$$\left\langle -\frac{z_{r,s}(t)}{2s}, \frac{r - z_{r,s}(t)}{2s} \right\rangle.$$

Ebenso: wenn $h$ das Intervall $0 > h \geqq -2s$ durchläuft, so durchläuft (1) mindestens alle Zahlen des Intervalls

$$\left\langle -\frac{r - z_{r,s}(t)}{2s}, \frac{z_{r,s}(t)}{2s} \right\rangle.$$

Beachten wir, dass Max $(z_{r,s}(t), r - z_{r,s}(t)) \geqq \frac{r}{2}$ ist, so folgt: wenn $h$ alle Werte mit $0 < |h| \leqq 2s$ durchläuft, so durchläuft (1) sicher alle Werte des Intervalls $\left\langle -\frac{r}{4s}, \frac{r}{4s} \right\rangle$, also umsomehr alle Werte des Intervalls

$$\left\langle -q - \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|, q + \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \right\rangle.$$

Es gibt also sicher ein $h$ mit $0 < |h| \leqq 2s$ (also $0 < |h| \leqq \frac{1}{n}$), für welches

$$\frac{z_{r,s}(t+h) - z_{r,s}(t)}{h} = -w'(t) + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist. Für dieses $h$ ist aber

$$\left| \frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{h} - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| < \frac{\beta-\alpha}{2},$$

also

$$\alpha < \frac{w(t+h) + z_{r,s}(t+h) - w(t) - z_{r,s}(t)}{h} < \beta.$$

Die Funktion $w(t) + z_{r,s}(t)$ liegt daher in $K$, nicht aber in $S_{n,\alpha,\beta}$, w. z. b. w.

---

# Sur les ensembles de capacité nulle et les ensemles H.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1 Cette Note contient quelques théorèmes concernant trois familles d'ensembles fermés et bornés, qui se sont montrés utiles dans l'Analyse, notamment: les ensembles de capacité nulle [1], les ensembles $(H)$ et les ensembles $(H_\sigma)$ [2].

**2 Theoreme I** *$Q$ étant parfait et borné, il existe dans $Q$ un ensemble, résiduel de $Q$* (c. a. d. complementaire d'un ensemble de première catégorie sur $Q$), *dont tout sous ensemble borné et fermé est de capacité nulle.*

**Demonstration.** Soit $\lambda$ un nombre superieur à 1 et au diamètre de $Q$, $\{z_m\}$ une suite de points de $Q$, dense sur $Q$, $S_{k,m}$ le cercle:

$$|z - z_m| < 2^{-k2^m} \quad k, m = 1, 2 \ldots \tag{1}$$

$$G_k = \sum^{\infty} S_{k,m} \tag{2}$$

$$H = Q \times \prod_{m=1}^{\infty} G_k \tag{3}$$

$H$ est l'ensemble cherché Evidemment c'est un résiduel de $Q$. Soit $A$ un sous ensemble fermé de $H$. Désignons par $T(A)$ la capacité de $A$, par $T_n(A)$ le maximum pour $z \in A$ de la valeur absolue du $n$-ème polynome de Tschebyscheff attaché à $A$.

[1]) Capacité relative aux potentiel logaritmique = diamétre transfini = constante de Robin. Comp. Szegö: Math. Zeitschr 21 (1924) p. 203—208. Polya-Szegö: Journ. r. ang. Math. 165 (1931) p. 4—10, Brelot: Jahresbericht d. D. Math. Ver. 42 p. 119—124.

[2]) Rajchman: Fund. Math. 3 p. 489. N. Bary: Fund. Math. 9 p. 79.

On a [4]):

$$T(A) = \lim_{n \to \infty} (T_n(A))^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

Comme $A \subset H \subset G_k$, $k = 1, 2 \ldots$, il existe d'aprés le théoréme de Heine-Borel un entier $p_k$ tel que:

$$A \subset \sum_{m=1}^{p_k} S_{k,m} \tag{5}$$

Posons:

$$P_k(z) = z \prod_{m=1}^{p_k} (z - z_m)^{2^{p_k - m}} \tag{6}$$

C'est un polynome de degré $2^{p_k}$; le coefficient de $z^{2^{p_k}}$ dans $P_k(z)$ est 1. Donc d'après la propriété fondamentale des polynomes de Tchebyscheff, on aura:

$$T_{2^{p_k}}(A) \leqq \operatorname*{Max}_{z \varepsilon A} |P_k(z)| \tag{7}$$

Le maximum de $P_k(z)|$ dans $A$ est atteint pour un point $z'_k \epsilon A$. D'après (5) il existe un entier $q_k \leqq p_k$ tel que $z'_k \epsilon S_{k, q_k}$. Donc:

$$\operatorname*{Max}_{z \varepsilon A} \left| P_k(z) \right| = \left| P_k(z'_k) \right| \leqq \lambda^{2^{p_k}} (2^{-k 2^{q_k}})^{2^{p_k - q_k}} = \left( \frac{\lambda}{2^k} \right)^{2^{p_k}} \tag{8}$$

$$\left( T_{2^{p_k}}(A) \right)^{\frac{1}{2^{p_k}}} \leqq \frac{\lambda}{2^k} \tag{9}$$

(4) et (9) entraînent: $T(A) = 0$ c. q. f. d.

3 Le thèorème précédent peut être etendu aux ensembles *non bornés*. En effet, un ensemble $Q$ parfait et non borné peut être mis sous la forme:

$$Q = Q_1 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \tag{10}$$

$Q_1$ étant fermé et non dense sur $Q$, $U_k$ — ouvert dans $Q$ et borné, et:

$$Q_1 \times U_k = 0 = U_k \times U^l \quad k, l = 1, 2 \ldots; \quad k \neq l \tag{11}$$

D'après le thèorème I, il existe un ensemble impropre [4a]) $H_k \subset \overline{U}_k$, résiduel de $\overline{U}_k$.

[4]) Fekete: Math. Zeitschr. 17 p. 233.

[4a]) c. à. d. un ensemble dont tout sous-ensemble borné et fermé est de capacité nulle.



L'ensemble $L = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \times U_k = \sum_{k=1}^{\infty} H_k - Q_1$ est un residuel de $Q$ et un ensemble impropre, d'aprés le théorème que la somme d'un nombre fini d'ensembles de capacité nulle est de capacité nulle.

4 **Théoreme II.** *Soit $(a, b)$ un intervalle, contenu dans l'intervalle* $(0, 1)$, *$B$ un ensemble dense dans $(a, b)$. Il existe un ensemble $M \subset B$, dénombrable, fermé et qui n'est pas un ensemble $(H)$.*

$X$ étant un ensemble linéaire, $n$ un entier, je vais désigner par $P_n(X)$ l'ensemble de tous les points $n x$, $x \epsilon X$, par $\mathfrak{P}_n(X)$ l'ensemble de tous les points: $z = e^{2\pi i n x}$, $x \epsilon X$

On peut supposer, sans restreindre la généralité que $a \epsilon B$. Soit $L_k$ l'ensemble de points $\frac{p}{q}$, tels que:

$$a \leqq \frac{p}{q} < a + \frac{b-a}{k}; \quad k^3 \leqq q < (k+1)^3; \quad p, q \text{ — entiers} \tag{12}$$

A chaque $x \epsilon L_k$ faisons correspondre un point $\varphi(x)$ tel que:

$$|x - \varphi(x)| < \frac{1}{(k+1)^3}; \quad \varphi(x) \epsilon B; \quad a < \varphi(x) < b \tag{13}$$

Désignons par $M_k$ l'ensemble de points $\varphi(x)$, pour $x \epsilon L_k$ et posons:

$$M = (a) + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \tag{14}$$

On a $M \subset B$ et $M' = (a)$, donc $M$ est fermé et dénombrable. Soit: [5])

$$n > \left( \frac{1}{b-a} \right)^2 \tag{15}$$

$$k_n = E(\sqrt{n}) \tag{16}$$

L'ensemble $L_{k_n}$ contient d'après (12) tous les points $\frac{p}{n k_n}$ tels que:

$$a n k_n \leqq p < a n k_n + n(b-a) \quad p. \text{ entier} \tag{17}$$

Donc d'après (15) $P_n(L_{k_n})$ contient tous les points $\frac{p}{k_n}$ tels que:

$$a n k_n \leqq p < a n k_n + k_n \tag{18}$$

[5]) $E(x)$ désigne le plus grand entier $\leqq x$.

et $\mathfrak{P}_n(L_{k_n})$ tous les points: $e^{\frac{2\pi i r}{k_n}}$, $r=0,1\dots k_n-1$. D'aprés (13), on a pour $x \in L_{k_n}$:

(19) $$|nx - n\varphi(x)| < \frac{1}{k_n}$$

Donc chaque arc du cercle-unité de longueur $\frac{6\pi}{k_n}$ contient à son intérieur un point de $\mathfrak{P}_n(M_{k_n})$ et a fortiori un point de $\mathfrak{P}_n(M)$. En désignant par $2\pi d_n$ la longueur du plus grand arc contigu à $\mathfrak{P}_n(M)$ on a par suite:

(20) $$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{k_n}=0$$

donc $M$ n'est pas un ensemble $(H)$ c. q. f. d.

5 **Théorème III.** *Soit $(a,b)$ un intervalle contenu dans l'intervalle $(0,1)$, $C$ un résiduel de $(a,b)$. Il existe un ensemble fermé $N \subset C$ qui n'est pas un $(H_\sigma)$.*

$C$ contient un ensemble $G_\delta$, dense dans $(a,b)$ et situé à l'intérieur de cet intervalle. Désignons cet ensemble par $D$. Evidemment on peut supposer que le complémentaire de $D$ est dense dans $(a,b)$. Il existe alors un système déterminant $\{D_{n_1n_2\dots n_k}\}$ de $D$ qui satisfait aux conditions suivantes.

$(\alpha_1)$ $D_{n_1n_2\dots n_k}$ est un intervalle ouvert intérieur à $(a,b)$

$(\alpha_2)$ $\overline{D_{n_1n_2\dots n_k,\,n_{k+1}}} \subset D_{n_1n_2\dots n_k}$

$(\alpha_3)$ $D_{n_1n_2\dots n_k,\,n} \times D_{n_1n_2\dots n_k,\,m} = 0$ pour $m \neq n$

$(\alpha_4)$ $\delta(D_{n_1n_2\dots n_k}) < \frac{1}{k}$

D'après $(\alpha_3)$ on aura:

(21) $$D = \sum_{n_1n_2\dots}\prod_{k=1}^{\infty} D_{n_1n_2\dots n_k} = \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1n_2\dots n_k} D_{n_1n_2\dots n_k}$$

Déterminons une suite d'entiers: $\{q_k\}$ et une suite d'ensembles fermés $\{E_k\}$ satisfaisant à la condition:



(22) $$E_k \subset D \times \sum_{n_1n_2\dots n_k} D_{n_1n_2\dots n_k} \quad n_i = 1,2\dots q_i,\ i=1,2\dots k$$

de manière suivante.

$(\beta_1)$ $q_1 = 1$; $E_1$ est un ensemble dénombrable fermé, qui n'est pas un ensemble $(H)$ et qui est contenu dans $D \times D_1$. Un tel ensemble existe d'après le théorème II, puisque $D$ est dense dans $D_1$. La relation (22) est satisfaite pour $k=1$

$(\beta_2)$ Supposons déterminé $q_i$, $E_i$ pour $i=1,2\dots k$ de manière que l'on a la relation (22). D'après cette relation:

(23) $$E_k \subset \sum_{n_1,n_2\dots n_{k+1}} D_{n_1n_2\dots n_{k+1}} \quad n_i = 1,2\dots q_i,\ i=1,2\dots k;\ n_{k+1}=1,2\dots$$

$E_k$ étant fermé nous pouvons, d'après le théorème de Heine-Borel déterminer un entier $q_{k+1}$ tel que:

(24) $$E_k \subset \sum_{n_1,n_2\dots n_{k+1}} D_{n_1,n_2\dots n_{k+1}} \quad n_i,\ i = 1.2\dots k+1$$

Dans chaque intervalle $D_{n_1n_2\dots n_{k+1}}$, $n_i \leqq q_i$, $i=1,2\dots k+1$ plaçons un ensemble dénombrable, fermé, qui n'est pas un ensemble $(H)$ et qui est contenu dans $D$. Désignons cet ensemble par $E_{n_1n_2\dots n_{k+1}}$. Il existe d'après le théoréme II, $D$ étant dense dans $D_{n_1n_2\dots n_{k+1}}$. Posons:

(25) $$E_{k+1} = E_k + \sum_{n_1n_2\dots n_{k+1}} E_{n_1n_2\dots n_{k+1}} \quad n_i = 1,2\dots q_i,\ i=1,2\dots k+1$$

D'après (24), (25) la relation (22) est encore satisfaite si l'on y remplace $k$ par $k+1$. D'autre part, d'après (25) et la définition de $E_{n_1n_2\dots n_{k+1}}$ on voit que:

(26) $$E_k \subset E_{k+1}$$

et que pour $n_i = 1,2\dots q_i$, $i=1,2\dots k$ l'ensemble fermé $E_k + D_{n_1n_2\dots n_k}$ n'est pas un ensemble $(H)$. Posons:

(27) $$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

(28) $$N_k = \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} D_{n_1 n_2 \ldots n_k} \qquad n_i = 1, 2 \ldots q_i, \quad i = 1, 2 \ldots k$$

(29) $$N = \prod_{k=1}^{\infty} N_k$$

D'après (21) $N \subset D \subset C$. D'aprés $(\alpha_3)$: $\overline{N_{k+1}} \subset N_k$, donc $N = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{N}_k$, donc $N$ est un ensemble fermé. Supposons que c'est un ensemble $(H_\sigma)$. Il existe alors un intervalle ouvert $I$ tel que $I \times N$ contient un point $x_0$ et $I \times N$ est un ensemble fermé $(H)$. On a pour une certaine suite $\{n_i'\}$, $n_i' \leqq q_i$:

(30) $$x_0 = \prod_{i=1}^{\infty} D_{n_1' n_2' \ldots n_i'}$$

D'après $(\alpha_4)$ nous pouvons déterminer un indice $j$ tel que:

(31) $$D_{n_1' n_2' \ldots n_j'} \subset I$$

Donc $N \times D_{n_1' n_2' \ldots n_j'}$ est un ensemble $(H)$. Mais d'autre part, d'après (22), on a: $E_k \subset N_k$, donc, d'aprés (26), (27), (29) $E \subset N$. Donc:

(32) $$E_j \times D_{n_1' n_2' \ldots n_j'} \subset N \times D_{n_1' n_2' \ldots n_j'}$$

donc, comme $n_i' \leqq q_i$, $i = 1, 2 \ldots j$ l'ensemble $E_j \times D_{n_1' n_2' \ldots n_j'}$ et à fortiori $N \times D_{n_1' n_2' \ldots n_j'}$ n'est pas un ensemble $(H)$. On arrive ainsi à une contradiction. Donc $N$ n'est pas un $(H_\sigma)$ c. q. f. d.

**6.** Les théorème I et III entraînent le:

**Corollaire I** *Il existe un ensemble linéaire, fermé de capacité nulle qui n'est pas un* $(H_\sigma)$.



Du théoréme III résulte le:

**Corollaire II** *Si tout ensemble* $(U)$ *fermé est un* $(H_\sigma)$ [6], *il n'existe aucun ensemble* $(U)$ *résiduel dans une portion de l'intervalle* $(0, 1)$.

[6]) Ensemble $(U)$ = ensemble d'unicité trigonométrique; l'hypothèse que tout ensemble $(U)$ fermé est un $(H_\sigma)$ a été posée par M. Rajchman (comp. N. Bary: Fund. Math. 9 p. 69—80 et 112). D'après le corollaire I, je serais tenté de la croire improbable, car je suppose que tout ensemble fermé, linéaire de capacité nulle est un ensemble $(U)$.

Konstancin. Dom Kasy im. Mianowskiego 9. IV. 1933.