Sur une propriété des ensembles G_δ non dénombrables.

(Solution d'un problème de M. Kuratowski).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

E et H étant deux ensembles de points, nous dirons qu'il existe entre eux *une homéomorphie généralisée de* 1^{re} *classe*, s'il existe une fonction $f(x)$ définie dans l'ensemble E, de classe $\leqslant 1$ dans E (c'est-à-dire limite d'une suite infinie de fonctions définies et continues dans E) à valeurs distinctes dans E qui transforme E en H et dont la fonction inverse est de classe $\leqslant 1$ dans H.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant qui donne une solution positive à un problème posé récemment par M. Kuratowski:

Théorème: *Entre deux G_δ linéaires non dénombrables existe toujours une homéomorphie généralisée de* 1^{re} *classe.*

Démonstration.

Nous démontrerons d'abord notre théorème en supposant que les ensembles E et H sont condensés (c'est-à-dire se composent exclusivement de leurs points de condensation).

D'après un théorème de M. Mazurkiewicz tout ensemble G_δ linéaire non dénombrable est une somme de deux ensembles sans points communs, dont un est homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels et l'autre est au plus dénombrable [1]) et,

[1]) S. Mazurkiewicz, *Teorja zbiorów* G_δ (*Wektor*, Warszawa 1918); cf. aussi mon livre *Zarys teorji mnogości* Część II (Topologja ogólna), Warszawa 1928, p. 195—202.

comme on le voit sans peine, peut être supposé dense dans l'ensemble G_δ considéré [1]).

Soit donc

$$(1) \qquad E = M + P, \quad H = N + Q,$$

où M et N sont des ensembles homéomorphes à l'ensemble de tous les nombres irrationnels et P et Q sont dénombrables, P dense dans E et sans éléments communs avec M, Q dense dans H et sans éléments communs avec N.

Les ensembles E et H étant dénombrables, il résulte tout de suite de (1) que

$$E \subset \overline{M} \text{ et } H \subset \overline{N}.$$

Les ensembles M et N sont évidemment homéomorphes: soit $\varphi(x)$ la fonction (définie dans M) qui transforme d'une façon homéomorphe M en N et soit $\psi(y)$ sa fonction inverse (définie dans N).

Les ensembles P et Q étant dénombrables, nous pouvons poser

$$(2) \qquad P = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$$

et

$$(3) \qquad Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots)$$

Nous définirons maitenant une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles P et Q comme il suit.

Posons $p_{r_1} = p_1$. D'après $P \subset E \subset \overline{M}$ il existe un nombre x_1 de M tel que $|p_{r_1} - x_1| < 1$. D'autre part, l'ensemble Q étant dense dans H, il existe (d'après $\varphi(x_1) \in H$) un élément q_k de Q, tel que $|\varphi(x_1) - q_k| < 1$: soit q_{s_1} le premier de tels termes q_k de la suite (3). Nous ferons correspondre à élément p_{r_1} de P l'élément q_{s_1} de Q.

Soit q_{s_2} le premier élément de la suite (3) autre que q_{s_1}.

D'après $Q \subset H \subset \overline{N}$ il existe un nombre y_1 de N tel que $|q_{s_2} - y_1| < 1/2$. D'autre part, l'ensemble P étant dense dans E, il existe (d'après $\psi(y_1) \in E$) un élément p_k de la suite (2) autre que p_{r_1} et tel que $|\psi(y_1) - p_k| < 1/2$. Nous ferons correspondre à l'élé-

[1]) En effet, si E est l'ensemble linéaire G_δ non dénombrable donné, soit D un sous-ensemble dénombrable de E, dense dans E. L'ensemble $E - D$ est évidemment encore un G_δ non dénombrable, donc, d'après le théorème de M. Mazurkiewicz, $E - D = N + D_1$, où N est un ensemble homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels et D_1 est un ensemble au plus dénombrable. Donc $E = N + D + D_1$, où $D + D_1$ est dénombrable et dense dans E.

ment q_{s_n} de Q le premier de tels éléments p_k de la suite (2) et nous le désignerons par p_{r_n}.

Soit maintenant n un nombre naturel >1 et supposons que nous avons déjà établi une correspondance biunivoque entre les éléments $p_{r_1}, p_{r_2}, \dots, p_{r_{n-1}}$ de P et les éléments $q_{s_1}, q_{s_2}, \dots, q_{s_{n-1}}$ de Q.

Si n est impair, soit p_{s_n} le premier terme de la suite (2) qui ne correspond encore à aucun des éléments $q_{s_1}, q_{s_2}, \dots, q_{s_{n-1}}$. Il existe un nombre x_n de M, tel que $|p_{r_n} - x_n| < 1/n$ et un élément q_k de la suite (3) autre que $q_{s_1}, q_{s_2}, \dots, q_{s_{n-1}}$ et tel que $|\varphi(x_n) - q_k| < 1/n$: soit q_{s_n} le premier de tels élements q_k de la suite (3). Nous ferons correspondre à l'élément p_{r_n} de P l'élément q_{s_n} de Q.

Si n est pair soit q_{s_n} le premier terme de la suite (3) qui ne correspond encore à aucun des éléments $p_{r_1}, p_{r_2}, \dots, p_{r_{n-1}}$. Il existe un nombre y_n de N tel que $|q_{s_n} - y_n| < 1/n$ et un élément p_k de la suite (2) autre que $p_{r_1}, p_{r_2}, \dots, p_{r_{n-1}}$ et tel que $|\psi(y_n) - p_k| < 1/n$. Nous désignerons par p_{r_n} le premier de tels éléments p_k de la suite (2) et nous le ferons correspondre à l'élément q_{s_n}.

Il est clair que la suite infinie $p_{r_1}, p_{r_2}, p_{r_3}, \dots$ ne diffère que, peut-être, par l'ordre de leur termes de la suite (2) et la suite infinie $p_{s_1}, p_{s_2}, p_{s_3}, \dots$ ne diffère que par l'ordre de leur termes de la suite (3). Nous avons ainsi établi une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles P et Q. Posons $\varphi(p_{r_n}) = q_{s_n}$ et $\psi(q_{s_n}) = p_{r_n}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ La définition de la fonction $\varphi(x)$ est ainsi étendue à l'ensemble $E = M + P$ et elle reste à valeurs distinctes dans E et sa fonction inverse (définie dans H) est évidemment $\psi(x)$.

Je dis maintenant que la fonction $\varphi(x)$ définie ainsi sur l'ensemble E est continue (relativement à E) en tout point de M.

En effet, soit x_0 un point de M et soit ε un nombre positif donné quelconque. La fonction $\varphi(x)$ étant continue dans M, il existe un nombre $\delta > 0$, tel que

$$(4) \qquad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \text{ pour } |x - x_0| < \delta,\ x \in M.$$

Soit m un nombre naturel, tel que

$$(5) \qquad \frac{1}{m} < \frac{\delta}{2} \text{ et } \frac{1}{m} < \varepsilon;$$

et soit δ_1 un nombre positif, tel que

$$(6) \qquad \delta_1 < \frac{\delta}{2} \text{ et } \delta_1 < |x_0 - p_{r_i}| \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m.$$

(un tel nombre δ_1 existe, puisque x_0 n'est pas un point de l'ensemble P).

Soit maitenant x un nombre de l'ensemble $E = M + P$, tel que

$$(7) \qquad |x - x_0| < \delta_1.$$

Si $x \in M$, on a, d'après (7), (6) et (4) l'inégalité

$$(8) \qquad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

Si $x \in P$, il existe un indice n, tel que $x = p_{r_n}$ et, d'après (7) et (6), on trouve $n > m$. Or, d'après la définition de la correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles P et Q résulte que si n est impair, il existe un élément x_n de M, tel que

$$(9) \qquad |p_{r_n} - x_n| < \frac{1}{n}$$

et on a

$$(10) \qquad |\varphi(x_n) - q_{s_n}| < \frac{1}{n}$$

Or, on a évidemment $\varphi(x) = \varphi(p_{r_n}) = q_{s_n}$ et d'après $n > m$ et (5), on a $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{m} < \varepsilon$: l'inégalité (10) donne donc l'inégalité

$$(11) \qquad |\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Or, d'après (9), (7) et (5) et d'après $x = p_{r_n}$, on a

$$|x_n - x_0| \leqslant |x_n - x| + |x - x_0| < \frac{1}{n} + \delta_1 < \frac{1}{m} + \frac{\delta}{2} < \delta,$$

ce qui donne, d'après $x_n \in M$ et (4):

$$(12) \qquad |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Les inégalités (11) et (12) donnent l'inégalité

$$(13) \qquad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Si n est pair, il existe un nombre y_n de N tel que

$$(14) \qquad |q_{s_n} - y_n| < \frac{1}{n}$$

et on a

$$(15) \qquad |\psi(y_n) - p_{r_n}| < \frac{1}{n}$$

Or, d'après (7) et (6) (et d'après $x = p_{r_n}$) on a

$$|p_{r_n} - x_0| = \frac{\delta}{2},$$

donc, d'après (15), (5) et $n > m$:

$$|\psi(y_n) - x_0| < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

ce qui donne d'après (4), $\varphi(y_n)$ étant un nombre de l'ensemble M:

$$|\varphi(\psi(y_n)) - \varphi(x_0)| < \delta,$$

c'est-à-dire

$$|y_n - \varphi(x_0)| < \delta,$$

et d'après (14) et (5):

$$|q_{s_n} - \varphi(x_0)| < \frac{1}{n} + \varepsilon < \frac{1}{m} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

ce qui donne, d'après $x = p_{r_n}$ et $\varphi(p_{r_n}) = q_{s_n}$ encore l'inégalité (13).

L'inégalité (7) entraîne donc toujours pour les nombres x de E l'inégalité (13). Le nombre positif ε pouvant être quelconque, cela prouve que la fonction $\varphi(x)$ est continue au point x_0 relativement à l'ensemble E.

La fonction $\varphi(x)$ est donc continue relativement à l'ensemble E en tout point de M.

Pareillement on démontre que la fonction $\psi(x)$ est continue relativement à H en tout point de N.

La fonction $\varphi(x)$ est donc continue dans l'ensemble E en tout point de cet ensemble sauf aux points formant un ensemble au plus dénombrable. Par conséquent elle est de classe $\leqslant 1$ dans E [1]). Pareillement nous concluons que la fonction $\psi(x)$ est de classe $\leqslant 1$ dans H.

Notre théorème est ainsi démontré pour les ensembles G_δ condensés.

[1]) Voir, par ex., H. Hahn *Reelle Functionen* I, Leipzig 1932, p. 303, théor. 37·1·21.

Soient maintenant E et H deux ensembles G_δ linéaires non dénombrables quelconques. Soient resp. E_1 et H_1 les ensembles de tous les points de E_1 resp. de H qui sont en même temps points de condensation de E, resp. de H. L'ensemble E_1 est, comme on sait, fermé dans E et l'ensemble H_1 est fermé dans H, donc E_1 et H_1 sont encore des G_δ, de même que les ensembles $E_2 = E - E_1$ et $H_2 = H - H_1$. Or, les ensembles E_2 et H_2 sont, comme on sait, au plus dénombrables.

Si E_2 et H_2 sont dénombrables, on peut établir une correspondance biunivoque entre leurs points. Or, comme on sait, toute fonction définie sur un ensemble dénombrable, est de classe $\leqslant 1$ sur cet ensemble [1]).

On a ainsi une homéomorphie généralisée de 1re classe entre E_2 et H_2 et, les ensembles E_1 et H_1 étant des ensembles G_δ non dénombrables et condensés il existe, comme nous avons démontré, une homéomorphie généralisée de 1re classe entre E_1 et H_1. Or, lorsqu'on a une fonction $f_1(x)$ de classe $\leqslant 1$ définie sur un ensemble K_1 fermé relativement à l'ensemble $K = K_1 + K_2$ et une fonction $f_2(x)$ de classe $\leqslant 1$ définie sur K_2 (où $K_1 K_2 = 0$), la fonction $f(x)$ égale à $f_1(x)$ sur K_1 et à $f_2(x)$ sur K_2 est de classe $\leqslant 1$ sur $K = K_1 + K_2$ [2]).

Il en résulte tout de suite qu'on a une homéomorphie généralisée de 1re classe entre les ensembles $E = E_1 + E_2$ et $H = H_1 + H_2$.

Si l'ensemble E_2 est fini (ou vide) et H_2 dénombrable, prenons dans E_1 un point p_0 et une suite infinie de points de E_1, soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ convergente vers p_0 et établissons (d'une manière quelconque) une correspondance biunivoque entre les points $p_0, u_1, u_2, \ldots$ et ceux de E_2 (s'il y en a) d'une part, et les points de H_2 d'autre

[1]) Voir *Fund. Math.* t XV, p. 195.

[2]) D'une façon plus générale, on a l'énoncé suivant: K_1 et K_2 étant deux ensembles G_δ relativement à K et $f(x)$ étant une fonction de classe $\leqslant 1$ relativement à chacun des deux ensembles K_1 et K_2, la fonction $f(x)$ est de classe $\leqslant 1$ dans K. En effet, F étant un ensemble fermé arbitraire, l'identité évidente

$$\underset{x}{E}[f(x) \in F] = K_1 \cdot \underset{x}{E}[f(x) \in F] + K_2 \cdot \underset{x}{E}[f(x) \in F]$$

implique, par hypothèse, que la première sommande est un ensemble G_δ rel. à K_1 et la deuxième — un G_δ rel. à K_2; donc que chacune d'elles est un G_δ rel. à K (puisque K_1 et K_2 sont des G_δ rel. à K) c. q. f. d.

Le raisonnement précédent se généralise aussitôt au cas de fonction de classe α arbitraire. V. H. Hahn, op. cit., p. 287, théor. 35·2·71.

part. L'ensemble $E_1 - (p_0, u_1, u_2, \ldots)$ est encore un G_δ condensé, donc (d'après ce que nous avons démontré plus haut) il est en homéomorphie généralisée de 1^{re} classe avec H_1. On voit sans peine que l'ensemble E sera encore en homéomorphie généralisée de 1^{re} classe avec H.

Pareillement on traite le cas où E_2 est dénombrable et H_2 est fini ou vide, et le cas, où E_2 et H_2 sont finis.

Notre théorème est ainsi démontré complètement.

Planar Graphs [1].

By

Hassler Whitney [2] (Cambridge, U. S. A.).

Introduction. Kuratowski [3] has shown that a topological graph is planar, i. e. it can be mapped in a $1-1$ continuous manner on the surface of a sphere, if and only if it contains neither of two certain graphs within it. The author has shown [4] (I, Theorem 29) that a graph is planar if and only if it has a dual as defined in I. It is the main purpose of the present paper to give a proof of the purely combinatorial theorem (Theorem 12) that a graph has a dual if and only if it contains neither of Kuratowski's graphs as a subgraph [5]. This together with the above mentioned theorem of the author gives a proof (for graphs) of Kuratowski's theorem which involves little of a point set nature.

[1]) Presented to the American Mathematical Society, Dec. 28, 1931.

[2]) National Research Fellow.

[3]) Fund. Math. vol 15 (1930), pp. 271—283. He considers a more general point set than a graph.

[4]) We shall refer to the following papers by the author.

I. *Non-separable and planar graphs.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 34 (1932), pp. 339—362.

II. *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Amer. Journ. of Math. Vol. 54 (1932), pp. 150—168.

III. 2-*isomorphic graphs*, Amer. Journ. of Math. Vol. 55 (1933), pp. 245—254. Note that we now use the term *isomorphic* instead of *congruent.*

[5]) Kuratowski's theorem was proved independently by Orrin Frink and P. A. Smith. Prof. Frink has been kind enough to show me their (unpublished) proof; our proof (of Theorem 12) has many points in common with theirs.