σ_n eine simpliziale Zerlegung des Polyeders $Q_n = r_n(Q_\omega)$, deren sämtliche Simplexe Durchmesser $\leqslant \frac{1}{n}$ haben. P_n bezeichne die Summe aller mit $r_n(M)$ nicht punktfremden Simplexe von Σ_n. Die Mengen $U_n = \underset{p \in Q_\omega}{E}[r_n(p) \in P_n]$[17]) bilden dann eine Folge von abgeschlossenen Umgebungen[3]) von E. Es ist ersichtlich, dass es für jede Umgebung U von E einen Index n von der Art gibt, dass $U_n \subset U$ gilt. Daraus und aus der Tatsache, dass E ein absoluter Umgebungsretrakt ist, folgt, dass es einen Index n_0 gibt derart, dass E ein Retrakt der Menge U_{n_0} ist. Auf Grund des Satzes 1 sind somit sämtliche Bettischen Gruppen und die Fundamentalgruppe von E homomorphe Bilder der entsprechenden Gruppen von U_{n_0}. Unser Satz wird also bewiesen, wenn wir beweisen können, dass sämtliche Bettischen Gruppen und die Fundamentalgruppe von U_{n_0} mit den entsprechenden Gruppen des Polyeders $P = P_{n_0}$ 1-isomorph sind. Zu diesem Zweck genügt es, auf Grund des Satzes 1 zu zeigen, dass P_{n_0} ein Deformationsretrakt von U_{n_0} ist.

Wir setzen für jedes $p = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+k}, \dots) \in U_{n_0}$ und für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\varphi(p, t) = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, t \cdot x_{n_0+1}, \dots, t \cdot x_{n_0+k}, \dots).$$

[15]) Die Polyeder werden wir hier im elementargeometrischen Sinne verstehen.

[16]) Siehe z. B. K. Menger, Dimensionstheorie (Leipzig, 1928), S. 57.

[17]) $\underset{x \in Q}{E}[\;]$ bedeutet, wie üblich, die aus allen Punkten x von der Eigenschaft [ ] bestehende Teilmenge von Q.

Man ersieht leicht, dass $f(x) = \varphi(x, 0)$ eine U_{n_0} auf P retrahierende Funktion ist und $\varphi(x, t)$ eine die Retrahierung f induzierende Deformation bildet. Somit ist unser Beweis vollendet.

Korollar. *Die sämtlichen Bettischen Gruppen und die Fundamentalgruppe eines beliebigen absoluten Umgebungsretraktes sind Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden.*

Sur les ensembles localement dénombrables dans l'espace métrique.

Par

Adolphe Lindenbaum (Varsovie).

1. [1]) Soit M un *espace métrique* avec la *distance* $\varrho(x, y)$ [2]). Un ensemble de points est appelé *sphère* (ouverte) *de centre* a et *de rayon* r positif (fini ou infini), s'il est composé de tous les points x pour lesquels $\varrho(a, x) < r$; cette sphère est désignée par $S(a, r)$.

2. Soit $\boldsymbol{P}$ une classe d'ensembles (ou — ce qui revient ici au même — une propriété d'ensembles). Nous dirons qu'un ensemble Z situé dans M est *localement* $\boldsymbol{P}$ *au point* z, lorsqu'il existe un nombre positif r_z et un ensemble Z_z de $\boldsymbol{P}$ tels que

$$Z_z \cdot S(z, r_z) = Z \cdot S(z, r_z) \ ^{3}).$$

Le nombre r_z peut être remplacé toujours par un nombre plus petit.

L'ensemble Z sera *localement* $\boldsymbol{P}$ ou — en d'autres mots — appartiendra à la *classe* $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P})$, lorsque, pour tout $z \in Z$, il est localement $\boldsymbol{P}$ au point z [4]).

On voit immédiatement que tout ensemble de $\boldsymbol{P}$ est localement $\boldsymbol{P}$.

[1]) Dans les raisonnements sur les propriétés locales, *l'axiome du choix* joue en général un rôle essentiel. Il est donc admis pour tout ce qui suit.

[2]) C-à-d. $\varrho(x, y)$ est une fonction à valeurs réelles (finies), définie pour tous les points x, y de M et remplissant les conditions suivantes:

Mt 1.1: Si $x = y$, on a $\varrho(x, y) = 0$.
Mt 1.2: Si $\varrho(x, y) = 0$, on a $x = y$.
Mt 2: $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(z, x) + \varrho(y, z)$.

[3]) Cf. P. Urysohn: *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, Fund. Math. 7 (1925), p. 68.

[4]) Cf. op. cit. [3]), p. 35.