Über approximativ stetige Denjoy-Integrale.

Von

J. Ridder (Groningen).

In den folgenden Seiten werden einige einander gleichwertige Integraldefinitionen besprochen, welche Verallgemeinerungen sind von bekannten, von A. Denjoy und O. Perron herrührenden Definitionen [1]). Die Idee nur „approximative" Stetigkeit des unbestimmten Integrals zu fordern, welche im folgenden angewandt wird, rührt von J. C. Burkill [2]) her. Es wird sich zeigen, dasz für den neuen Integralbegriff die gewöhnlichen elementaren Eigenschaften des Integrals erhalten bleiben.

§ 1. **Definition 1.** Eine Funktion $f(x)$, definiert für $a \leqq x \leqq b$, wird über (a, b) D_1-*integrierbar* sein, wenn die für das allgemeine Denjoy-Integral existierende konstruktive Definition [3]) bei folgender Abänderung einer der angewandten Operationen eine für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetiges Integral $\int_a^x f(x)\,dx$ liefert: es sei das D_1-Integral $\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx$ schon konstruiert für jede Kombination α', β', welche der Bedingung $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ genügt, wobei α und β zum abgeschlossenen Intervall (a, b) gehören sollen; wenn es dann Teilmengen E_α und E_β von (α, β) gibt, welche in α bzw.

[1]) Siehe Denjoy, Ann. Ec. Norm. (3) **33** (1916), **34** (1917) und Perron, Sitzungsber. Heidelberg, Ak. Wiss. 1914, Math.-naturw. Klasse, Abt. A, 14. Abhandl.

[2]) Siehe Burkill, Math. Ztschr. **34** (1931), S. 270—278.

[3]) Siehe Denjoy, Ann. Ec. Norm. (3) **34** (1917), n^os 55—57 oder Hobson, Theory of functions I, § 476.

in β rechte bzw. linke Dichten 1 haben, derartig, dass für $\alpha' < \beta'$ und α' zu E_α, β' zu E_β gehörend:

$$\lim_{\substack{\alpha' \to \alpha \\ \beta' \to \beta}} \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\, dx$$

existiert, so wird dieser Grenzwert das D_1-Integral über (α, β) sein.

Definition 2ª. $f(x)$ wird über (a, b) *D_2-integrierbar* sein, wenn es eine für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetige Funktion $F(x)$ gibt mit den Eigenschaften: 1° $F(a) = 0$; 2° jede perfekte Teilmenge E des abgeschlossenen Intervalls (a, b) enthält ein Stück $\mathfrak{S}$ (mit den Endpunkten c und d), derartig, daß die Funktion, welche auf $\mathfrak{S}$ mit $F(x)$ zusammenfällt und sich in den zu $\mathfrak{S}$ komplementären, abgeschlossenen Intervallen von (c, d) linear ändert, totalstetig ist in (c, d); 3° die (wie sich aus 2° mittels transfiniter Induktion folgern läßt [4])) fast überall existierende approximative Ableitung von $F(x)$ ist fast überall in $(a. b)$ gleich $f(x)$. Es wird $F(b)$ das D_2-Integral von $f(x)$ über (a, b) sein.

Daß die Definition 2ª die approximativ stetige Funktion $F(x)$, wenn diese existiert, eindeutig bestimmt, läßt sich wieder mittels transfiniter Induktion zeigen [5]).

Die Definitionen sind 1 *und* 2ª *sind einander aequivalent* [6]).

Definition 2ᵇ. $f(x)$ wird über (a, b) *D_3-integrierbar* sein, wenn es eine für $a \leqq x \leqq b$ approximativ stetige Funktion $G(x)$ gibt mit den Eigenschaften: 1° $G(a) = 0$; 2° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge A, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß für jedes H_k die Funktion $G_k(x)$, welche auf H_k mit $G(x)$ zusammenfällt und sich in den zu H_k komplementären, abgeschlossenen Intervallen des kleinsten, abgeschlossenen, H_k enthaltenden Intervalles u_k linear ändert, totalstetig ist in u_k; 3° die fast überall existierende [7]) approximative Ableitung von $G(x)$ ist fast überall in (a, b) gleich $f(x)$. $G(x)$ wird dann das unbestimmte D_3-Integral von $f(x)$ in (a, b) sein.

[4]) Vgl. Ridder, Math. Ztschr. **34** (1931), S. 246 (Beweis des Satzes XI).
[5]) Vgl. l. c. [4]), S. 259 u. 260 (Beweis des Satzes XXV).
[6]) Für den Beweis vgl. Denjoy, l. c. [3]), nºˢ 51—53.
[7]) Dies folgt aus l. c. 4), S. 245 (Satz XI).

Anwendung von transfiniter Induktion zeigt, daß eine nach der Def. 2ª integrierbare Funktion $f(x)$ auch nach Def. 2ᵇ integrierbar sein wird und daß die über (a, b) erstreckten D_2- und D_3-Integrale dann einander gleich sind. Daß auch das Umgekehrte gilt, folgt durch Anwendung der Hilfssatzes [8]): „Wenn sich ein abgeschlossenes Intervall (a, b) zerlegen läßt in abzählbar viele Mengen (H_k), so hat jede in (a, b) enthaltene, perfekte Menge E ein Stück, auf dem eine der Mengen (H_k) überall dicht liegt" *Somit sind die Definitionen* 2ª *und* 2ᵇ *einander aequivalent.*

§ 2. Definition A. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq x \leqq b$. Dann wird $\psi(x)$ eine für $a \leqq x \leqq b$ zu $f(x)$ adjungierte *Majorante* sein, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt: 1° $\psi(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\psi(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß $\psi(x)$ unterhalb totalstetig [9]) ist auf jedem H_k; 4° die [fast überall in (a, b) existierende und endliche [7])] approximative Ableitung von $\psi(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\geqq f(x)$.

Definition B. Es wird $\varphi(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ eine zu $f(x)$ adjungierte *Minorante* sein, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt: 1° $\varphi(x)$ ist approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$; 2° $\varphi(a) = 0$; 3° es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (ev. leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_k), derartig, daß $\varphi(x)$ oberhalb totalstetig [10]) ist auf jedem P_k; 4° die [fast überall in (a, b) existierende und endliche [7])] approximative Ableitung von $\varphi(x)$ ist in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge $\leqq f(x)$.

[8]) Siehe l. c. [4]), S. 246.
[9]) D. h. die Summe der Funktionsdifferenzen $\sum_{(j)} \{\psi(b_j) - \psi(a_j)\}$ in den zu H_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen hat immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe l. c. [4]), S. 244.
[10]) D. h. die Summe der Funktionsdifferenzen $\sum_{(j)} \{\varphi(b_j) - \varphi(a_j)\}$ in den zu P_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen hat immer einen oberen Limes $\leqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe l. c. [4]), S. 244.

Lemma. *Wenn eine im abgeschlossenen Intervall (a, b) unterhalb totalstetige Funktion $g(x)$ fast überall in (a, b) eine approximative Ableitung $ADg(x) \geqq 0$ hat, so wird $g(x)$ nicht-abnehmend sein in (a, b).*

Beweis. Bei willkürlich positivem ε läßt sich eine positive Zahl δ bestimmen, derartig, daß für jede Menge von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen (c_k, d_k), deren Gesamtmaß $< \delta$ ist, die zu $g(x)$ gehörige Summe

$$\sum_{(k)} \{g(d_k) - g(c_k)\} > -\varepsilon \tag{1}$$

sein wird.

In einem maßgleichen Kerne K von (a, b) ist $ADg(x) \geqq 0$. Für jeden Punkt x von K gibt es eine Folge von Intervallen (x, x_j), welche sich mit zunehmendem j in x zusammenziehen und für die

$$g(x_j) - g(x) > -\varepsilon(x_j - x) \tag{2}$$

ist. Nun kann man, nach dem Überdeckungssatze von Vitali, eine endliche Anzahl derartiger, nicht übereinandergreifender Intervalle auswählen, deren Komplementärmenge ein Maß hat $< \delta$.

Aus (1) und (2) folgt demnach:

$$g(b) - g(a) > -\varepsilon(b - a) - \varepsilon$$

oder, da ε willkürlich ist:

$$g(b) - g(a) \geqq 0.$$

Da dasselbe Beweisverfahren auch auf jedes Teilintervall von (a, b) angewandt werden kann, ist $g(x)$ nicht abnehmend in (a, b).

Satz *Die Differenz einer jeden Majorante $\psi(x)$ und einer jeden Minorante $\varphi(x)$, adjungiert zu der in (a, b) definierten Funktion $f(x)$, ist eine nicht-abnehmende Funktion.*

Beweis. Es sei $\omega(x) = \psi(x) - \varphi(x)$ für $a \leqq x \leqq b$. Wenn die Menge E der Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a, b), in deren jede Umgebung Punkte x' und x'' liegen mit $x' < x''$ und $\omega(x') > > \omega(x'')$, nicht leer ist, so muß sie perfekt sein. In jedem komplementären Intervall $u_n \equiv (a_n \leqq x \leqq b_n)$ von E ist $\omega(x)$ nicht-abnehmend; also wird jedes Stück von E Punkte ξ' und ξ'' enthalten müssen, für die gleichzeitig $\xi' < \xi''$ und $\omega(\xi') > \omega(\xi'')$ ist.

Nach dem am Ende des § 1 mitgeteilten Hilfssatze existiert ein Stück σ (mit den Endpunkten c und d) von E, auf dem eine der perfekten Mengen (H_k) aus Def. A und eine der perfekten Mengen (P_k) aus Def. B überall dicht liegen. Die Funktion $\omega_\sigma(x)$, welche in den zu σ komplementären Intervallen von (c, d) sich linear ändert und in den Punkten von σ mit $\omega(x)$ zusammenfällt, wird unterhalb totalstetig sein in (c, d), wie aus den Def. A und B hervorgeht. In den inneren Punkten der zu σ komplementären Intervallen ist die Ableitung von $\omega_\sigma(x) \geqq 0$.

In derselben Weise wie $\omega_\sigma(x)$ aus $\omega(x)$ hervorgeht, lassen sich in (c, d) aus $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ Funktionen $\psi_\sigma(x)$ bzw. $\varphi_\sigma(x)$ ableiten, welche dort unterhalb bzw. oberhalb totalstetig sind. Daraus folgt, daß sie fast überall in (c, d) eine endliche Ableitung haben werden [11]. Und dadurch wird, nach Def. A, 4⁰ und Def. B, 4⁰, $\omega_\sigma(x)$ in fast allen Punkten von σ eine Ableitung $\geqq 0$ haben müssen.

$\omega_\sigma(x)$ genügt also in (c, d) den Bedingungen des obigen Lemmas. Es müßte dadurch $\omega_\sigma(x)$ und somit auch $\omega(x)$ nicht-abnehmend sein auf σ, was jedoch der im Anfang des Beweises genannten Eigenschaft der Menge E widerspricht. E ist somit leer.

§ 3. Definition 3. Wenn die untere Schranke aller $\psi(b)$ — Werte (s. Def. A) und die obere Schranke aller $\varphi(b)$ — Werte (s. Def. B) einander gleich sind, so definiert dieser gemeinsame Wert *das D_k-Integral $I(b)$* von $f(x)$ über (a, b) [12].

Satz. *Wenn das Integral $I(x)$ von $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ existiert, so besitzt $I(x)$ fast überall in (a, b) eine approximative Ableitung $= f(x)$.*

Beweis. Eine willkürlich gewählte Majorante $\psi(x)$ hat fast überall eine endliche approximative Ableitung [7]. $\psi(x) - I(x)$ ist nicht-abnehmend, hat also fast überall eine endliche Ableitung. Somit muß auch $I(x)$ fast überall eine endliche approximative Ableitung haben.

Es sei $\{\psi_k(x)\}$ eine Folge von Majoranten und $\{\varphi_k(x)\}$ eine Folge von Minoranten, derartig, daß $\lim\limits_{k=\infty} \psi_k(b) = \lim\limits_{k=\infty} \varphi_k(b) = I(b)$ ist. Dann haben $I(x)$, alle $\psi_k(x)$ und alle $\varphi_k(x)$ in einem maßgleichen Kerne K von (a, b) endliche approximative Ableitungen.

[11]) Siehe l. c. [4]), S. 237 (Satz V).

[12]) Der Satz von § 2 liefert nun auch die Existenz von $I(x)$ für jedes x mit $a \leqq x < b$ (hierbei wird $I(a) = 0$ gesetzt).

Bei willkürlich positivem ε sei $K_j(\varepsilon)$ die Menge derjenigen Punkte von K, in denen die approximativen Ableitungen von ψ_j und φ_j eine Differenz $\geqq \varepsilon$ haben. Das Maß dieser Menge wird mit zunehmendem j nach Null konvergieren. Sonst existierte eine positive Zahl δ, derartig, daß für unendlich viele Werte (j') $m\{K_{j'}(\varepsilon)\} \geqq \delta$ wäre. Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes würde zeigen, daß für die nicht-abnehmenden Funktionen $\{\psi_{j'} - \varphi_{j'}\}$:

$$\psi_{j'}(b) - \varphi_{j'}(b) \geqq \delta \cdot \varepsilon$$

wäre, während doch

$$\lim_{j'=\infty} \{\psi_{j'}(b) - \varphi_{j'}(b)\} = 0$$

ist. Die approximative Ableitung von $I(x)$ weicht somit fast überall in (a, b) um weniger als ε von $f(x)$ ab. Da ε willkürlich ist, muß $AD\ I(x)$ fast überall in (a, b) gleich $f(x)$ sein.

Die Definitionen 2^b *und* 3 *sind einander aequivalent* [13]).

[13]) Es ist auch möglich ein approximativ stetiges Integral zu erhalten, wenn man die in Def. 1 gegebene Abänderung einführt in die konstruktive Definition des speziellen Denjoyschen Integrals (siehe für diese Definition Hobson, l. c. [3]), §§ 464—466); die Definition 1 wird in dieser neuen Gestalt den Definitionen 2^a und 2^b gleichwertig bleiben, wenn man in die Definitionen 2^a und 2^b unter 2^0 die Bedingung hinzufügt, daß die Oszillationen von $F(x)$ in den zu $\bar{\omega}$ komplementären Intervallen von (c, d) bzw. die Oszillationen von $G(x)$ in den zu H_{k^0} komplementären Intervallen von u_k eine konvergente Reihe bilden sollen. Auch die Def. 3 ist derartig zu modifizieren, daß sie dabei den abgeänderten Definitionen 1, 2^a und 2^b aequivalent bleibt. Nennen wir dazu eine für $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $f(x)$ *unterhalb totalstetig* auf einer Teilmenge* E des abgeschlossenen Intervalls (a, b), wenn die Summen von endlich vielen Differenzen:

$$\sum_{(k)} \{f(b_k) - f(c_k)\} \quad \text{und} \quad \sum_{(k)} \{f(c_k) - f(a_k)\},$$

wobei die nicht übereinandergreifenden Intervalle (a_k, b_k) zu E gehörende Endpunkte haben sollen und c_k für jedes fest gewählte k alle möglichen Lagen mit $a_k \leqq c_k \leqq b_k$ einnimmt, einen unteren Limes $\geqq 0$ haben, sobald die Längensumme der Intervalle (a_k, b_k) gegen Null konvergiert; wenn in dieser Definition „unteren Limes $\geqq 0$" in „oberen Limes $\leqq 0$" geändert wird, so entsteht die Bedingung, unter der $f(x)$ *auf* E *oberhalb totalstetig** sein soll (siehe Ridder, l. c. 4), S. 251). Ersetzt man nun in die Definitionen A und B (§ 2) „unterhalb totalstetig" bzw. „oberhalb totalstetig" durch „unterhalb totalstetig*" bzw. „oberhalb totalstetig*" und läßt man daneben den Wortlaut der Definition 3 ungeändert, so wird diese zu dem erwünschten Umfange eingeschränkt sein. Es läßt sich zeigen, daß das in dieser Fußnote definierte unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ fast überall eine Ableitung $= f(x)$ hat (zum Beweise vgl. Ridder, l. c. [4]), S. 253 u. 254 oder Hobson, l. c. [3]), § 470). — Eine Funktion $F(x)$, welche für $a \leqq x \leqq b$ ein unbestimmtes Integral ist im Sinne der im Texte gegebenen Definitionen, jedoch nicht im Sinne der Definitionen dieser Fußnote erhält man auf folgende Weise. Es sei $a < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \ldots < a_j < b_j \ldots < b$, wobei $\lim_{j=\infty} a_j = \lim_{j=\infty} b_j = b$ ist und die Menge E der nicht zu den Intervallen (a_j, b_j) gehörenden Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a, b) in b die linke Dichte 1 haben soll; dann definiere man $F(x) = 0$ für die Punkte von E, während man $F(x)$ in jedem abgeschlossenen Intervall (a_j, b_j) einem unbestimmten allgemeinen Denjoy-Integral gleichsetzt, welches daneben nicht ein unbestimmtes spezielles Denjoy-Integral in (a_j, b_j) ist, derartig, daß nicht nur $F(a_j)$, sondern auch $F(b_j)$ gleich Null wird und $F(x)$ nicht (linksseitig) stetig ist in b.

Beweis. Wenn $\lim_{k=\infty} \psi_k(b) = \lim_{k=\infty} \varphi_k(b) = I(b)$ ist, so geht aus den Definitionen A und B hervor, daß (a, b) sich überdecken läßt von abzählbar vielen perfekten Mengen (E_j) und einer (ev. leeren) abzählbaren Menge H, derartig, daß gleichzeitig jede der $\{\psi_k\}$ unterhalb totalstetig und jede der $\{\varphi_k\}$ oberhalb totalstetig ist auf einer jeden der Mengen (E_j).

$I(x)$ muß totalstetig sein auf jedem E_j. Sonst existierte für eine dieser Mengen, $E_{j'}$, eine z. B. positive Zahl $\varDelta$ und eine Folge von Mengen (M_n), welche jede für sich von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen $(a_p^{(n)}, a_{p+1}^{(n)})$ gebildet wurden und deren Endpunkte zu $E_{j'}$ gehörten, so daß gleichzeitig:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(p)} [I(a_{p+1}^{(n)}) - I(a_p^{(n)})] = \varDelta \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} m(M_n) = 0 \tag{3}$$

wäre.

$\varphi_{k'}(x)$ sei eine Minorante aus der Folge $\{\varphi_k(x)\}$ mit

$$I(b) - \varphi_{k'}(b) < {}^1\!/_2\, \varDelta.$$

Da $I(x) - \varphi_{k'}(x)$ eine nicht-abnehmende Funktion ist, wird bei willkürlich, aber fest gewähltem n:

$$\sum_{(p)} [I(a_{p+1}^{(n)}) - I(a_p^{(n)})] - \sum_{(p)} [\varphi_{k'}(a_{p+1}^{(n)}) - \varphi_{k'}(a_p^{(n)})] \leqq \tag{4}$$
$$\leqq I(b) - \varphi_{k'}(b) < {}^1\!/_2\, \varDelta$$

sein.

Aus (3) und (4) würde folgen:

$$\limsup_{n=\infty} \sum_{(p)} [\varphi_{k'}(a_{p+1}^{(n)}) - \varphi_{k'}(a_p^{(n)})] > \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Da $\varphi_{k'}(x)$ oberhalb totalstetig ist auf $E_{j'}$, gelangen wir zu einem Widerspruch.

Auch ein negativer Wert von Δ ist unmöglich. $I(x)$ wird somit auf jedem E_j totalstetig sein.

Aus $\lim\limits_{k=\infty} \psi_k(b) = I(b)$ geht hervor, daß die Folge $\{\psi_k(x)\}$ in (a, b) gleichmäßig gegen $I(x)$ konvergiert. Daraus und aus der approximativen Stetigkeit der $\{\psi_k(x)\}$ schließt man leicht zu der approximativen Stetigkeit von $I(x)$.

Der Inhalt des vorigen Satzes und die hier abgeleiteten Resultate zeigen, daß $I(x)$ den Bedingungen der Definition 2^b genügt.

Umgekehrt wird ein Integral $G(x)$ gemäß Def. 2^b sowohl eine Majorante $\psi(x)$ wie eine Minorante $\varphi(x)$ sein. Somit ist $G(x)$ auch ein Integral im Sinne der Definition 3.

§ 4. Zum Schluß führen wir einige Eigenschaften an der in die Definitionen 1, 2^a, 2^b und 3 eingeführten Integrale. Wo die Beweise durch leichte Modifikation bekannter Beweise zu finden sind, begnügen wir uns mit Verweisungen nach letzteren.

Satz 1. *Wenn $f(x)$ über (a, b) ein Integral $I(b)$ hat (I-integrierbar ist), so wird auch jede Funktion $g(x)$ über (a, b) I-integrierbar sein, welche dort fast überall mit $f(x)$ zusammenfällt; beide Integrale haben dann denselben Wert* [14].

Satz 2. *Wenn $f(x)$ über (a, b) I-Integrierbar ist, so wird sie es auch sein über jedes Teilintervall von (a, b). Für $a < c < b$ wird das I-Integral über (a, b) gleich der Summe der I-Integrale über (a, c) und (c, b) sein* [14].

Satz 3. *Wenn eines der beiden folgenden Integrale existiert, so gilt:*

$$(I)\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot (I)\int_a^b f(x)\, dx.$$

Hierbei ist c eine willkürliche von Null verschiedene Konstante [14].

[14]) Vgl. Kamke, Das Lebesguesche Integral, § 14.

Satz 4. *Wenn die Integrale der rechten Seite existieren, so gilt:*

$$(I)\int_a^b \{f_1(x) \pm f_2(x)\}\, dx = (I)\int_a^b f_1(x)\, dx \pm (I)\int_a^b f_2(x)\, dx \text{ [14]}.$$

Satz 5. *Wenn $f_1(x) \leqq f_2(x)$ ist in jedem Punkte x von (a, b) und die Funktionen I-integierbar sind über (a, b), so wird auch:*

$$(I)\int_a^b f_1(x)\, dx \leqq (I)\int_a^b f_2(x)\, dx$$

sein [14].

Satz 6. *Eine in einem Intervall (a, b) ihr Vorzeichen nicht wechselnde Funktion $f(x)$ hat daselbst gleichzeitig ein Integral $I(x)$ und ein Lebesguesche Integral von gleichem Werte.*

Beweis. Nehmen wir $f(x) \geqq 0$ an. Da $\int_a^x (L)\, f(x)\, dx$ sowohl eine Majorante wie eine Minorante ist, so ist dieses Integral, falls es existiert, zugleich das Integral $I(x)$.

Umgekehrt, es sei $f(x)$ I-integierbar über (a, b). Die Differenz einer jeden Majorante und einer jeden Minorante ist, nach dem Satze von § 2, nicht-abnehmend in (a, b). Da die Funktion, welche identisch Null ist, eine Minorante ist, wird somit jede Majorante von $f(x)$ nicht-abnehmend sein müssen. Daraus folgt jedoch dasselbe für das unbestimmte Integral $I(x)$ von $f(x)$ in (a, b). $I(x)$ hat nun fast überall eine endliche summierbare Ableitung, welche, nach dem Satze von § 3, fast überall gleich $f(x)$ ist. Also muß

$$I(x) = \int_a^x (L) f(x)\, dx$$

sein.

Satz 7. *Es existiere das I-Integral über (a, b) für jede der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, konvergierend nach $f(x)$. Wenn für jedes n und jedes x in (a, b):*

$$g(x) \leqq f_n(x) \leqq h(x)$$

ist und $g(x)$ und $h(x)$ über (a, b) I-integrierbar sind, so wird auch

$f(x)$ über (a, b) I-integrierbar sein und es ist dann:

$$(5)\qquad (I)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (I)\int_a^b f_n(x)\,dx \text{ [15]}.$$

Beweis. Nach Satz 6 sind die nicht-negativen Funktionen $f_n - g$ und $h - g$ integrierbar nach Lebesgue. Da $f_n - g \leq h - g$ ist, wird auch $f - g$ nach Lebesgue integrierbar sein und es ist:

$$\int_a^b (L)[f-g]\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (L)[f_n - g]\,dx.$$

Daraus folgt leicht die Gültigkeit von (5).

[15]) Vgl. Burkill, l. c. [2]), S. 278.

25. VI. 1932.

Über das allgemeine Denjoysche Integral.

Von

J. Ridder (Groningen).

§ 1. Eine Änderung in die Definitionen der Majoranten und Minoranten machte es uns möglich die Perronsche Integraldefinition derartig zu verallgemeinern daß sie aequivalent wurde mit der allgemeinen Denjoyschen Definition [1]). Die Lektüre einer Arbeit von S. Saks [2]) zeigte uns wie sich für einige der von ihm (l. c.) für das spezielle Denjoysche Integral und für damit zusammenhängende Funktionen bewiesenen Sätze auf einfache Weise ein Analogon beim allgemeinen D-Integral finden läßt (siehe im folgenden die Sätze II—IV), wenn man nur die soeben genannten, verallgemeinerten Majoranten und Minoranten benutzt und daneben, statt der von Saks eingeführten Eigenschaften $(N^{+\infty})$, $(N^{-\infty})$ und (N^{∞}) [3]). die unten definierten Eigenschaften $(N_g^{+\infty})$, $(N_g^{-\infty})$ und (N_g^{∞}).

§ 2. **Definition 1.** Eine Funktion $F(x)$ genügt in einem Intervall (a, b) der Bedingung (T_2) von Banach [4]), wenn die Menge der Funktionswerte, welche in diesem Intervall nicht-abzählbar unendlich oft angenommen werden, das Maß Null hat.

Definition 2. Eine Funktion $F(x)$ genügt in (a, b) der Bedingung $(N^{+\infty})$ von Saks [3]), wenn die Menge der Funktionswerte in den Punkten von (a, b), wo die Ableitung existiert und $+\infty$ wird, das Maß Null hat.

[1]) Siehe J. Ridder, Math. Ztschr. 34 (1931), S. 234—269.
[2]) Siehe S. Saks, Fund. Math. 17 (1931). S. 124—151.
[3]) Siehe S. Saks, loc. cit. [2]), S. 128.
[4]) Siehe S. Banach, Fund. Math. 8 (1926), S. 167.