chains by a single arc. and rename c and d c_1 and d_1. Thus we see that G_1 contains fewer arcs than G, and contains neither a graph K_1 nor a graph K_2, as G contains neither. Hence G_1 has a dual G_1'; similarly G_2 has a dual G_2'.

Let $c_1'd_1'$, $d_1'a_1'$, $a_1'c_1'$, and $c_2'd_2'$, $d_2'b_2'$, $b_2'c_2'$ be the arcs of G_1' and G_2' corresponding to the arcs e_1a, e_1c_1, e_1d_1, and e_2b, e_2c_2, e_2d_2, of G_1 and G_2 respectively (these arcs must form circuits). Form G_3 by letting the vertices c_1 and c_2 of G_1 and G_2 coalesce into the vertex c; form G_3' by letting the vertices a_1' and b_2' of G_1' and G_2' coalesce into the vertex a'. By I, Theorem 23, G_3 and G_3' are duals (preserving the correspondence between their arcs — we shall understand these words without mention in the future).

Evidently G_1 and G_2 are non-separable; hence the sets of arcs P_1 and P_2 of G_1 and G_2 corresponding to the sets of arcs of G_1' and G_2' on a_1' and b_2' respectively form circuits. P_1 is formed of two chains E_1 and F_1 where $E_1 = c_1 e_1 + e_1 d_1$, and $P_2 = E_2 + F_2$, where $E_2 = c_2 e_2 + e_2 d_2$. Thus in G_3, the arcs corresponding to the arcs of G_3' on a' consist of two chains, $E_1 + E_2$ and $F_1 + F_2$; each of these joins d_1 to d_2. By Theorem 11, if we let d_1 and d_2 coalesce into the vertex d, forming the graph G_4, and replace a' by the two vertices a_3' and a_4', letting the arcs corresponding to E_1 and E_2 end on a_3', and those corresponding to F_1 and F_2, on a_4', forming the graph G_4', G_4 and G_4' are duals.

By the same theorem, if we let e_1 and e_2 coalesce in G_4 into the vertex e, forming the graph G_5, and replace the vertex a_3' in G_4' by the vertices a_5' and a_6', letting $a_3'd_1'$ and $a_3'd_2'$ end on a_5', and $a_3'c_1'$ and $a_3'c_2'$, on a_6', forming the graph G_5', G_5 and G_5' are duals. By I, Theorem 28, if we drop out both arcs ec and both arcs ed and the vertex e, and replace the arcs ae and eb by the single arc ab, the resulting graph has a dual. But this graph is just the graph G, and the theorem is proved.

Sur un problème concernant les transformations continues.

Par

B. Knaster et S. Mazurkiewicz (Warszawa).

1. Appelons *α-connexe* [1]) tout continu C qui contient pour chaque couple de ses points p, q un arc simple A (image homéomorphe du segment rectiligne) ayant ces points pour extrémités. On sait que α-connexité est une propriété invariante par rapport aux transformations continues f de C, car les images continues du segment étant α-connexes [2]), il existe déjà dans l'image $f(A)$ de A, donc à plus forte raison dans $f(C)$, un arc simple aux extrémités $f(p)$ et $f(q)$ toutes les fois que $f(p) \neq f(q)$.

Les généralisations de la notion d'arc simple conduisent d'une façon naturelle aux généralisations parallèles de celle de α-connexité. Ainsi nous appellerons *λ-connexe* tout continu C qui contient pour tout couple de ses points p, q un continu K irréductible du type λ [3]) entre p et q. Le problème se pose: *λ-connexité est-elle un invariant des transformations continues?* La réponse est *négative*, ce que nous allons montrer sur deux exemples différents et dont la discussion nous conduira à préciser d'autres problèmes dans le même ordre d'idées.

2. Continu $\mathfrak{L}_1$. Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes dans l'espace euclidien à 3 dimensions et C l'ensemble parfait ponctiforme de Cantor sur le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ de l'axe des x. Considérons le continu indécomposable $\mathfrak{B}$, décrit par B. Knaster et C. Kura-

[1]) „*arcwise connected*" des auteurs américains.
[2]) Cf. p. ex. S. Mazurkiewicz Fundam. Math. I, p. 201, th. IX.
[3]) C. Kuratowski, Fundam. Math. X, p. 225—276, en particulier p. 256 et 262.

towski[4]) et dont tous les vrais sous-continus sont des arcs simples. $\mathfrak{P}(t)$ désignant d'une façon générale le *composant*[5]) de $\mathcal{B}$ contenant le point $(t, 0, 0)$ où $t \in C$, on a $\mathcal{B} = \sum_{t \in C} \mathfrak{P}(t)$. Le composant $\mathfrak{P}(0)$ est représentable paramétriquement dans la forme $x = f_1(l)$, $y = f_2(l)$, $z = 0$ où $l \geqslant 0$, les fonctions f_1 et f_2 étant continues et le paramètre l désignant la longueur de l'arc simple aux extrémités $(0, 0, 0)$ et $(f_1(l), f_2(l), 0)$, situé dans $\mathfrak{P}(0)$. Désignons pour tout $t \in C$:

par $A(t)$ *le segment* $x = t$, $y = 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$,

par $D(t)$ *la demi-circonférence* $x^2 + (z-1)^2 = t^2$, $y = 0$, $z \geqslant 1$,

par $S(t)$ *la „spirale“* $x = -f_1(l) - \dfrac{t}{1+l}$, $y = -f_2(l)$, $z = \dfrac{1}{1+l}$, $l \geqslant 0$.

Chacune des „spirales“ $S(t)$ approche donc asymptotiquement le composant $\mathfrak{P}(0)$ de $\mathcal{B}$ et par conséquent le continu $\mathcal{B}$ tout entier (puisqu'un composant d'un continu indécomposable est toujours dense dans lui). Posons $H = \mathcal{B} + \sum_{t \in C} [A(t) + D(t) + S(t)]$, donc $H = \sum_{t \in C} [\mathfrak{P}(t) + A(t) + D(t) + S(t)]$, et soit $\mathcal{L}_1 = H + H^*$, où E^* désigne d'une façon générale le transformé de l'ensemble E par la symétrie $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$.

Ainsi défini, $\mathcal{L}_1$ est évidemment un continu. Pour montrer qu'il est λ-connexe, il suffit, par suite de α-connexité de chaque ensemble $[\mathfrak{P}(t) + A(t) + D(t) + S(t)]$ où $t \in C$, et de la symétrie de $\mathcal{L}_1$, d'envisager deux cas suivants:

(1) $\quad p = (t_1, 0, 0)$, $q = (t_2, 0, 0)$, $t_1 \in C - C^*$, $t_2 \in C^*$,

(2) $\quad p = (t_1, 0, 0)$, $q = (t_2, 0, 0)$, $t_1 \in C - C^*$, $t_2 \in C - C^*$.

Le sous-continu K de $\mathcal{L}_1$ du type λ, irréductible entre les points p et q, est: dans le cas (1) $K = A(t_1) + D(t_1) + S(t_1) + \mathcal{B}^*$ et dans le cas (2) $K = A(t_1) + D(t_1) + S(t_1) + \mathcal{B}^* + S(t_2) + D(t_2) + A(t_2)$.

Pour montrer qu'il existe une image continue $f(\mathcal{L}_1)$ de $\mathcal{L}_1$ qui n'est pas λ-connexe, considérons un point quelconque $a = (t, 0, 0)$ de $\mathcal{L}_1$ où $t \in C - \mathfrak{P}(0)$ et désignons par f la transformation continue de $\mathcal{L}_1$ obtenue par *l'identification* des points a et a^*, c. à d. la

[4]) Fundam. Math. V, p. 40—41.

[5]) c. à d. l'ensemble de tous les points $p \in \mathcal{B}$ qui s'y laissent unir avec le point donné par des vrais sous-continus de $\mathcal{B}$. Cf. Z. Janiszewski et C. Kuratowski, Fundam. Math. I, p. 215 et 218.

fonction $f(p) = T_p$ définie sur $\mathcal{L}_1$ et dont les valeurs T_p sont des sous-ensembles de $\mathcal{L}_1$ considérés comme des éléments de l'espace abstrait donné par la *décomposition semicontinue*[6]) $\mathcal{L}_1 = \sum_{p \in \mathcal{L}_1} T_p$ de $\mathcal{L}_1$, où $T_a = T_{a^*}$ désigne l'ensemble composé de points a et a^* et T_p pour $p \in \mathcal{L}_1 - T_a$ désigne l'ensemble formé du point p seul. La fonction f ne diffère donc de l'homéomorphie que par une seule valeur; une transformation de $\mathcal{L}_1$ topologiquement équivalente à f est d'ailleurs réalisable dans l'espace euclidien à 3 dimensions.

Or, il est aisé de voir que les seuls continus irreductibles entre les points $f(a)$ et $f(0, 0, 0)$ dans $f(\mathcal{L}_1)$ sont les continus indécomposables $f(B)$ et $f(B^*)$, donc qui ne sont pas du type λ.

En outre, le point a se laissant choisir aussi près que l'on veut du point $(0, 0, 0)$, l'exemple $\mathcal{L}_1$ montre en même temps que λ-connexité ne constitue même un invariant de la *quasi-homéomorphie* au sens de M. K. Kuratowski et S. Ulam[7]).

3. Il est naturel de se poser la question suivante:

Un continu λ-connexe admettant des images continues qui ne le sont pas, contient-il nécessairement des continus indécomposables et quel est le nombre minimum de ces derniers?

L'exemple $\mathcal{L}_1$ montre que ce nombre est $\leqslant 2$. Nous allons montrer qu'il est $\geqslant 2$ dans une hypothèse supplémentaire (qui ne semble toutefois se présenter dans le cas de $\mathcal{L}_1$).

Théorème. *Tout continu λ-connexe qui admet parmi ses images continues un continu indécomposable contient au moins deux continus indécomposables N_1 et N_2 tels que $N_1 - N_2 \neq 0 \neq N_2 - N_1$.*

Démonstration. Etant donnée une fonction continue f, définie sur un continu quelconque Q, il existe toujours un ensemble $N \subset Q$ *irréductible* par rapport à la propriété d'être un sous-continu de Q tel que $f(N) = f(Q)$. En effet, cette propriété étant *inductive*

[6]) C. Kuratowski, Fundam. Math. XI, p. 169—185, en particulier p. 169, 172 et 173.

[7]) Fundam. Math. XX, p. 252.

(c. à d. se présentant pour la partie commune de toute suite descendante d'ensembles fermés qui en jouissent), N existe en vertu du „*Reduktionssatz*" de M. L. E. J. Brouwer[8]). Nous appellerons le continu N *modèle irréductible* de l'image $f(Q)$.

Or, une décomposition $N = A + B$ où A et B seraient des vrais sous-continus non vides de N aurait pour conséquence la décomposition $f(Q) = f(A) + f(B)$ où $f(A)$ et $f(B)$ seraient à la fois des continus non vides (comme images continues des continus A et B) et des vrais sous-ensembles de $f(Q)$, puisque N en est par définition un modèle irréductible.

Par conséquent, si l'on admet que

(h_1) *le continu* $f(Q)$ *est indécomposable,*

il existe dans Q un continu N_1 jouissant de deux propriétés suivantes[9]):

(1) N_1 *est un modèle irréductible de* $f(Q)$,

(2) N_1 *est un continu indécomposable.*

En admettant, en outre, en conformité avec l'hypothèse (h_1), que

(h_2) $f(Q)$ *est un continu irréductible entre les points* α *et* β,

on conclut que

(3) N_1 *est un continu irréductible entre les points* a *et* b *tels que* $\alpha = f(a)$ *et* $\beta = f(b)$,

car si N_1 contenait, par contre, un vrai sous-continu M contenant a et b, le continu $f(M)$ serait selon (1) un vrai sous-continu de $f(Q)$ contenant α et β, contrairement à l'hypothèse (h_2).

En admettant enfin que

(h_3) Q *est un continu* λ*-connexe,*

il existe un continu $K \subset Q$ ayant les propriétés suivantes:

(4) K *est un continu du type* λ,

(5) K *est un continu irréductible entre* a *et* b.

[8]) Proceed. kon. Akad. Wett. Amsterdam XIV, p. 138; cf. aussi C. Kuratowski, Fundam. Math. III, p. 88 et 89.

[9]) Cette remarque d'ordre général est due à M. C. Kuratowski.

Or, comme $K \subset Q$, il vient $f(K) \subset f(Q)$ et comme le continu $f(K)$ contient d'après (5) les points $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$, on conclut de (h_2) que $f(K) = f(Q)$. Il en résulte selon (h_1) que K contient un continu N_2 qui, par analogie à (1) et (2), possède la propriété

$$f(N_2) = f(Q) \tag{6}$$

et qui est un continu indécomposable. En vertu de (4) N_2 est donc un vrai sous-continu de K et, comme tel, il ne contient, en raison de (5), soit le point a, soit le point b. On a par conséquent selon (3) $N_1 - N_2 \neq 0$, ce qui entraîne selon (1) et (6) que N_2 n'est pas situé dans N_1. On a donc en même temps $N_2 - N_1 \neq 0$, c. q. f. d.

Il est aisé d'apercevoir que la simple itération de ce mode du raisonnement ne nous conduira pas au delà de deux continus indécomposables différents. D'autre part, nous ne connaissons aucun exemple du continu satisfaisant aux hypothèses (h_1), (h_2) et (h_3) qui contienne moins que $2^{\aleph_0}$ continus indécomposables (cf. l'exemple qui suit).

4. Continu $\mathcal{L}_2$. Soit r, φ, z un système de coordonnées cylindriques et $\mathcal{K}$ un continu situé sur le demi-plan $r \geqslant 1, \varphi = 0$ et dont tous les sous-continus sont indécomposables[10]), donc qui n'est λ-connexe entre aucun couple de ses points. Désignons par $\mathcal{K}_\varphi$ le transformé de $\mathcal{K}$ donné par la rotation d'angle φ autour de l'axe des z et posons $\mathcal{L}_2 = \sum\limits_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \mathcal{K}_\varphi$.

En d'autres termes, $\mathcal{L}_2$ est le produit topologique de $\mathcal{K}$ par la circonférence.

Pour montrer que $\mathcal{L}_2$ est λ-connexe, il suffit par raison de symétrie (et parce que $\varphi = 0$ peut être remplacé par $\varphi = 2\pi$) de prouver que les points $(r', 0, z')$ et $(r'', \varphi'' z'')$ où $0 < \varphi'' \leqslant 2\pi$ peuvent être réunis dans $\mathcal{L}_2$ par un continu K du type λ, irréductible entre eux.

Or, soit $\{[a_n, b_n]\}$ la suite des intervalles contigus à l'ensemble C de Cantor, la longueur de l'intervalle $[a_n, b_n]$ étant égale à 3^{-m_n} où m_n est un entier positif. Considérons une suite $\{(r_m, 0, z_m)\}$ de points de $\mathcal{K}$ *dense* dans $\mathcal{K}$ et désignons:

[10]) B. Knaster, Fundam. Math. III, p. p. 275, exemple $\mathcal{K}_2$.

par A' l'arc $r = r'$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{3}\varphi''$, $z = z'$;

par A'' l'arc $r = r''$, $\frac{2}{3}\varphi'' \leqslant \varphi \leqslant \varphi''$, $z = z''$;

par A_n l'arc $r = r_{m_n}$, $\frac{1}{3}(\varphi'' + a_n) \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{3}(\varphi'' + b_n)$, $z = z_{m_n}$.

Posons

$$K = A' + A'' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \sum_{t \varepsilon C} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}(\varphi''+t)}.$$

On a la relation

$$\overline{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} \supset \sum_{t \varepsilon C} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}(\varphi''+t)},$$

qui permet de vérifier sans peine que K est un continu du type λ, irréductible entre $(r', 0, z')$ et (r'', φ'', z''). D'autre part, la transformation f qui fait correspondre au point (r, φ, z) de $\mathfrak{L}_2$ le point $(r, 0, z)$ de $\mathcal{K}$ transforme $\mathfrak{L}_2$ d'une façon continue en continu $\mathcal{K}$, qui n'est λ-connexe entre aucun couple de ses points.

Le problème suivant reste ouvert: *des exemples contre l'invariance de λ-connexité envers les transformations continues existent-ils sur le plan?*

5. En présence des exemples $\mathfrak{L}_1$, et $\mathfrak{L}_2$, il serait intéressant d'examiner au point de vue des transformations continues les invariants d'homéomorphie dont la généralité est intermédiaire entre α-connexité et λ-connexité. Telle est p. ex. la notion de continu que nous appelons *δ-connexe*, c. à d. de continu C qui contient pour tout couple p, q de ses points un continu irréductible entre p et q dont tous les sous-continus sont décomposables. On ne sait rien sur la manière dont se comporte cette propriété vis à vis des transformations continues f de C, sauf le fait que $f(C)$ est toujours un continu décomposable (cf. 3).

Varsovie, Février 1933.

Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte.

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es sei f eine stetige Funktion, welche einen metrischen Raum A auf [1]) seine Teilmenge B abbildet und zwar so, dass für jedes $x \varepsilon B$ die Beziehung $f(x) = x$ gilt. B heisst dann *Retrakt des Raumes A.* Wenn es insbesondere eine stetige Funktion $\varphi(x, t)$ gibt derart, dass

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, t) \varepsilon A, \quad \varphi(x, 1) = f(x)$$

für jedes $x \varepsilon A$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist, so wird f die Funktion genannt die *A auf B durch Deformation retrahiert.* Die Funktion φ wird dann *Deformation, welche die Retrahierung f induziert*, und B *Deformationsretrakt von A* genannt.

Eine metrische, in sich kompakte Punktmenge B heisst ein *absoluter Retrakt* (bzw. ein *absoluter Umgebungsretrakt* [2])), wenn für jeden metrischen Raum $A \supset B$, die Menge B ein Retrakt des Raumes A (bzw. irgendeiner Umgebung [3]) von B im Raume A) ist.

Der Zweck dieser Arbeit ist einen allgemeinen Satz (Satz 1) zu beweisen und einige seine einfache Folgerungen anzugeben.

Satz 1. *Eine Funktion f, welche einen metrischen kompakten Raum A auf die Menge B retrahiert, erzeugt eine homomorphe Ab-*

[1]) d. h. $f(A) = B$ ist.

[2]) Vgl. meine Note, Fund. Math. 19 (1932), S. 220—242. Die absoluten Umgebungsretrakte sind dort die $\mathfrak{R}$-Mengen genannt. Sie sind mit den homöomorphen Bildern der in sich kompakten Retrakte von offenen Teilmengen des Grundquaders des Hilbertschen Raumes identisch

[3]) Die Menge U heisst eine Umgebung von B im Raume A, wenn $U \subset A$ gilt und B im Innern von U enthalten ist, d. h. wenn die abgeschlossene Hülle von $A - U$ mit B punktfremd ist.