Offenbar ist $(x, y) \in C$ gleichbedeutend mit $x \in A_y$ und dies damit, dass es ein n mit $x \in A_n$, $y \in V_n$ gibt, d. h. es ist einfach

$$C = \underset{n}{S}(A_n, V_n),$$

woraus unmittelbar folgt, dass bei offenen A_n auch C offen ist.

Um zu zeigen, dass jedes in Z offene G ein C ist, verstehen wir unter A_n die grösste in X offene Menge mit $(A_n, V_n) \leqq G$ (die Summe aller in X offenen Mengen U mit $(U, V_n) \leqq G$). Die hiermit gebildete Menge C ist also $\leqq G$; andererseits hat aber jeder Punkt $(x, y) \in G$ eine Umgebung $(U, V_n) \leqq G$ und dann ist $U \leqq A_n$, also

$$(x, y) \in (A_n, V_n) \leqq C \quad \text{und} \quad G \leqq C.$$

Der hiermit beendete Beweis von IV ist eine vereinfachte und von allen überflüssigen Einschränkungen befreite Form des Beweises, den die Herren Kantorovitch und Livenson für ihr Theorem XII B (p. 255) gegeben haben.

Sur une condition de quasi-rectificabilité.

Par

A. Marchaud (Marseille).

1. Considérons, dans l'espace euclidien à n dimensions, un arc simple $\widehat{AB}$, image biunivoque et bicontinue d'un segment $\overline{\alpha\beta}$. On dira que l'arc est *quasi rectifiable*, s'il est possible de le modifier sur un ensemble, dont l'image sur $\overline{\alpha\beta}$ a une mesure aussi petite qu'on veut, de manière à obtenir un arc simple rectifiable, et ceci *quelle que soit la correspondance entre les points de l'arc et ceux du segment.*

Ceci posé, on trouvera, dans le présent travail, la démonstration d'un théorème général dont voici l'énoncé pour $n = 3$.

Soient ω_1, ω_2, ω_3, trois droites à distance finie ou non ne passant pas par un même point, Ω la quadrique dont les génératrices s'appuient sur ces droites, et $\widehat{AB}$ un arc simple sans point sur Ω,

1° Si le nombre des points de $\widehat{AB}$ dans tout plan contenant l'une des ω_i est borné, l'arc est rectifiable.

2° Si ce nombre est seulement fini, l'arc est quasi-rectifiable, de plus, entre deux points quelconques de $\widehat{AB}$, il y a un arc partiel rectifiable.

Dans le cas où les ω_i sont à l'infini, la première conclusion résulte d'une proposition de M. S. Banach[1]). Je l'ai démontrée dans un autre travail[2]).

Un cas particulier du théorème général s'énonce ainsi: une fonc-

[1]) S. Banach, *„Sur les lignes rectifiables et sur les surfaces dont l'aire est finie"*. Fund. Math. 1925, t. VII, p. 224.

[2]) A. Marchaud, *„Sur les Continus d'ordre borné"*. Acta Math. t. 55, p. 76.

tion continue $f(x)$, qui prend chacune de ses valeurs seulement un nombre fini de fois, possède une dérivée presque partout (on peut la modifier sur un ensemble de mesure aussi petite qu'on veut de manière à obtenir une fonction continue à variation bornée).

2. Pour simplifier le langage, j'utiliserai la notion d'ordre par rapport à un faisceau. Dans l'espace à n dimensions, le *faisceau d'arête* ω est l'ensemble des multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions, qui passent par la multiplicité linéaire à $n-2$ dimensions ω, située à distance finie ou non [1]).

Un ensemble est d'*ordre borné* ou d'*ordre fini* par rapport à un faisceau Φ, si le nombre de ses points sur une multiplicité quelconque de Φ est borné ou fini. Dans le premier cas, le maximum du nombre de ces points est l'*ordre* de l'ensemble par rapport au faisceau. Lorsque ω est à l'infini sur la multiplicité linéaire L, à $n-1$ dimensions, l'ordre par rapport au faisceau est ce que j'appelais l'ordre par rapport à la direction L, dans mon Mémoire sur les Continus d'ordre borné.

Nous nous proposons d'étudier les arcs simples d'ordre borné ou fini par rapport à n faisceaux convenablement choisis. Nous examinerons d'abord le cas particulier où les arêtes sont à l'infini sur les faces d'un n-èdre [2]), et dont le sommet est à distance finie. Si l'arc est d'*ordre borné* par rapport aux faisceaux, il est *rectifiable* [3]).

3. Soit $\widehat{AB}$ *un arc simple d'ordre fini par rapport aux directions* L_i ($i=1, 2, \ldots, n$) où les L_i sont les faces d'un n-èdre de sommet à distance finie. Nous désignerons par $\mathfrak{L}_i$ les multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions parallèles à L_i, celle passant par le point M sera représentée par $\mathfrak{L}_i(M)$. $\widehat{AB}$ sera considéré comme l'image biunivoque et bicontinue d'un segment $\overline{\alpha\beta}$.

Je vais montrer qu'on peut remplacer $\widehat{AB}$ par un arc simple $(\widehat{AB})'$ satisfaisant aux conditions suivantes,

[1]) Dans un autre travail „*Sur diverses extensions de la Notion de Continu d'ordre borné*", Ann. de l'Ec. Norm. (3), XLIX. Avr. 1932 j'appelle cet ensemble le faisceau *complet* d'arête ω. Comme il ne s'agira ici que de faisceaux complets, il est inutile de les qualifier.

[2]) Un n-èdre est un système de n multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions (faces), ayant un seul point commun (sommet).

[3]) V. p. ex. A. Marchaud: „*Sur les Continus d'ordre borné*", p. 76.

1°. $(\widehat{AB})'$ *coïncide avec* $\widehat{AB}$ *sauf peut-être aux points d'un ensemble dont l'image sur* $\overline{\alpha\beta}$ *est un ensemble ouvert de mesure aussi petite qu'on veut,*

2°. $(\widehat{AB})'$ *est d'ordre borné par rapport à une direction choisie* L_i,

3°. *Si une multiplicité* $\mathfrak{L}_j$ $(j \neq i)$ *rencontre* $\widehat{AB}$ *en* q *points, elle coupe* $(\widehat{AB})'$ *en* $2q$ *points au plus.*

De cette proposition résultera immédiatement la possibilité de remplacer $\widehat{AB}$ par un arc simple d'ordre borné par rapport aux n directions L_i, par suite rectifiable, cet arc coïncidant avec $\widehat{AB}$ sauf peut-être sur un ensemble dont l'image sur $\overline{\alpha\beta}$ a une mesure aussi petite qu'on veut.

4. Pour établir la propriété énoncée au n° précédent, il sera nécessaire de considérer certains ensembles

Soit $z_1 z_1$ un axe non parallèle à L_1. La multiplicité $\mathfrak{L}_1(M)$ rencontre cet axe en un point m, la projection de M. Nous allons étudier l'ensemble e_p des points $z_1' z_1$ *tels que chacun d'eux soit la projection de* p *points de* $\widehat{AB}$ *au moins.* Nous supposerons p assez grand pour que e_p ne contienne ni la projection de A ni celle de B

Donnons-nous un point s de e_p. $\mathfrak{L}_1(s)$ rencontre $\widehat{AB}$ en un nombre fini de points: $p' \geqslant p$. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_p$, ces points, dans l'ordre où ils sont rencontrés quand on parcourt l'arc de A à B. Chacun des arcs $\widehat{AS_1}, \widehat{S_1S_2}, \ldots, \widehat{S_pB}$ a tous ses points — sauf le ou les S_i — d'un même côté de $\mathfrak{L}_1(s)$.

Supprimons un arc partiel intérieur à chacun des $\widehat{S_iS_{i+1}}$; nous obtiendrons ainsi $2p'$ arcs sans point commun deux à deux en dehors de $\mathfrak{L}_1(s)$; p' au moins sont d'un même côté de cette multiplicité. On peut donc trouver sur $z_1' z_1$ un point s', tel que tous les points du segment ss' appartiennent à e_p. Prenons un point s'' entre s et s', et soient m_1 la borne du côté de z_1 des points $\overline{m}_1$, tels que le segment $s''\overline{m}_1$ appartienne à e_p, m_1' la borne analogue du côté de z_1'. Tous les points intérieurs au segment $m_1' m_1$ appartiennent à e_p, chacune des extrémités appartient ou non à l'ensemble; mais si l'une d'elles, m_1 par exemple, en fait partie il y a, aussi près de lui qu'on voudra, des points n'appartenant pas à e_p. Cette remarque nous sera utile au n° 6.

Comme la projection de $\widehat{AB}$ est bornée, il résulte de l'étude précédente que e_p est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de segments ouverts ou fermés, soit à l'une soit aux deux extrémités. Nous désignerons par $\bar{e}_p$ l'ensemble obtenu en considérant tous les segments comme fermés.

5. Soit $m_1' m_1$ un segnent de $\bar{e}_p$. Nous appellerons *tranche* $(m_1' m_1)$ la région balayée par $\mathcal{L}_1(m)$, quand m parcourt le segment $m_1' m_1$. Considérons l'ensemble de S points de $\widehat{AB}$ appartenant à la tranche. D'après l'hypothèse faite sur p, A et B sont extérieurs à la tranche ou sur les bords. Soit M_1 la borne du côté de A des points de l'arc intérieurs à la tranche. M_1 est sur l'un des bords; il peut être confondu avec A. Parcourons l'arc de M_1 vers B. Comme chaque $\mathcal{L}_1$ coupe $\widehat{AB}$ en un nombre fini de points, il y aura un premier point de sortie (de la tranche) M_2, un deuxième point d'entrée: M_3, un deuxième point de sortie, etc... On obtiendra ainsi une suite d'arcs $\widehat{M_1 M_2}$, $\widehat{M_3 M_4}, \ldots$, $\widehat{M_{2r-1} M_{2r}}$, *extérieurs les uns aux autres*, qui sont les seuls point de $\widehat{AB}$ appartenant à la tranche. M_1 peut être confondu avec A, M_{2r} peut l'être avec B. On remarquera que en tout point M_i, $(i=1, 2, \ldots, r)$, *distinct de A et de B*, situé dans $\mathcal{L}_1(m_1)$, l'arc *traverse* cette multiplicité.

En prenant successivement toutes les tranches correspondant aux segments de $\bar{e}_p$, on aura un nombre fini ou une infinité dénombrable d'arcs partiels de $\widehat{AB}$ n'empiétant pas car deux tranches n'empiétent pas. Soient $\overline{E}_p$ l'ensemble des arcs ainsi obtenus, $\overline{\mathcal{E}}_p$ son image sur $\overline{\alpha\beta}$.

Si l'on rentranche $\overline{E}_p$ de $\widehat{AB}$, il reste un ensemble d'ordre $p-1$ au plus par rapport à la direction L_l. C'est sur l'ensemble $\overline{E}_p$ que nous allons modifier l'arc de manière à satisfaire aux conditions du nº 3. Montrons d'abord que la mesure de $\overline{\mathcal{E}}_p$ tend vers zéro avec $\dfrac{1}{p}$.

Chaque ensemble $\overline{E}_p$ contient $\overline{E}_{p+1}$, $\overline{E}_{p+2}, \ldots$, par suite chaque $\overline{\mathcal{E}}_p$ contient les ensembles d'indices suivants. Soit $\overline{F}$ l'ensemble commun à tous les $\overline{E}_p$, son image $\overline{\varphi}$ est l'ensemble commun à tous les $\overline{\mathcal{E}}_p$. On a donc:

$$mes\,(\overline{\varphi}) = \lim_{p=\infty} \cdot mes\,(\overline{\mathcal{E}}_p).$$

Je dis que $\overline{\varphi}$ est dénombrable. La projection de $\overline{F}$ sur $z_1' z_1$ est l'ensemble $\bar{f}$ commun à tous les $\bar{e}_p$. Or un point $\bar{f}$ ne peut être intérieur à une infinité de segments appartenant chacun à un e_p car la multiplicité $\mathcal{L}_1$ passant par ce point, couperait l'arc en une infinité de points. L'ensemble $\bar{f}$ est par suite contenu dans celui, dénombrable, formé par les extrémités des segments de $\bar{e}_p$. Il est donc dénombrable. Comme chaque point de $\bar{f}$ est la projection d'un nombre fini de points de $\overline{F}$, cet ensemble est lui-même dénombrable. Par suite $\overline{\varphi}$ l'est aussi et l'on a bien:

$$\lim_{p=\infty} \cdot mes\,(\overline{\mathcal{E}}_p) = 0.$$

6. Nous allons maintenant remplacer les arcs de $\overline{E}_p$ par des contours polygonaux de manière à obtenir un arc simple satisfaisant aux conditions du nº 3. On procèdera successivement dans chacune des tranches relatives aux différents segments de $\bar{e}_p$. Soit $(m_1' m_1)$ l'une d'elles, les notations étant les mêmes qu'au *nº* précédent. Nous avons obtenu une suite d'arcs extérieurs les uns aux autres $\widehat{M_1 M_2}$, $\widehat{M_3 M_4}, \ldots$, $\widehat{M_{2r-1} M_{2r}}$, dont les extrémités sont dans $\mathcal{L}_1(m_1')$ et $\mathcal{L}_1(m_1)$. Je dis *que le nombre de ces arcs est au plus égal à p*. Il suffira de montrer que $\mathcal{L}_1(m_1)$, par exemple contient au plus p extrémités des arcs précédents Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Dans ce cas m_1 appartient à e_p il y a donc à l'extérieur de $m_1' m_1$, aussi près qu'on voudra de m_1, des points n'appartenant pas à e_p [nº 4]. D'autre part, d'après l'hypothèse faite sur p, ni A ni B ne se trouvent dans $\mathcal{L}_1(m_1)$. Par suite, en chacun des points $M_1, M_2, \ldots, M_{2r}$ situés dans cette multiplicité, l'arc $\widehat{AB}$ la *traverse* [nº 5]. On pourra donc trouver une multiplicité $\mathcal{L}_1$, voisine de $\mathcal{L}_1(m_1)$ et extérieure à la tranche, coupant l'arc en p points ce qui — on vient de le voir — est impossible.

7. Voici comment on remplacera chaque arc $\widehat{M_{2j-1} M_{2j}}$ de la tranche par un contour polygonal. Il faut faire en sorte que ces contours n'aient de segments dans aucune $\mathcal{L}_i$, et que le remplacement n'introduise pas de point double.

Considérons $\widehat{M_1 M_2}$. Lorsque le point M décrit cet arc chaque multiplicité $\mathcal{L}_i(M)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ balaie un tranche parallèle à $\mathcal{L}_i$; aucune d'elles n'est d'épaisseur nulle (sans quoi une $\mathcal{L}_i$ rencontrerait l'arc en une infinité de points). La partie commune à ces n tranches est un parallélipipède à n dimensions Δ sur chaque face duquel l'arc possède au moins un point. Nous prendrons un point S_1 intérieur à Δ, à une distance du milieu de $M_1 M_2$ inférieure à $\frac{1}{2} M_1 M_2$ et situé en dehors des multiplicités $\mathfrak{L}_i(M_1)$, $\mathfrak{L}_i(M_2)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et des droites joignant respectivement M_1 et M_2 aux autres points $M_3, \ldots, M_{2r}$. L'arc $\widehat{M_1 M_2}$ sera remplacé par le contour $M_1 S_1 M_2$. Une multiplicité $\mathfrak{L}_i$ ne pourra couper ce contour à son intérieur, sans rencontrer $\widehat{M_1 M_2}$ en dehors de ces extrémités.

Pour l'arc $\widehat{M_3 M_4}$ nous procèderons de même. Mais pour éviter que le contour $M_3 S_3 M_4$ rencontre le précédent, nous imposerons à S_3 la condition supplémentaire de se trouver en dehors des plans, (multiplicités à deux dimensions) déterminés respectivement par M_3 et M_4, et les droites $M_1 S_1$ et $S_1 M_2$, ce qui sera possible si $n \geqslant 3$. (Nous examinerons tout à l'heure le cas $n = 2$). De plus S_3 sera choisi en dehors des droites joignant $M_3 M_4$ aux autres points M_i.

On continuera de la sorte pour les arcs suivants. On aura chaque fois à prendre un point intérieur à un parallélipipède à n dimensions et à une sphère, ayant en commun un domaine à n dimensions, le point étant de plus extérieur à un nombre fini de multiplicités linéaires à $n-1$, à deux et à une dimension. Ce qui sera toujours possible pour $n \geqslant 3$.

8. Examinons maintenant l'hypothèse $n = 2$. Dans ce cas la tranche $(m_1' m_1)$ se réduit à une bande limitée par les deux droites parallèles $\mathfrak{L}_1(m_1')$ et $\mathfrak{L}_1(m_1)$. Deux segments $L_{2j-1} M_{2j}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, dont l'un n'est pas intérieur à l'autre — ce qui ne peut avoir lieu que s'ils sont tous les deux sur un même bord de la bande — n'ont pas de point commun. Un tel point ne pourrait être extrémité commune, puisque les arcs $\widehat{M_{2j-1} M_{2j}}$ sont extérieurs les uns aux autres sur $\widehat{AB}$, et alors les arcs sous-tendus par les segments considérés se couperaient nécessairement en un point intérieur à chacun d'eux. Ceci est impossible puisque $\widehat{AB}$ n'a pas de point double.

Voici alors comment on procèdera. Laissant d'abord de côté — s'il en existe — les segments $M_{2i-1} M_{2i}$ entièrement intérieurs à un autre, on remplacera chaque arc par un contour obtenu en prenant un point au voisinage du milieu de sa corde, de manière que deux quelconques des contours ainsi obtenus ne se rencontrent pas; ce qui sera toujours possible. Soient maintenant — s'il y en a — des cordes intérieures à l'une des précédentes. On fera correspondre aux arcs sous-tendus par eux, des contours sans point commun deux à deux, en prenant chaque fois le sommet S_{2j-1} au voisinaee du milieu de $M_{2j-1} M_{2j}$.

Bien entendu, comme dans le cas où n est supérieur à deux, on aura pris chaque S_{2i-1} à l'intérieur du domaine commun aux bandes balayées par $\mathfrak{L}_i(M)$, $(i = 1, 2)$, quand M parcourt $M_{2j-1} M_{2j}$, et en dehors des droites parallèles à L_2 passant par $M_{2j-1} M_{2j}$.

En définitive — dans tous les cas — deux contours d'une même tranche n'ont pas de point commun. Il est d'autre part immédiat que deux contours appartenant à des tranches différentes ne peuvent avoir de point commun, sauf peut-être une extrémité commune (ce qui a lieu seulement si les tranches se touchent). De plus, tout point de $\widehat{AB}$ n'appartenant pas à $\overline{E_p}$ ne peut se trouver sur un contour.

9. En résumé — et en modifiant légèrement les notations — à chaque arc $\widehat{M_k N_k}$ de $\overline{E}_p$, nous avons fait correspondre un contour polygonal à deux côtés $M_k S_k N_k$, de manière à remplir les conditions suivantes.

1° — la distance d'un point quelconque de $M_k S_k N_k$ à chacune de ses extrémités est au plus égale à $|M_k N_n|$, (le contour est dans la sphère de diamètre $M_k N_k$);

2° — deux contours différents ont au plus un point commun, qui est alors une extrémité commune;

3° — tout point de $\widehat{AB}$ n'appartenant pas à $\overline{E_p}$ ne peut se trouver sur un contour;

4° — une multiplicité $\mathfrak{L}_i$ rencontre chaque contour en deux points au plus, elle le rencontre entre ses extrémités seulement si elle coupe l'arc correspondant de $\overline{E_p}$ à son intérieur;

5° — dans chaque tranche relative à un segment de $\bar{e}_p$ il y a au plus p contours.

10. Il va être facile maintenant de définir un arc simple $(\widehat{AB})'$ satisfaisant aux conditions du n° 3. Considérons les arc successifs de $\overline{E_p}$, $\widehat{M_1 N_1}, \ldots, \widehat{M_k N_k}, \ldots$, dont les images sur $\overline{\alpha\beta}$ sont les segments $\overline{\mu_1 \gamma_1}, \ldots, \overline{\mu_k \gamma_k} \ldots$. A tout point μ de $\overline{\alpha\beta}$ faisons correspondre le point M' défini de la manière suivante:

si μ n'est pas intérieur à un segment de $\overline{\mathcal{S}}_p$, M' est confondu avec l'image M de μ sur AB,

si μ est intérieur à un segment $\overline{\mu_k \gamma_k}$ de $\overline{\mathcal{S}}_p$, M' est le point du contour $M_k S_k N_k$, dont le rapport des distances, *sur ce contour*, aux extrémités M_k et N_k est égal au rapport $\frac{\mu \mu_k}{\mu \gamma_k}$. Aux points α et β correspondront respectivement A et B, car ces points ne sont intérieurs à aucun arc de $\overline{E}_p$ [n⁰ 6].

Il résulte immédiatement des conditions 2⁰ et 3⁰ du n⁰ précédent, que la correspondance entre μ et M' est biunivoque. Je dis qu'elle est continue dans le sens $\mu - M'$. C'est évident si $\overline{E}_p$ contient seulement un nombre fini d'arcs. Plaçons-nous dans l'hypothèse contraire.

Soient M et $\overline{M}$ deux points quelconques de $\widehat{AB}$, μ et $\overline{\mu}$ leurs images sur $\overline{\alpha\beta}$. La borne supérieure de la distance $|M\overline{M}|$ lorsque $|\mu\overline{\mu}|$ est au plus égal à δ, est une fonction $\omega(\delta)$ non décroissante qui tend vers zéro avec δ. $\omega(\delta)$ est le module de continuité de la correspondance $\mu - M$.

Soit μ un point de $\overline{\alpha\beta}$. Démontrons, par exemple que la correspondance $\mu - M'$ est continue du côté de β. La question se pose seulement si μ est point limite d'une infinité de segments de $\overline{\mathcal{S}}_p$ situés entre μ et β. Dans ce cas μ n'est pas intérieur à un segment de $\overline{\mathcal{S}}_p$, M' est donc confondu avec M. Prenons entre μ et β un point λ tel que $|\mu\lambda|$ soit inférieur à δ. Il y a entre μ et λ un segment de $\overline{\mathcal{S}}_p$, soit $\overline{\mu_k \nu_k}$. Soit alors $\overline{\mu}$ un point de $\overline{\mu \nu_k}$. Si $\overline{\mu}$ n'est pas intérieur à un segment de $\overline{\mathcal{S}}_p$, le point $\overline{M}'$ correspondant à $\overline{\mu}$, est confondu avec l'image $\overline{M}$ de $\overline{\mu}$ sur $\widehat{AB}$, et l'on a

$$|M'\overline{M}| = |M\overline{M}| \leqslant \omega(\delta).$$

Supposons $\overline{\mu}$ intérieur à un segment $\overline{\mu_i \gamma_i}$. D'après la propriété 1⁰ du n⁰ 9, on a

$$|M_i \overline{M}'| \leqslant |M_i N_i|.$$

Or, la longueur du segment $\overline{\mu_i \gamma_i}$ est moindre que δ, on en déduit

$$|M_i \overline{M}'| \leqslant \omega(\delta).$$

D'autre part $|\mu\mu_i|$ est aussi inférieur à δ. Donc

$$|M' M_i| = |M M_i| \leqslant \omega(\delta),$$

puisque M' est confondu avec M. Par suite on peut écrire

$$|M' \overline{M}'| \leqslant 2\omega(\delta),$$

pourvu que $\overline{\mu}$ appartienne au segment $\overline{\mu \gamma_k}$, ce qui démontre la continuité à droite. La continuité à gauche s'établit de la même manière.

Donc quand μ décrit $\overline{\alpha\beta}$, M' décrit un arc simple $(\widehat{AB})'$, qui coïncide avec $\widehat{AB}$ sauf peut-être [1]) aux points intérieurs aux arcs $\overline{E}_p$, ensemble dont l'image — dans la correspondance choisie — a une mesure aussi petite qu'on veut.

Occupons-nous maintenant des points de rencontre de $(\widehat{AB})'$ avec les multiplicités $\mathfrak{L}_i$. Des propriétés 4⁰ et 5⁰ du n⁰ 9. on déduit que cet arc est d'ordre $2p$ au plus par rapport à la direction L_1. En effet, si une multiplicité $\mathfrak{L}_1$ ne contient aucun point de $\overline{e}_p$, ses points de rencontre avec $(\widehat{AB})'$ sont ceux où elle coupe $\widehat{AB}$, il y en a au plus $p-1$. Si $\mathfrak{L}_1$ contient un point de $\overline{e}_p$ elle ne peut rencontrer que des contours, et par suite coupe $(\widehat{AB})'$ en $2p$ points au maximum.

Considérons maintenant une multiplicité $\mathfrak{L}_i$, non parallèle à L_1, coupant $\widehat{AB}$ en q points. Elle ne coupera $(\widehat{AB})'$ en un plus grand nombre de points que si elle rencontre des contours $M_k S_k N_k$ à leur intérieur. Mais $\mathfrak{L}_i$ ne peut couper un contour à son intérieur sans rencontrer l'arc correspondant de $\widehat{AB}$ [n⁰ 9—4⁰]. Il en résulte que $\mathfrak{L}_i$ coupe $(AB)'$ en $2q$ points au plus.

Enfin l'ensemble des points de $\widehat{AB}$ qui n'appartiennent peut-être pas à $(\widehat{AB})'$, a pour image sur $\overline{\alpha\beta}$ l'ensemble ouvert formé par les segments de $\overline{\mathcal{S}}_p$ *considérés comme ouverts*.

11. La proposition énoncée au n⁰ 3 est donc complètement démontrée. En opérant sur $(AB)'$ relativement à L_2, comme on l'a fait sur $\widehat{AB}$ relativement à L_1, on obtiendra un arc simple $(AB)''$ d'ordre borné par rapport aux directions L_1 et L_2, et d'ordre fini

[1]) Un contour $M_k S_k N_k$ peut rencontrer un arc partiel de la même tranche.

par rapport aux autres L_i. Au bout de n opérations on aura *un arc simple* $\widehat{\overline{AB}}$, *d'ordre borné par rapport aux n directions, et par suite rectifiable* [n° 3], *coïncidant avec* $\widehat{AB}$ *sauf peut-être aux points d'un ensemble dont l'image sur* $\overline{\alpha\beta}$ *est aussi petite qu'on veut. Cette image, somme de n ensembles ouverts, est elle-même un ensemble ouvert.* Autrement dit, $\widehat{AB}$ *est quasi-rectifiable.*

Le résultat précédent peut se compléter ainsi: *entre deux points quelconques de* $\widehat{AB}$ *il y a un arc partiel rectifiable*

Pour le démontrer il suffira d'établir que sur tout arc d'ordre fini par rapport à la direction L_1, il y a un arc partiel d'ordre borné par rapport à cette direction. Reprenons les notations du n° 4. Soit m un point de e_1 (projection de $\widehat{AB}$ sur $z_1' z_1$). Appelons *ordre* du point m le nombre des points de $\widehat{AB}$ dont il est la projection. Il s'agit de montrer qu'il existe sur e_1 un segment dont les points sont d'ordre borné. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Prenons un segment d_1 de e_1, il existe à l'intérieur de d_1 un point de e_2 — sans quoi les points de d_1 seraient d'ordre borné — ce point appartient à un segment de e_2, dont nous ne conserverons qu'une partie intérieure à d_1, soit d_2. De même, il existe à l'intérieur de d_2 un point de e_3 et par suite un segment d_3 dont tous les points appartiennent à e_3, etc.... On formera ainsi une suite indéfinie de segments $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2, \ldots$, intérieurs les uns aux autres, appartenant respectivement à e_1, $e_2, \ldots$, ce qui donnera un point appartenant à tous les ensembles. Or ceci est impossible.

12. Il est facile d'étendre les résultats précédents à des cas plus généraux. Soient Φ_i n faisceaux, d'arêtes ω_i et un arc simple $\widehat{AB}$ sans point commun avec les arêtes. Par chaque point M de $\widehat{AB}$ il passe dans chaque faisceau une multiplicité et une seule; nous supposerons que les multiplicités ainsi obtenues forment un n-èdre, quel que soit M sur $\widehat{AB}$.

Analytiquement les faisceaux seront représentés par des équations

$$X_i - y_i Y_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où les X_i Y_i sont des fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et les y_i des paramètres. Nous supposerons que $\widehat{AB}$ n'a aucun point dans les multiplicités $Y_i = 0$.

Considérons $\widehat{AB}$ comme l'arc de Jordan défini par n fonctions continues dans (0, 1),

$$x_i = x_i(t).$$

Si l'on remplace dans (1) les x_i par les $x_i(t)$, on obtiendra n fonctions continues $y_i = y_i(t)$, qu'on peut regarder comme définissant une courbe de Jordan dans un espace (y). D'autre part, puisque les multiplicités passant par les ω_i et un point quelconque de $\widehat{AB}$ forment un n-èdre, le déterminant du système

$$X_i - y_i(t)\, Y_i = 0$$

est différent de zéro, quel que soit t. Par suite les $x_i(t)$ dont des fonctions rationnelles continues des $y_i(t)$. L'image de $\widehat{AB}$ dans l'espace (y) est donc un arc simple, dont toute partie rectifiable est nécessairement l'image d'un arc partiel rectifiable. Enfin, si $\widehat{AB}$ est d'ordre fini, ou borné, par rapport au faisceau Φ_i, son image dans (y) est d'ordre fini ou borné par rapport à la direction $y_i = 0$.

Nous avons supposé que $\widehat{AB}$ n'a pas de points dans les multiplicités $Y_i = 0$. On peut évidemment partager $\widehat{AB}$ en un nombre fini d'arcs partiels de manière que cette hypothèse soit réalisable pour chacun d'eux. En définitive les résultats des n° précédents s'appliquent donc à tout arc simple d'ordre borné ou fini par rapport aux faisceaux Φ_i pourvu qu'il n'ait aucun point sur les arêtes et que les multiplicités des faisceaux passant par un point quelconque de l'arc forment un n-èdre.

L'hypothèse relative à l'existence, en chaque point de l'arc, d'un n-èdre défini par ce point et les arêtes du faisceau peut se traduire autrement. On sait que l'ensemble des points de l'espace, à distance finie ou non, pour lesquels les multiplicités à $n-1$ dimensions définies par ce point et les ω_i ne forment pas un n-èdre est une multiplicité algébrique réglée à $n-1$ dimensions, de degré $n-1$, dont les génératrices s'appuient sur les ω_i. Nous désignerons cette multiplicité par $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$, ou encore par $[\omega_i]$.

Exceptionnellement $[\omega_i]$ n'existe pas et l'ensemble contient tout l'espace. C'est ce qui a lieu si les ω_i ont un point commun, mais aussi dans d'autres circonstances (par exemple, pour $n = 4$, si ω_1, ω_2, ω_3 ont une droite commune sans point commun avec ω_4). Nous écarterons ces cas exceptionnels.

En définitive, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème. *Soient, dans un espace euclidien à n dimensions, ω_i, ($i = 1, 2, \ldots, n$), n multiplicités linéaires à $n-2$ dimensions, à distance finie ou non, telles que le lieu des droites s'appuyant sur elles toutes soit une multiplicité à $n-1$ dimensions $[\omega_i]$, et $\widehat{AB}$ un arc simple sans point sur $[\omega_i]$,*

1° — *si $\widehat{AB}$ est d'ordre borné par rapport aux faisceaux d'arêtes ω_i, l'arc est rectifiable,*

2° — *si $\widehat{AB}$ est d'ordre fini par rapport aux faisceaux, l'arc est quasi-rectifiable: on peut le remplacer par un arc simple rectifiable* (d'ordre borné par rapport aux faisceaux) *coïncidant avec lui sauf peut-être aux points d'un ensemble ouvert, sur $\widehat{AB}$, dont l'image, dans une correspondance arbitrairement donnée, a une mesure aussi petite qu'on veut; de plus, entre deux points quelconques de $\widehat{AB}$ il y a un arc partiel rectifiable.*

En prenant pour $\widehat{AB}$ une courbe $y = f(x)$ d'ordre fini par rapport à la direction $y = 0$, on a le cas particulier suivant, qui donne une propriété intéressante de certaines fonctions continues.

Une fonction continue d'une variable qui prend chacune de ses valeurs seulement un nombre fini de fois possède une dérivée presque partout; on peut la modifier sur un ensemble de mesure aussi petite qu'on veut de manière à obtenir une fonction continue à variation bornée.

13. Il faut remarquer que la restriction relative à l'absence de points sur $[\omega_i]$ ne peut être levée. Supposons $n = 3$ et soit H un hyperboloïde dont les génératrices sont les courbes coordonnées $u = c^{te}$ et $v = c^{te}$. Prenons sur H un arc simple $\widehat{AB}$ défini par $v = f(u)$, où $f(u)$ est une fonction continue sans dérivée, cet arc ne rencontrant pas les trois génératrices ω_i, $v = v_i$, ($i = 1, 2, 3$). $\widehat{AB}$ est d'ordre *un* par rapport aux faisceaux d'arêtes ω_i. Or ici $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ n'est autre que H.

14. Il est bien évident qu'on pourrait remplacer les faisceaux par des familles continues de multiplicités à $n-1$ dimensions, pas nécessairement linéaires, ni même algébriques, satisfaisant à certaines conditions.

Concerning regular accessibility.

By

Beatrice Aitchison (Baltimore, U. S. A.).

1. This paper considers the subject of regular accessibility from a new standpoint suggested by the theorems of Moore and Menger on the arcwise connectivity of certain G_δ sets. A general theorem on the regular accessibility of limit points of connected, locally connected G_δ sets is proved. Most of the known theorems on regular accessibility are special cases or immediate consequences of this proposition, and in several cases are true in a more general form than that in which they were originally stated Treatment of these theorems in the light of the theorem proved in this paper results in shorter and simpler proofs than have hitherto been obtained.

2. Definitions. The space concerned in this paper is connected, locally connected, locally compact, separable and metric. An hereditarily locally connected continuum is a locally connected continuum, every subcontinuum of which is locally connected. A set which is the product of a countable number of open sets is called a G_δ set. In the space considered, a G_δ set is equivalent to a „complete space" [1]). A point P is said to be accessible from a set M, provided that, if X is any point of M, there exists a simple continuous arc from X to P, contained wholly in M except for P. A point P is said to be regularly accessible [2]) from a set M, provided that, for any given positive number ε there exists a positive number δ, such that any point X of M at a distance less than δ from P may

[1]) P. Alexandroff, Comptes Rendus, 178, p. 185.

[2]) G. T. Whyburn, *Concerning the open subsets of a plane continuous curve*, Proc. Nat. Acad. Sc., vol. 13 (1927), p. 650